RÉGULARISATION ET $\overline{\partial}_b$ HOMOTOPIE SUR LES VARIÉTÉS CR

Salomon SAMBOU

Prépublication de l'Institut Fourier n° 642 (2004)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

1. Introduction

Soit X une variété différentiable de classe C^∞ et soit $D^{\bullet\prime}(X)$, respectivement $\mathscr{E}^\bullet(X)$, l'espace des courants, respectivement des formes différentielles de classe C^∞ sur X. Dans [Rh], de Rham a montré que pour tout courant T, il existe deux opérateurs R et A avec $R\colon D^{\bullet\prime}(X) \to \mathscr{E}^\bullet(X)$ et $A\colon D^{\bullet\prime}(X) \to D'^{\bullet}(X)$ tels que

$$T - RT = dAT + AdT.$$

Chirka [Ci] a généralisé ce résultat aux variétés analytiques complexes. Plus précisément, il a montré :

Théorème 1.1 ([Ci]). — *Soit X une variété analytique complexe à métrique fixée. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux opérateurs R_ε et A_ε définis dans $D^{\bullet\prime}(X)$ avec les propriétés suivantes :*

1. *$R_\varepsilon\colon D'^{p,q}(X) \to \mathscr{E}^{p,q}(X)$, $A_\varepsilon\colon D'^{p,q}(X) \to D'^{p,q-1}(X)$;*
2. *Pour tout $T \in D'^{p,q}(X)$, les courants $R_\varepsilon T$ et $A_\varepsilon T$ sont concentrés dans un ε-voisinage du support de T.*
3. *$R_\varepsilon T \to T$ et $A_\varepsilon T \to 0$ faiblement quand $\varepsilon \to 0$.*
4. *Pour tout ouvert $U \subset X$, la régularité de $A_\varepsilon T$ est de $(1-0)$ meilleure que celle de T dans un ε-voisinage de U.*
5. *$T - R_\varepsilon T = \overline{\partial} A_\varepsilon T + A_\varepsilon \overline{\partial} T$, $T \in D'^{p,q}(X)$.*

Nous voulons généraliser ce résultat aux variétés CR.

Définition 1.2. — *Soient M une sous-variété CR générique de codimension k d'une variété analytique complexe X, $A\colon D'(M) \to D'(M)$ un opérateur linéaire et $T \in D'(M)$. On dit que la régularité de AT est de α meilleure que celle de T, si lorsque T est de classe C^ℓ sur un ouvert de M alors AT est de classe $C^{\ell+\alpha}$ sur cet ouvert.*

Classification math. : 32F20, 32F10, 32W10.

Mots-clés : Variété CR q-concave, régularisation, $\overline{\partial}_b$ homotopie, isomorphisme de Dolbeault..

Le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman a joué un rôle clé dans la construction du résultat de Chirka. Dans [B-L], Moulay Y. Barkatou et Christine Laurent-Thiébaut ont construit des noyaux du type Bochner-Martinelli-Koppelman pour une famille de variétés CR. Nous allons nous appuyer sur ces noyaux pour généraliser le résultat de Chirka aux variétés CR. Il faut cependant remarquer que dans le cas de nos variétés CR, les noyaux du type Bochner-Martinelli-Koppelman de [B-L] ne donnent une formule d'homotopie que pour des courants d'un certain bidegré, qui est lié à la forme de Lévi des fonctions définissantes de la variété CR.

La généralisation du résultat de Chirka sera donc influencée par ces propriétés des noyaux. On obtient :

Théorème 1.3. — *Soit X une variété analytique complexe de dimension n à métrique fixée et soit M une sous-variété* CR *générique de X de codimension k. On suppose que M est q-concave, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe deux opérateurs R_ε et A_ε définis dans l'espace des courants $D^{\bullet\prime}(M)$ et qui vérifient :*

1. *$R_\varepsilon : D'^{0,r}(M) \to \mathscr{E}^{0,r}(M)$ et $A_\varepsilon : D'^{0,r}(M) \to D'^{0,r-1}(M)$, pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $r \geqslant n-k-q+1$;*
2. *Le support de $R_\varepsilon T$ est contenu dans un ε-voisinage du support de T ;*
3. *$R_\varepsilon T \to T$ et $A_\varepsilon T \to 0$ faiblement quand $\varepsilon \to 0$;*
4. *Pour tout ouvert $U \subset M$, si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $r \geqslant n-k-q+1$, alors la régularité de $A_\varepsilon T_{|U}$ est de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T sur un ε-voisinage de U ;*
5. *Si $0 \leqslant r \leqslant q-2$ ou $r \geqslant n-k-q+1$,*
$$T - R_\varepsilon T = A_\varepsilon \overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b A_\varepsilon T \,,$$
si $r = q-1$ et $\overline{\partial}_b T = 0$, alors $T - R_\varepsilon T = \overline{\partial}_b A_\varepsilon T$.

