# THÉORÈME DE SÉPARATION DE TYPE ANDREOTTI-VESENTINI SUR LES VARIÉTÉS CR

Salomon SAMBOU

Prépublication de l'Institut Fourier n° 639 (2004)

*http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html*

## 0. Introduction

Soit $M$ une sous-variété CR générique de codimension $k$ d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. On suppose que $M$ est $q$-concave.

Définition 0.1. — *Une fonction $\varphi$ définie sur $M$ est dite $(q+k)$-convexe (respectivement $(q+k)$-concave) au point $p \in M$, si pour toute extension $\widetilde{\psi}$ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\varphi$ (respectivement $-\varphi$) à un voisinage de $p$ dans $X$, la forme de Lévi de $\widetilde{\psi}$ restreinte à l'espace tangent complexe $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ possède au moins $q$ valeurs propres strictement positives.*

Définition 0.2. — *On dit que $M$ est $q$-concave à l'infini, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$, si*

*a) $M$ est $q$-concave ;*

*b) il existe une fonction $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $M$, un compact $K \subset M$ et une constante $c_\infty \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que :*

*i) $\varphi < c_\infty$ sur $M|K$ ;*

*ii) $\{z \in M \mid \varphi(z) \leqslant c\}$ est compact pour tout $c < c_\infty$ ;*

*iii) $\varphi$ est $(q+k)$-concave en tout point $p$ de $M|K$.*

En combinant les théorèmes 4.2.7 et 4.2.9 de [R], on a le résultat suivant de finitude des groupes de $\overline{\partial}_b$-cohomologie de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $M$.

Théorème 0.3. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$ et $M$ une sous-variété CR générique de codimension $k$ de $X$. On suppose que $M$ est $q$-concave à l'infini, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$. Alors,*

$$\dim H_\infty^{0,r}(M) < +\infty \textit{ pour } 0 \leqslant r \leqslant q-2.$$

*Classification math.* : 32F40, 32F10.
*Mots-clés* : $q$-concave, variété CR, théorème de séparation, $q$-concave à l'infini.

Dans ce travail, on s'intéresse à la séparation du groupe $H_\infty^{0,q-1}(M)$ muni de la topologie quotient naturelle. On a

THÉORÈME 0.4. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $M \subset X$, une sous-variété* CR *générique de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $X$. On suppose :*

- *$M$ est une variété* CR *générique de codimension $k$ ;*
- *$M$ est $q$-concave à l'infini, $2 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$.*

*Alors $H_\infty^{0,q-1}(M)$ est séparé.*

Un résultat de même nature a été initialement établi par Andreotti et Vesentini [A-V] pour les variétés analytiques complexes $X$, $q$-concaves au sens de [He-Le], c'est-à-dire possédant une fonction d'exhaustion $(q+1)$-concave en dehors d'un compact de $X$. Dans ce cas, $\dim H_\infty^{0,r}(X) < +\infty$ pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $H_\infty^{0,q}(X)$ est séparé. Si $M$ est une sous-variété CR générique $q$-concave et compacte, Henkin [He] a obtenu la finitude de la dimension du groupe $H_\infty^{0,r}(M)$ pour $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et la séparation de $H_\infty^{0,q}(M)$. Ce résultat de Henkin a été généralisé par Hill et Nacinovich [H-N] aux variétés CR abstraites $q$-concaves compactes.

Le cas des hypersurfaces réelles d'une variété analytique complexe a été étudié dans [L-Le2001] par la méthode des représentations intégrales.

Dans [L-Le98] et [L-Le2001], il a été annoncé que la méthode utilisée dans [L-Le98] et [L-Le2001] peut s'étendre aux variétés CR génériques pour lesquelles on a des formules de représentation intégrale. D'après les travaux de Moulay Y. Barkatou et Christine Laurent-Thiébaut [B-L], on a sur les variétés CR génériques $q$-concaves des formules de représentation intégrale.