Notons $H^{p,q}_\infty(M)$, respectivement $H^{p,q}_{\mathrm{cour}}(M)$, le (p,q)-ième groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie des formes différentielles de classe C^∞, respectivement des courants, sur M. On déduit de ce théorème des propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'application naturelle de $H^{p,q}_\infty(M) \to H^{p,q}_{\mathrm{cour}}(M)$, retrouvant ainsi les résultats de [L-Le].

Corollaire 1.4. — *Soient X une variété analytique complexe de dimension n à métrique fixée et M une sous-variété* CR *générique de codimension k de X. On suppose que M est q-concave. Alors l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(M) \to H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(M)$ est :*

- *surjective, si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$;*
- *injective, si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$. Plus précisément, soit T un courant sur M de bidegré $(0,r)$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $r \geqslant n-k-q+2$, s'il existe un courant S sur M de bidegré $(0,r-1)$ tel que $\overline{\partial}_b S = T$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un courant S_ε sur M tel que $\overline{\partial}_b S_\varepsilon = T$ et la régularité de S_ε restreint à tout ouvert $U \subset M$ est de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T sur tout ε-voisinage de U.*

Remarque. — Si $H_\ell^{0,r}(M)$ est le groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie de l'espace des formes différentielles de classe C^ℓ dont le $\overline{\partial}_b$ est encore C^ℓ alors sous les hypothèses du corollaire 1.4, on a l'application naturelle de $H_\infty^{0,r}(M) \to H_\ell^{0,r}(M)$ est :

– surjective, si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$;
– injective, si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$.

2. Préliminaires et notations

Soit M une sous-variété réelle de codimension réelle k d'une variété analytique complexe X de dimension n. On suppose pour z_0 un point de M et U un ouvert de coordonnées locales de X autour de z_0 que $M \cap U = \{z \in U \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\}$, où, ρ_i, $i = 1,\ldots,k$, sont des fonctions de classe C^∞ sur U vérifiant $d\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in U \cap M$. On note $T_z^{\mathbb{C}}(M)$ l'espace tangent complexe à M au point z.

Définition 2.5. — *La sous-variété M est dite* CR, *si la dimension de $T_z^{\mathbb{C}}(M)$ est indépendante du point $z \in M$. M est* CR *générique si pour tout $z \in M$, $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M) = n-k$, où k est la codimension réelle de M.*

Définition 2.6. — *Soit M une sous-variété* CR *générique de codimension k d'une variété analytique complexe X de dimension n. M est q-concave au point $z_0 \in M$, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$, si pour tout ouvert U de coordonnées locales contenant z_0 tel que $M \cap U = \{z \in U \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\}$ avec $d\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_k(z) \neq 0$, la forme de Lévi*

$$\mathscr{L}^M \rho_x(z_0) \cdot \xi = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x(z_0)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}_\beta} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$$

restreinte à $T_{z_0}^{\mathbb{C}}(M)$ admet au moins q-valeurs propres strictement négatives, où $\rho_x = x_1\rho_1 + \cdots + x_k\rho_k$ avec $x = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ et $\xi \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}(M)$.

On désigne par $C^r(M)$ l'espace des fonctions de classe $[r]$ (où $[r]$ est la partie entière de r) dont les dérivées d'ordre $[r]$ sont höldériennes d'ordre $r-[r]$.

Une forme différentielle est de classe C^r si ses coefficients dans tout système de coordonnées locales sont de classe C^r.

La propriété 4 du théorème 1.3 signifie que si T est C^r dans un ε-voisinage de U, alors $A_\varepsilon T_{|U}$ est $C^{r+\frac{1}{2}}$.

Soit M une sous-variété CR générique d'une variété analytique complexe X de dimension n. On suppose que M est de codimension k et est q-concave, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$.

Considérons un point $z_0 \in M$. Soit (V,θ), $V \subset X$ une carte locale autour de z_0 et $U_{z_0} \subset V$ un ouvert assez petit de sorte que $z_0 \in U_{z_0}$ et $M \cap U_{z_0} = \{z \in V \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\}$, où ρ_i, $i = 1,\ldots,k$, sont des fonctions qui définissent localement M. Posons $\tilde{\rho}_j(\xi) = \rho_j \circ \theta^{-1}(\xi)$, $j = 1,\ldots,k$. Alors

$$\widetilde{M} = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \tilde{\rho}_1(\xi) = \cdots = \tilde{\rho}_k(\xi) = 0\}$$

est CR difféomorphe à $M \cap U_{z_0}$.

D'après [B-L], il existe un voisinage ouvert $\widetilde{V}_{\theta(z_0)}$ de $\theta(z_0)$ dans $\mathbb{C}^n$ et un noyau R_M tels que : si f est une (n,r) forme différentielle de classe C^1 sur $\widetilde{M} \cap \widetilde{V}_{\theta(z_0)}$ à support compact, et si on pose :

$$\hat{R}_r f(z) = (-1)^{(k+1)(n+r)+\frac{k(k+1)}{2}} \int_{\widetilde{M}} f(\xi) \wedge R_M(z,\xi) \text{ pour } r \geqslant n-k-q+1 ,$$

ou

$$\hat{R}_r f(\xi) = (-1)^{(k+1)(n+r)+\frac{k(k+1)}{2}} \int_{\widetilde{M}} f(z) \wedge R_M(z,\xi) \text{ pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1 .$$

On a alors,

$$f = \hat{R}_{r+1}\overline{\partial}_b f + \overline{\partial}_b \hat{R}_r f \text{ pour } 0 \leqslant r \leqslant q-1 \text{ ou } n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k .$$

Les opérateurs $\hat{R}_r$ sont continus de $C^{\ell}_{n,r}\left(\overline{\widetilde{M} \cap \hat{V}_{\theta(z_0)}}\right)$ dans $C^{\ell+\frac{1}{2}}_{n,r}\left(\widetilde{M} \cap \widetilde{V}_{\theta(z_0)}\right)$, si $\widetilde{M}$ est de classe $C^{\ell+2}$ et $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$ ou si $\widetilde{M}$ est de classe $C^{\ell+3}$ et $0 \leqslant r \leqslant q-1$.

Posons $M_0 = \widetilde{M} \cap \widetilde{V}_{\theta(z_0)}$. On a pour $\xi \in \widetilde{V}_{\theta(z_0)}$, $\overline{\partial}\rho_1(\xi) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_k(\xi) \neq 0$. On sait que sur $\widetilde{V}_{\theta(z_0)}$, on a un système de coordonnées naturel $(x_1,\ldots,x_{2n})$. Quitte à réordonner $(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})$, on peut considérer $(x_1,\ldots,x_{2n-k},\rho_1(\xi),\ldots,\rho_k(\xi))$ comme un autre système de coordonnées sur $\widetilde{V}_{\theta(z_0)}$ et quitte à restreindre U_{z_0}, on peut supposer $\theta(U_{z_0}) = \widetilde{V}_{\theta(z_0)}$. On note SCI le système de coordonnées naturel, SCII le second système de coordonnées et φ le difféomorphisme qui transforme le SCI en SCII.

Remarques.

i) SCII est bien défini car pour tout $\xi \in \widetilde{V}_{\theta(z_0)}$, $\overline{\partial}\tilde{\rho}_1(\xi) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\tilde{\rho}_k(\xi) \neq 0$, donc $d\tilde{\rho}_1(\xi) \wedge \cdots \wedge d\tilde{\rho}_k(\xi) \neq 0$.

ii) Dans le cas d'une (n,r)-forme différentielle sur $\widetilde{M}$, $\overline{\partial}_b = d$, la différentielle extérieure, et commute avec l'image réciproque par θ ou φ des formes différentielles de classe C^∞.

Soit T un courant de bidegré $(0,n-k-r)$ avec $(0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k)$ à support compact dans M_0. On définit un opérateur $\widetilde{R}_r$ sur $\mathscr{E}'(M_0)$ l'espace des courants à support compact dans M_0 de la manière suivante : $\widetilde{R}_{r+1}T$ est le courant de bidegré $(0,n-k-r-1)$ défini par $\langle \widetilde{R}_{r+1}T,\psi\rangle = (-1)^{n-k-r}\langle T,\hat{R}_{r+1}\psi\rangle$, pour toute $(n,r+1)$ forme différentielle ψ de classe C^∞ à support compact dans M_0. D'après la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman de [B-L], on a