Partant donc des formules de représentation intégrale de [B-L] et [L-S], on construit une formule d'homotopie. Cette formule nous permet suivant [L-Le2001] de montrer que le $(n,n-k-q+2)^{\text{ième}}$ groupe $H_{0,c}^{n,n-k-q+2}(M)$ de $\overline{\partial}_b$-cohomologie des formes différentielles continues à support compact dans $M$ est de dimension finie. La séparation de $H_\infty^{0,q-1}(M)$ est alors déduite par dualité grâce au théorème 3.4 de [L-Le2001], au lemme 4.2.3 et au théorème 4.2.5 de [R].

## 1. Préliminaires et notations

Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $M \subset X$ une sous-variété réelle de classe $\mathscr{C}^2$ de $X$. Soit $k$ la codimension réelle de $M$.

DÉFINITION 1.1.

*i) $M$ est dite* CR, *si la dimension de $T_z^{\mathbb{C}}(M)$, l'espace tangent complexe à $M$ en $z$ est indépendante du point $z \in M$.*

*ii) $M$ est dite* CR *générique si $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M) = n-k$ en tout point $z \in M$.*

Soient $U \subset X$, un ouvert et $\rho_1, \ldots, \rho_k$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$ telles que :

$$M \cap U = \left\{z \in U \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\right\} \text{ avec } d\rho_1 \wedge d\rho_2 \wedge \cdots \wedge d\rho_k \neq 0.$$

La variété $M$ est CR générique sur $M \cap U$ si et seulement si $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_k \neq 0$ sur $M \cap U$. Les fonctions $\rho_1, \ldots, \rho_k$ sont appelées fonctions définissantes de $M$ sur $U$.

Définition 1.2. — *Soit $M$ une sous-variété* CR *générique de codimension $k$ d'une variété analytique complexe de dimension $n$.*

*i) $M$ est dite $q$-concave ($1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$) au point $z \in M$, si pour tout ouvert $U$ de coordonnées locales autour de $z$ et $\rho_1, \ldots, \rho_k$ des fonctions définissantes de $M$ sur $U$, la forme de Lévi $\mathscr{L}_{\rho_x}(t) = \sum\limits_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}(z) t^\alpha \bar{t}^\beta$, restreinte à $T_z^{\mathbb{C}}(M)$ admet au moins $q$-valeurs propres strictement négatives, où $\rho_x = x_1\rho_1 + \cdots + x_k\rho_k$, avec $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.*

*ii) $M$ est dite $q$-concave si $M$ est $q$-concave en tout point de $M$.*

Soit $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$ et $M$ une sous-variété de $X$. On suppose que $M$ est une variété CR générique $q$-concave ($1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$)de codimension $k$. Soient $z_0 \in M$, $U$ un ouvert de coordonnées locales autour de $z_0$ et $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k$ des fonctions qui définissent $M$ sur $U$. Soit $c > 0$ une constante. Posons

$$\rho_j = \hat{\rho}_j + c\sum_{\nu=1}^{k} \hat{\rho}_\nu^2 \tag{1}$$

$$\rho_{-j} = -\hat{\rho}_j + c\sum_{\nu=1}^{k} \hat{\rho}_\nu^2.$$

On définit $\mathfrak{I}$ comme l'ensemble de tous les sous-ensembles $I \subset \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ tels que $|i| \neq |j|$ pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$. Pour $I \in \mathfrak{I}$, $|I|$ désigne le nombre d'éléments de $I$, $\mathfrak{I}(\ell)$, $1 \leqslant \ell \leqslant k$, est l'ensemble de tous les $I \in \mathfrak{I}$ avec $|I| = \ell$ et $\mathfrak{I}'(\ell)$, $1 \leqslant \ell \leqslant k$ est l'ensemble de tous les $I \in \mathfrak{I}$ de la forme $I = (i_1, \ldots, i_\ell)$ avec $|i_\nu| = \nu$, pour $\nu = 1, \ldots, \ell$.