$$\begin{aligned}
\langle T,\widetilde{\psi}\rangle &= \langle T,d\hat{R}_r\widetilde{\psi}\rangle + \langle T,\hat{R}_{r+1}d\widetilde{\psi}\rangle \\
&= (-1)^{n-k-r-1}\langle \overline{\partial}_b T,\hat{R}_r\widetilde{\psi}\rangle + (-1)^{n-k-r}\langle \widetilde{R}_{r+1}T,d\widetilde{\psi}\rangle \\
&= \langle \widetilde{R}_r\overline{\partial}_b T,\widetilde{\psi}\rangle + \langle \overline{\partial}_b\widetilde{R}_{r+1}T,\widetilde{\psi}\rangle ,
\end{aligned}$$

pour toute (n,r)-forme différentielle $\widetilde{\psi}$ de classe C^∞, à support compact dans M_0, $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$. Ainsi pour tout courant T de bidegré $(0,n-k-r)$ à support compact dans M_0 avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$, on a

$$T = \widetilde{R}_r\overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b\widetilde{R}_{r+1}T . \tag{1}$$

3. Régularisation dans M_0

Dans le SCII, si $\theta(z) \in M_0$, $\theta(z) = (x_1,\ldots,x_{2n-k},0,\ldots,0)$. Ainsi M_0 s'identifie à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n-k}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\theta(z_0)$ a $(0,\ldots,0)$ pour coordonnées dans SCII et que $B_{2n-k}(\theta(z_0),1)$, la boule de centre $\theta(z_0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{2n-k}$ est contenue dans Ω.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur M_0 à support compact, $f\circ\varphi^{-1} = \varphi_* f \in C^\infty(\Omega)$. On considère $\lambda \in C^\infty(B_{2n-k}(\theta(z_0),1))$ à support compact telle que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et

$$\int_{y\in B_{2n-k}(\theta(z_0),1)} \lambda\, d\mathscr{V}_{2n-k} = 1,$$

où $d\mathscr{V}_{2n-k}$ est un élément de volume dans $\mathbb{R}^{2n-k}$.

Posons $\lambda_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2n+k}\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x\in\Omega$.

$$(\varphi_* f)_\varepsilon(x) = \varphi_* f * \lambda_\varepsilon(x) = \int_{y\in B_{2n-k}(\theta(z_0),1)} \varphi_* f(y)\lambda(\frac{y-x}{\varepsilon})\, d\mathscr{V}_{2n-k}(y)\ .$$

$(\varphi_* f)_\varepsilon \to \varphi_* f$ uniformément quand $\varepsilon\to 0$. On pose

$$f_\varepsilon = (\varphi_* f)_\varepsilon \circ \varphi = \varphi^*(\varphi_* f)_\varepsilon\ ,$$

$f_\varepsilon \to f$ uniformément quand $\varepsilon \to 0$ et est une régularisée de f sur M_0.

Si ψ est une (n,r)-forme différentielle sur M_0, dans SCII,

$$\psi = \sum_{|I|=r} \psi_{n,I}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n+|I|}} + \sum_{|I'|<r} \psi_{n,I'}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n+|I'|}}\wedge d\rho_{i_{n+|I'|+1}}\wedge\cdots\wedge d\rho_{i_{n+|I'|+r'}}$$

où $r' = r - |I'|$, $\psi_{n,I}$, $\psi_{n,I'}$ sont des fonctions qui ne dépendent que de $x_1,\ldots,x_{2n-k}$.

On définit une régularisée de ψ par

$$\psi_\varepsilon = \sum_{|I|=r} \psi_{n,I\varepsilon}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n+|I|}} + \sum_{|I'|<r} \psi'_{n,I'\varepsilon}\, dx_{i_1}\wedge\cdots \wedge dx_{i_{n+|I'|}}\wedge d\rho_{i_{n+|I'|+1}}\wedge\cdots\wedge d\rho_{i_{n+|I'|+r'}}\ .$$

Pour un courant T dans M_0, on définit un opérateur $R_\varepsilon T$ par $\langle R_\varepsilon T,\psi\rangle = \langle T,\psi_\varepsilon\rangle$ pour toute forme différentielle ψ à support compact dans M_0.

$R_\varepsilon T$ est une forme différentielle de classe C^∞ à support compact dans un ε-voisinage du support de T et $R_\varepsilon T \to T$ faiblement quand $\varepsilon\to 0$.

Pour un courant T de bidegré $(0,n-k-r)$ à support compact dans M_0 avec $0\leqslant r\leqslant q-1$ ou $n-k-q+1\leqslant r\leqslant n-k$, on a d'après (1)

$$R_\varepsilon T = R_\varepsilon \widetilde{R}_r \overline{\partial}_b T + R_\varepsilon \overline{\partial}_b \widetilde{R}_{r+1} T\ .$$

LEMME 3.7. — *$\overline{\partial}_b R_\varepsilon T = R_\varepsilon \overline{\partial}_b T$, pour tout courant T dans M_0 de bidegré $(0,n-k-r)$, avec $0\leqslant r\leqslant q-1$ ou $n-k-q+1\leqslant r\leqslant n-k$.*

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned}\langle\overline{\partial}_b R_\varepsilon T,\psi\rangle &= (-1)^{n-k-r-1}\langle R_\varepsilon T,d\psi\rangle = (-1)^{n-k-r-1}\langle T,R_\varepsilon d\psi\rangle\\ &= (-1)^{n-k-r-1}\langle T,dR_\varepsilon\psi\rangle = \langle R_\varepsilon\overline{\partial}_b T,\psi\rangle\ ,\end{aligned}$$

pour toute (n,r)-forme différentielle ψ à support compact dans M_0. Donc $\overline{\partial}_b R_\varepsilon T = R_\varepsilon\overline{\partial}_b T$. □

Il résulte du lemme que

$$T - R_\varepsilon T = (I - R_\varepsilon)\widetilde{R}_r\overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b(I - R_\varepsilon)\widetilde{R}_{r+1}T\ .$$

On pose $A_\varepsilon = (I - R_\varepsilon)\widetilde{R}$. Alors,

$$T - R_\varepsilon T = A_\varepsilon\overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b A_\varepsilon T\ .$$

$R_\varepsilon \to I$ et $A_\varepsilon \to 0$ faiblement quand $\varepsilon \to 0$. La régularité de $A_\varepsilon T_{|U}$ est de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T dans un ε-voisinage de U, pour tout ouvert U dans M_0. En effet, le noyau de l'opérateur A_ε modulo un terme de classe C^∞ est le noyau $R_{\widetilde{M}}$ de l'opérateur $\widehat{R}$ et ce noyau augmente la régularité de $\frac{1}{2}$.

4. Régularisation dans la variété CR

Posons $M_{z_0} = M \cap U_{z_0}$, $R_\varepsilon^\circ = \theta^* R_\varepsilon(\theta^{-1})^*$ et $A_\varepsilon^\circ = \theta^* A_\varepsilon(\theta^{-1})^*$, où R_ε et A_ε sont les opérateurs définis sur M_0. D'après la régularisation sur M_0, on a pour tout courant T sur M_{z_0} à support compact, de bidegré $(0,n-k-r)$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$;

$$T - R_\varepsilon^\circ T = A_\varepsilon^\circ\overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b A_\varepsilon^\circ T\ ,$$

où R_ε° et A_ε° ont les mêmes propriétés sur M_{z_0} que R_ε et A_ε sur M_0.

Soit $(M_j,\theta_j)_{j\geqslant 1}$ un recouvrement de M par des ouverts de M du type M_{z_0}, $\theta_j : M_j \to \widetilde{M}_j \subset \mathbb{C}^n$. Soit $(V_j)_{j\geqslant 1}$ un raffinement des $(M_j)_{j\geqslant 1}$ par une famille d'ouverts de M telle que $V_j \subset\subset M_j$. Soit $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$ une famille de fonctions de classe C^∞ à support compact dans M_j telles que $\psi_j \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{V}_j$.

Comme X est paracompacte, X admet une métrique hermitienne. On munit M de la métrique induite par celle de X. Posons ρ la distance associée à la métrique induite sur M. On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\delta_j > 0$ une constante pour chaque j qui vérifie $\delta_j < 2^{-j}\varepsilon$ et $\delta_{j+1} < \frac{\delta_j}{2}$.

On suppose que δ_j est suffisamment petit de sorte qu'un δ_j-voisinage dans M_j de $\operatorname{supp}\psi_j$ soit relativement compact et un $2\delta_j$-voisinage de $\operatorname{supp}(1-\psi_j)$ ne rencontre pas $\overline{V}_j$.

Puisque $\theta_j : M_j \to \widetilde{M}_j$ est un CR difféomorphisme, qu'un δ_j-voisinage de $\operatorname{supp}\psi_j$ est relativement compact et que θ_j^{-1} est continue donc uniformément continue sur tout compact, alors pour tout $\delta_j > 0$, il existe $\varepsilon_j > 0$ tel que si $|\theta_j(x) - \theta_j(x')| < \varepsilon_j$ alors $\rho(x,x') < \delta_j$, pour tout x,x' dans un δ_j-voisinage de $\operatorname{supp}\psi_j$.