Soient $I = (i_1, \ldots, i_\ell)$ un élément de $\mathfrak{I}(\ell)$, $(e_1, \ldots, e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Posons $e_{-j} = -e_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. $\Delta_I = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\ell} \lambda_j e_{i_j} \mid \lambda_j \geqslant 0\,,\ \sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1\right\}$ définit alors un $(|I| - 1)$-simplexe.

Soit $\rho_\lambda = \lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k}$, une fonction définissante de $M$ dans la direction de $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Delta_I$. Il est connu (voir [B-L]) qu'il existe un ouvert $U' \subset\subset U$, tel que si $C \geqslant 0$ est suffisamment grand dans (1), alors pour tout $I \in \mathfrak{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_I$, la forme de Lévi $\mathscr{L}^X_{\rho_\lambda}(z)$ admet au moins $(q + k)$ valeurs propres strictement positives.

Proposition 1.3. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $M$ une sous-variété de $X$. On suppose que $M$ est une sous-variété* CR *générique de codimension $k$. Soient $p \in M$, $U$ un ouvert de coordonnées locales autour de $p$, $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$ qui définissent $M$ et $\varphi$ une fonction définie sur $M$. Considérons les assertions suivantes :*

*i) Il existe un ouvert $U' \subset\subset U$ relativement compact dans $U$ contenant $p$, $\psi$, $\rho_1,\dots,\rho_k$, $\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U'$, $\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}$ définies comme dans* (1) *tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

*a) $\psi = \varphi$ sur $U' \cap M$.*

*b) $(\rho_{i_1},\dots,\rho_{i_k})$ avec $I = (i_1,\dots,i_k) \in \mathfrak{I}(k)$ sont définissantes de $M$ dans $U'$.*

*c) Pour tout $\lambda = (\lambda_0,\dots,\lambda_k)$ appartenant à un $k$-simplexe, la forme de Lévi $\mathscr{L}^X(\lambda_0\psi + \lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k})(p)$ admet au moins $(q+k)$ valeurs propres strictement positives.*

*ii) $\varphi$ est $(q+k)$ convexe en $p \in M$.*

*Alors ii) $\Rightarrow$ i).*

*Démonstration.* — Supposons que *ii)* est réalisée. Puisque $M$ est $q$-concave, il existe un ouvert de coordonnées $U$ autour de $p$, des fonctions $\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$ tels que pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ appartenant à un $(k-1)$ simplexe, $I = (i_1,\dots,i_k) \in \mathfrak{I}(k)$ la forme de Lévi $\mathscr{L}^U(\lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k})$ admet au moins $(q+k)$ valeurs propres strictement positives. Soit $\widetilde{\psi}$ une extension de $\varphi$ dans un voisinage de $p$ dans $X$. On suppose $U$ suffisamment petit de sorte que $\widetilde{\psi} = \varphi$ sur $M \cap U$. Posons $\varphi_c = \widetilde{\psi} + c\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^2$ avec $c >> 0$. $\varphi_c = \varphi$ sur $M \cap U$ et est donc aussi une extension de $\varphi$ à $U$. Pour montrer *i)*, il suffit de montrer cette assertion plus précise :

Assertion 1.4

*Il existe une constante $c_\lambda > 0$ telle que pour tout $c \geqslant c_\lambda$, tout $(i_1,\dots,i_k) \in \mathfrak{I}(k)$, $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ un élément d'un $k$-simplexe, la forme de Lévi $\mathscr{L}^X(\lambda_0\varphi_c + \sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\rho_{i_\nu})(p)$ admet au moins $(q+k)$ valeurs propres strictement positives.*

Nous allons d'abord prouver que pour $\lambda_0 = [0,1]$, la forme de Lévi

$$(*) \qquad \mathscr{L}^M(\lambda_0\widetilde{\psi} + \sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\rho_{i_\nu})(p) \text{ restreinte à } T_p^{\mathbb{C}}M$$

a $q$-valeurs propres strictement positives.