Considérons $R_j^* := (\theta_j)^* R_{\varepsilon_j}(\theta_j^{-1})^*$ et $A_j^* := (\theta_j)^* A_{\varepsilon_j}(\theta_j^{-1})^*$, où R_{ε_j} et A_{ε_j} sont les analogues dans $\widetilde{M}_j$ de A_ε et R_ε dans M_0.

Posons $R_{(j)}T := R_j^*(\psi_j T) + A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T) + (1-\psi_j)T$. L'opérateur $R_{(j)}$ est défini pour tout courant T de bidegré $(0,n-k-r)$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$.

i) $R_{(j)}T$ est C^∞ sur un δ_j-voisinage de $\overline{V}_j$, car $1-\psi_j$ est nulle sur un $2\delta_j$-voisinage de V_j.
ii) $R_{(j)}T = T$ sur un voisinage de $M \setminus M_j$.
iii) La régularité de $R_{(j)}T$ n'est pas plus mauvaise que celle de T dans un δ_j-voisinage dans M de $M \cap \operatorname{supp}(\psi_j)$.

Lemme 4.8. — *Soit M une sous-variété* CR *générique q-concave de codimension k d'une variété analytique complexe X de dimension n. Pour tout courant T de bidegré $(0,n-k-r)$; on a :*

i) $\overline{\partial}_b R_{(j)}T = R_{(j)}\overline{\partial}_b T$ *et alors*

$$(I - R_{(j)}T) = A_j^*(\psi_j \overline{\partial}_b T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T) \tag{2}$$

si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ *ou* $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$.

ii) Si $r = n-k-q+1$ *et* $\overline{\partial}_b T = 0$, *alors*

$$\overline{\partial}_b R_{(j)}T = 0 \tag{3}$$

et on a alors $(I - R_{(j)})T = \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T)$.

Preuve du lemme.

i) On sait d'après la régularisation sur M_j que

$$T - R_j^* T = A_j^* \overline{\partial}_b T + \overline{\partial}_b A_j^* T\,, \tag{$*$}$$

si T est de bidegré $(0,n-k-r)$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$.

$$R_{(j)}T = R_j^*(\psi_j T) + A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T) + (1-\psi_j)T\,.$$

$$\overline{\partial}_b R_{(j)}T = \overline{\partial}_b R_j^*(\psi_j T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T) + \overline{\partial}_b[(1-\psi_j)T]\,.$$

Si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$, on applique $(*)$ à $\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T$ et on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_b R_{(j)}T &= R_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T) + R_j^*(\psi_j\overline{\partial}_b T) + [\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T - R_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T)\\ &\qquad + A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge \overline{\partial}_b T)] - \partial_b\psi_j \wedge T + (1-\psi_j)\overline{\partial}_b T\\ &= R_j^*(\psi_j\overline{\partial}_b T) + A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge \overline{\partial}_b T) + (1-\psi_j)\overline{\partial}_b T\,.\end{aligned}$$

Donc $\overline{\partial}_b R_{(j)}T = R_{(j)}\overline{\partial}_b T$.

$$\begin{aligned}(I - R_{(j)})T &= \psi_j T - R_j^*(\psi_j T) - A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T)\\ &\overset{(*)}{=} [A_j^*(\overline{\partial}_b(\psi_j T)) + \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T)] - A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T)\\ &= A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T) + A_j^*(\psi_j\overline{\partial}_b T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T) - A_j^*(\overline{\partial}_b\psi_j \wedge T)\\ &= A_j^*(\psi_j\overline{\partial}_b T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T).\end{aligned}$$

Donc $(I - R_{(j)})T = A_j^*(\psi_j\overline{\partial}_b T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T)$.

ii) Si $r = n-k-q+1$ et $\overline{\partial}_b T = 0$, alors

$$\overline{\partial}_b R_{(j)} T = \overline{\partial}_b R_j^*(\psi_j T) + \overline{\partial}_b A_j^*(\overline{\partial}_b \psi_j \wedge T) - \overline{\partial}_b(\psi_j T) .$$

Or

$$A_j^*(\overline{\partial}_b \psi_j \wedge T) = A_j^*(\overline{\partial}_b(\psi_j T)) - A_j^*(\psi_j \overline{\partial}_b T) = A_j^*(\overline{\partial}_b(\psi_j T))$$

et

$$A_j^* \overline{\partial}_b(\psi_j T) \overset{(*)}{=} \psi_j T - R_j^*(\psi_j T) - \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T) .$$

Donc

$$\overline{\partial}_b A_j^*(\overline{\partial}_b \psi_j \wedge T) = \overline{\partial}_b(\psi_j T) - \overline{\partial}_b R_j^*(\psi_j T) .$$