Si $\lambda_0 = 0$, c'est la $q$-concavité de $M$ en $p$.

Si $\lambda_0 = 1$, c'est l'hypothèse sur $\widetilde{\psi}$ dans la définition 0.1 au voisinage de $p$.

Considérons $0 < \lambda_0 < 1$. Posons $\varphi_\lambda = \widetilde{\psi} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\lambda_\nu}{\lambda_0}\rho_{i_\nu}$. $\varphi_\lambda$ est aussi une extension de $\varphi$. D'après la réalisation de *ii)*, $\mathscr{L}^M(\varphi_\lambda)(p)$ admet au moins $q$-valeurs propres strictement positives.

Mais $\mathscr{L}^M(\lambda_0\varphi_\lambda) = \lambda_0\mathscr{L}^M(\varphi_\lambda)$ et $\mathscr{L}^M(\lambda_0\varphi_\lambda) = \mathscr{L}^M\left(\lambda_0\widetilde{\psi} + \sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\rho_{i_\nu}\right)$ et $\lambda_0\mathscr{L}^M(\varphi_\lambda)$ admet $q$-valeurs propres strictement positives. Ce qui donne $(*)$.

*Preuve de l'assertion* : elle est identique au cas hypersurface traité dans [L-Le95]. □

REMARQUE 1.5

a) D'après la proposition 2.2.9 de [R], si $\varphi$ est une fonction $(q+k)$ convexe au point $p \in M$ au sens de la définition 0.1, alors $\varphi$ est $(q+k)$-convexe au sens de la définition 2.2.8 de [R].

b) Dans toute la suite quand nous parlerons d'une extension de la fonction $\varphi$ dans un voisinage de $p$, alors il s'agira d'une extension $\psi$ qui vérifie l'assertion *i)* de la proposition 1.3.

DÉFINITION 1.6. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$ et $M$ une sous-variété de $X$ de codimension réelle $k$. On suppose que $M$ est* CR *générique et $q$-concave* $(1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2})$.

*On dit que $[D,G]$ est une extension strictement $q$-convexe dans $M$, si $D$ et $G$ sont des ouverts de $M$ avec $D \subseteq G$ tels que :*

*i)* $\overline{G \setminus D}$ *est compact ;*

*ii) il existe un voisinage $W$ de $\overline{G \setminus D}$ dans $M$, une fonction $(q+k)$-convexe $\varphi$ définie sur $W$ tels que :*

*a)* $D \cap W = \{z \in W \mid \varphi(z) < 0\}$ *et* $G \cap W = \{z \in W \mid \varphi(z) < 1\}$ *;*

*b)* $\forall z \in \partial D \cup \partial G,\ d\varphi(z) \neq 0$.

NOTATIONS 1.7. — Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $M$ une sous-variété CR générique de codimension $k$ de $X$. Soit $\Omega \subset M$, un ouvert de $M$. Si $\ell \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\Omega)$ (respectivement $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\overline{\Omega})$) l'espace des $(p,q)$-formes différentielles de classe $\mathscr{C}^{\ell}$ sur $\Omega$ (respectivement sur $\overline{\Omega}$).

Pour $\ell \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in ]0,\frac{1}{2}]$, $\mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q}(\Omega)$ (respectivement $\mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q}(\overline{\Omega})$) désigne le sous-espace de $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\Omega)$ (respectivement $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\overline{\Omega})$) dont les dérivées d'ordre $\ell$ sont holdériennes d'ordre $\alpha$. Soit $D \subset M$ un sous-ensemble de $M$, on note $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(D;M)$ (respectivement $\mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q}(D;M)$) le sous-espace de $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(M)$ (respectivement de $\mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q}(M)$) à support compact dans $D$. $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(c;M)$ est le sous-espace de $\mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(M)$ dont les éléments sont à support compact.

On associe à ces espaces, les sous-espaces suivants :

$$
\begin{aligned}
Z^{\ell}_{p,q}(\Omega) &= \mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\Omega) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b, & Z^{\ell}_{p,q}(\overline{\Omega}) &= \mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\overline{\Omega}) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b \\
E^{\ell}_{p,q}(\Omega) &= \mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(\Omega) \cap \operatorname{Im} \overline{\partial}_b, & E^{\ell}_{p,q}(\overline{\Omega}) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell}_{p,q-1}(\overline{\Omega}) \\
E^{\ell+\alpha}_{p,q}(\Omega) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q-1}(\Omega), & E^{\ell+\alpha}_{p,q}(\overline{\Omega}) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q-1}(\overline{\Omega}) \\
Z^{\ell}_{p,q}(c;M) &= \mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(c;M) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b, & E^{\ell}_{p,q}(c;M) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell}_{p,q-1}(c;M) \\
Z^{\ell}_{p,q}(D;M) &= \mathscr{C}^{\ell}_{p,q}(D;M) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b, & E^{\ell}_{p,q}(D;M) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell}_{p,q-1}(D;M) \\
Z^{\ell+\alpha}_{p,q}(D;M) &= \mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q}(D;M) \cap \operatorname{Ker} \overline{\partial}_b, & E^{\ell+\alpha}_{p,q}(D;M) &= \overline{\partial}_b \mathscr{C}^{\ell+\alpha}_{p,q-1}(D;M)
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne les espaces quotients suivants :

$$H_\ell^{p,q}(\Omega) = \frac{Z_{p,q}^\ell(\Omega)}{E_{p,q}^\ell(\Omega)}, \qquad H_\ell^{p,q}(\overline{\Omega}) = \frac{Z_{p,q}^\ell(\overline{\Omega})}{E_{p,q}^\ell(\overline{\Omega})},$$

$$H_{\ell+\alpha}^{p,q}(\Omega) = \frac{Z_{p,q}^\ell(\Omega)}{E_{p,q}^{\ell+\alpha}(\Omega)}, \qquad H_{\ell+\alpha}^{p,q}(\overline{\Omega}) = \frac{Z_{p,q}^\ell(\overline{\Omega})}{E_{p,q}^{\ell+\alpha}(\overline{\Omega})},$$

$$H_{\ell,c}^{p,q}(M) = \frac{Z_{p,q}^\ell(c;M)}{E_{p,q}^\ell(c;M)}.$$

## 2. Formule d'homotopie en un point de $q$-concavité pour les grands degrés

Soient $\varphi$, $M$, $K$ comme dans la définition 0.2 et $z_0 \in M \setminus K$. Supposons $d\varphi(z_0) \neq 0$. On va établir une formule d'homotopie pour un domaine dont le bord contient $z_0$. Puisque ce sont des résultats locaux, on peut supposer sans perte de généralité que $X$ est $\mathbb{C}^n$.

Considérons $U$, $U'$ comme dans l'assertion *i)* de la proposition 1.3. Il n'y a pas perte de généralité en supposant $\varphi(z_0) = 0$ et $U' = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - z_0| < \tau\}$, où $\tau \in \mathbb{R}_*^+$.

Soit $\rho_*$ une extension de $-\varphi$ à $U'$ ayant les propriétés de $\psi$ dans l'assertion *i)* de la proposition 1.3. Posons $\Omega = \{z \in U' \mid \rho_*(z) < 0\}$. Puisque $d\varphi(z_0) \neq 0$, on peut choisir $\tau$ suffisamment petit de sorte que $\Omega$ soit à bord lisse par morceaux. En posant $\omega = \Omega \cap M$, on a la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman sur $\omega$ pour les $(n,r)$ formes différentielles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overline{\omega}$ avec $n - k - q + 1 \leqslant r \leqslant n - k$, voir théorème 0.1 de [B-L].

Posons $\tilde{\rho}(z) = |z - z_0|^2 - \tau^2$ et pour $\beta > 0$, $\rho_{*\beta} = \max_\beta(\rho_*,\tilde{\rho})$, où $\max_\beta$ est le maximum régularisé défini par [He-Le].