Ainsi $\overline{\partial}_b R_{(j)} T = \overline{\partial}_b R_j^*(\psi_j T) + [\overline{\partial}_b(\psi_j T) - \overline{\partial}_b R_j^*(\psi_j T)] - \overline{\partial}_b(\psi_j T) = 0$. Comme dans *i)*

$$\begin{aligned}(I - R_{(j)})T &= \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T) + A_j^*(\psi_j \overline{\partial}_b T) \\ &= \overline{\partial}_b A_j^*(\psi_j T) \text{ car } \overline{\partial}_b T = 0 .\end{aligned}$$

□

On définit un opérateur $A_{(j)} := A_j^* \psi_j : D'(M) \to D'(M)$. On a alors d'après (2)

$$(I - R_{(j)})T = \overline{\partial}_b A_{(j)} T + A_{(j)} \overline{\partial}_b T$$

pour T un courant de bidegré $(0, n-k-r)$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$, et si $r = n-k-q+1$ et $\overline{\partial}_b T = 0$, on a d'après (3)

$$(I - R_{(j)})T = \overline{\partial}_b A_{(j)} T .$$

Comme dans [Ci] et [Rh], on construit les opérateurs recherchés par récurrence ;

$$R_0 = I\ ,\ R^m = R_{(m)} R^{m-1}\ ,\ A^m = A_{(m)} R^{m-1}\ ,\ m = 1,2,\dots .$$

$R^m T$ est C^∞ dans un δ_m-voisinage de $\bigcup_{j=1}^{m} V_j$, la régularité de $R^m T_{|U}$ n'est pas plus mauvaise que celle de T dans un ε-voisinage de U, pour tout ouvert U de M.

$A^m T_{|U}$ a une régularité de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T.

Tout compact E de M est recouvert par un nombre fini de M_j. Puisque $R_{(j)} = I$ et $A_{(j)} = 0$ à l'extérieur de M_j, alors il existe un indice $m_E < +\infty$ tel que $R^m = R^{m_E}$ et $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} A^j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_E} A^j$ sur un voisinage de E, pour m assez grand.

Puisque pour toute forme différentielle φ de classe C^∞ à support compact dans M et toute fonction ψ de classe C^∞, à support compact E et qui vaut 1 dans le voisinage de $\mathrm{supp}(\varphi)$, on a $\langle T, \varphi \rangle = \langle \psi T, \varphi \rangle$, alors les opérateurs $R_\varepsilon = \lim_{m \to +\infty} R^m$ et $A_\varepsilon = \sum_{1 \leqslant j \leqslant +\infty} A^m$ sont bien définis comme opérateurs linéaires continus sur $D'(M)$ et

$$\langle R_\varepsilon T, \varphi \rangle = \langle R^{m_E} \psi T, \varphi \rangle\ ,\ \langle A_\varepsilon T, \varphi \rangle = \langle \sum_{1 \leqslant m \leqslant m_E} A^m \psi T, \varphi \rangle .$$

Remarques.

i) R_ε préserve le bidegré, A_ε le réduit de $(0,1)$.

ii) $R_\varepsilon T$ est une forme différentielle de classe C^∞ sur M. $A_\varepsilon T_{|\,U}$ a une régularité de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T sur un ε-voisinage de U, pour tout ouvert U de M.

iii) $R_\varepsilon T$ est concentré dans un ε-voisinage du support de T.

Puisque pour tout ouvert $U \subset\subset M$, $R_\varepsilon T_{|\,U} \to T_{|\,U}$ et $A_\varepsilon T_{|\,U} \to 0$ faiblement quand $\varepsilon \to 0$, on a $R_\varepsilon \to I$ et $A_\varepsilon \to 0$ faiblement quand $\varepsilon \to 0$.

Puisque pour les courants de bidegrés $(0,n-k-r)$ on a $\overline{\partial}_b R_{(j)} = R_{(j)}\overline{\partial}_b$ si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$, il s'ensuit que $\overline{\partial}_b R^m = R^m \overline{\partial}_b$ sur tout ouvert U de M et donc $\overline{\partial}_b R_\varepsilon = R_\varepsilon \overline{\partial}_b$. De même si $r = n-k-q+1$, on a pour les $(0,q-1)$ courants $T\overline{\partial}_b$-fermés $\overline{\partial}_b R_{(j)} T = 0$, il s'ensuit que $\overline{\partial}_b R^m T = 0$ sur tout ouvert U de M et donc $\overline{\partial}_b R_\varepsilon T = 0$.