Soit $I* = (i_1,\dots,i_k,*)$ un multiindice avec $I = (i_1,\dots,i_k) \in \mathfrak{I}'(k)$. D'après la définition de $\rho_{*\beta}$, on a pour tout $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k,\lambda_*) \in \Delta_{I*}$, la forme de Lévi $\mathscr{L}^{U'}(\lambda_*\rho_{*\beta} + \lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k})$ admet $(q+k)$ valeurs propres strictement positives.

Le plus gros sous-espace $E^{\lambda_*}$ de $\mathbb{C}^n$ pour lequel $\mathscr{L}^{U'}(\lambda_*\rho_{*\beta} + \lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k})$ est définie positive est de dimension supérieure ou égale à $q + k$. Posons $Q^{\lambda_*}$ la projection de $\mathbb{C}^n$ sur le supplémentaire orthogonal de $E_{\lambda_*}$ et $\Omega_\beta = \{z \in \Omega \mid \rho_{*\beta}(z) < 0\}$, c'est un domaine à bord lisse qui approxime $\Omega$.

Pour avoir une formule d'homotopie sur $\omega_\beta = \Omega_\beta \cap M$, il nous faut définir les sections de Leray $\psi_{I*}$ et $\psi_{I\bullet*}$ du paragraphe 2.3 de [L-S] qui pour $\lambda_* = 0$, sont égales aux sections $\psi_I$ et $\psi_{I\bullet}$ du paragraphe 2.1 de [L-S].

Pour $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k,\lambda_*) \in \Delta_{I*}$ posons $\rho^\lambda = \lambda_*\rho_{*\beta} + \lambda_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_k\rho_{i_k}$, et pour $j = 1,\dots,n$

$$\omega_{I*}^j(\xi,z,\lambda) = 2\frac{\partial\rho^\lambda}{\partial\xi_j} - \sum_{k=1}^n a_{jk}^\lambda(\xi)(\xi_k - z_k) + A'\sum_{k=1}^n \overline{Q_{jk}^\lambda(\xi_k - z_k)},$$

où $a^\lambda_{jk}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $U'$, vérifiant

$$\left| a^\lambda_{jk} - \frac{\partial \rho^\lambda}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right| < \frac{\alpha^\lambda}{2n^2} \text{ sur } U'.$$

On pose

$$\omega_{I*}(\xi,z,\lambda) = \left(\omega^1_{I*}(\xi,z,\lambda),\ldots,\omega^n_{I*}(\xi,z,\lambda)\right)$$

$$\Phi_{I*}(\xi,z,\lambda) = \langle \omega_{I*}(\xi,z,\lambda),\xi - z\rangle$$

et

$$\psi_{I*}(\xi,z,\lambda) = \frac{\omega_{I*}(\xi,z,\lambda)}{\Phi_{I*}(\xi,z,\lambda)}\ .$$

On se fixe $\psi_I(\xi,z,\lambda)$ du paragraphe 2.1 de [L-S] comme $\psi_{I*}(\xi,z,\lambda)$ avec $\lambda_* = 0$.

La section $\psi_{0I*}(\xi,z,\lambda)$ est définie à partir de $\psi_{I*}$ et la section de Bochner-Martinelli comme dans 2.3 de [L-S].