Pour les courants de bidegré $(0,n-k-r)$, on a

$$\begin{aligned} R^m - R^{m+1} = R^m - R_{(m+1)}R^m &= (I - R_{(m+1)})R^m \\ &= (\overline{\partial}_b A_{(m+1)} + A_{(m+1)}\overline{\partial}_b)R^m \\ &= \overline{\partial}_b A_{(m+1)}R^m + A_{(m+1)}\overline{\partial}_b R^m \\ &= \overline{\partial}_b A^{m+1} + A^{m+1}\overline{\partial}_b\,,\ m = 0,1,2,\dots, \end{aligned}$$

si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$.

Si $r = n-k-q+1$ et $\overline{\partial}_b T = 0$,

$$(R^m - R^{m+1})T = (I - R_{(m+1)})R^m T = \overline{\partial}_b A_{(m+1)} R^m T = \overline{\partial}_b A^{m+1} T\,.$$

En sommant sur m, on a pour les courants de bidegré $(0,n-k-r)$

$$I - R_\varepsilon = \overline{\partial}_b A_\varepsilon + A_\varepsilon \overline{\partial}_b\,,$$

si $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$ et si $r = n-k-q+1$ et $\overline{\partial}_b T = 0$,

$$(I - R_\varepsilon)T = \overline{\partial}_b A_\varepsilon T\,.$$

Ce qui donne le théorème.

Preuve du corollaire.

• *Surjectivité.* Soit $[T] \in H^{0,r}_{\text{cour}}(M)$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$. D'après le théorème,

$$T - R_\varepsilon T = \overline{\partial}_b A_\varepsilon T\,.$$

Puisque $R_\varepsilon T$ est une forme différentielle de classe C^∞, $\overline{\partial}_b$ fermée, $R_\varepsilon T$ représente une classe de cohomologie dans $H^{0,r}_\infty(M)$ et $[R_\varepsilon T] = [T]$ dans $H^{0,r}_{\text{cour}}(M)$, d'où la surjectivité de l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(M) \to H^{0,r}_{\text{cour}}(M)$.

• *Injectivité.* Si $T = \overline{\partial}_b S$ avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ ou $n-k-q+2 \leqslant r \leqslant n-k$, on déduit du théorème que $S = R_\varepsilon S + \overline{\partial}_b A_\varepsilon S + A_\varepsilon \overline{\partial}_b S = R_\varepsilon S + \overline{\partial}_b A_\varepsilon S + A_\varepsilon T$. Donc $\overline{\partial}_b S = \overline{\partial}_b(R_\varepsilon S + A_\varepsilon T)$. On pose $S_\varepsilon = R_\varepsilon S + A_\varepsilon T$. $R_\varepsilon S$ est une forme différentielle de classe C^∞ et la régularité de $A_\varepsilon T$ est de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T. Donc la régularité de S_ε est de $\frac{1}{2}$ meilleure que celle de T.

On rappelle que par convention un $(0, -1)$ courant ou une $(0, -1)$-forme différentielle est nul.

Si $T = f$ une forme différentielle de classe C^∞, alors $f = \overline{\partial}_b(R_\varepsilon S + A_\varepsilon f)$ avec $R_\varepsilon S + A_\varepsilon f$ qui est de classe C^∞, ce qui donne l'injectivité de l'application naturelle de $H^{0,r}_\infty(M) \to H^{0,r}_{\mathrm{cour}}(M)$. $\square$

Remerciements : Ce travail a été fait alors que je bénéficiais d'une bourse de perfectionnement à la recherche de l'agence universitaire de la Francophonie. Je tiens à remercier le professeur Christine Laurent de l'Institut Fourier d'avoir bien voulu m'accueillir dans le cadre de ce programme.

Bibliographie

[B-L] BARKATOU M.-Y., LAURENT-THIÉBAUT CH., *Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 593, Grenoble (2003).

[Ci] CHIRKA A. M., *Regularization and $\overline{\partial}$ homotopy on a complex manifold*, Soviet. Math. Dokh., **vol. 20** (1979), n∘ 1.

[L] LAURENT-THIÉBAUT CH., *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Inter-Éditions et CNRS Editions, 1997.

[L-Le] LAURENT-THIÉBAUT CH., LEITERER J., *Dolbeault Isomorphism for* CR *manifolds*, Math. Ann., **325** (2003), 165–185.

[Rh] De RHAM G., *Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Industrielles, Hermann, Paris.

Salomon SAMBOU
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
&
Université C. A. DIOP
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
DAKAR (Sénégal)