Posons $\rho_\bullet = \frac{1}{k}(\rho_1 + \cdots + \rho_k)$, $I\bullet = (i_1,\ldots,i_k,\bullet)$ un multiindice où $(i_1,\ldots,i_k) \in \mathfrak{I}'(k)$. Pour $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_\bullet) \in \Delta_{I\bullet}$ avec $\lambda_\bullet \neq 1$, on sait définir les sections $\psi_{I\bullet}$ et $\psi_{0I\bullet}$ (cf. paragraphe 2.2 de [L-S]). Considérons maintenant le multiindice $I\bullet* = (i_1,\ldots,i_k,\bullet,*)$ où $(i_1,\ldots,i_k) \in \mathfrak{I}'(k)$. Soit $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_\bullet,\lambda_*) \in \Delta_{I\bullet*}$. Pour $\lambda_\bullet \neq 1$, on pose $\lambda' = \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_\bullet},\ldots,\frac{\lambda_k}{1-\lambda_\bullet},\frac{\lambda_*}{1-\lambda_\bullet}\right)$ ; $\lambda' \in \Delta_{I*}$. On définit la section $\psi_{I\bullet*}(\xi,z,\lambda)$ en remplaçant $\rho^{\lambda'}$ intervenant dans la construction de $\psi_{I\bullet}$ par $\rho^{\lambda'} = \lambda'_1\rho_{i_1} + \cdots + \lambda'_k\rho_{i_k} + \lambda'_*\rho_{*\beta}$, où $\lambda'_j = \frac{\lambda_j}{1-\lambda_0}$, $j = 1,\ldots,k,*$. Là aussi pour $\lambda* = 0$, $\psi_{I\bullet*}(\xi,z,\lambda) = \psi_{I\bullet}(\xi,z,\lambda)$. $\psi_{0I\bullet*}(\xi,z,\lambda)$ est alors définie de manière standard.

On remplace les sections $\psi_{I*}$, $\psi_{0I*}$, $\psi_{I\bullet*}$ et $\psi_{0I\bullet*}$ du paragraphe 2.3 de [L-S] par ces nouveaux $\psi_{I*}$, $\psi_{0I*}$, $\psi_{I\bullet*}$ et $\psi_{0I\bullet*}$, ce qui nous permet d'établir :

THÉORÈME 2.1. — *Pour $n - k - q + 1 \leqslant s \leqslant n - k$, il existe des opérateurs bornés $T_s$ de $C^0_{n,s+1}(\overline{\omega}_\beta)$ vers $C^{1/2}_{n,s}(\omega_\beta)$ tels que pour chaque $(n,s)$ forme différentielle $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overline{\omega}_\beta$, on a :*

$$f = \overline{\partial}_b T_{s-1} f + T_s \overline{\partial}_b f\ .$$

*L'opérateur*

$$T_s g = (-1)^{(n+s)(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}} \left[ \int_{\xi\in\omega_\beta} g(\xi) \wedge [R_M]_{n,s}(\xi,\bullet) + (-1)^{n+s+1} \int_{\xi\in b\omega_\beta} g(\xi) \wedge [G_M]_{n,s}(\xi,\bullet) \right] ;$$

*où $G_M$ est l'analogue pour $\Omega_\beta$ du noyau $G_M$ dans le paragraphe 2.3 de [L-S].*

*Démonstration du théorème.* — Elle est identique à celle du théorème 2.3.1 de [L-S], puisque notre section $\psi_{I*}$ est $(q+k)$ holomorphe en $z$, on a les annulations nécessaires de la preuve du théorème 2.3.1 de [L-S]. La régularité intérieure provient de la régularité du noyau $R_M$ car pour le noyau $G_M$, on intègre sur $b\omega_\beta$. □

## 3. Finitude du $(n,n-k-q+2)$-ième groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie à support compact

Dans cette partie, nous allons établir un résultat de finitude de la dimension du $(n,n-k-q+2)$-ième groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie à support compact dans $M$.

Commençons d'abord par définir quelques notions qui vont nous aider à établir le résultat.

DÉFINITION 3.1. — *Une configuration affine $q$-convexe pour $M$ est la donnée d'une collection ordonnée $[U,D,\psi,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$ ;*

- *$U$ est un convexe de $\mathbb{C}^n$ (biholomorphe normalement à un convexe de $\mathbb{C}^n$).*
- *$\psi,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}$ sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^2$ définies sur $U$ telles que :*
  - *i) $D=\{z\in U \mid \psi(z)<0\}$ et $d\psi(z)\neq 0$ pour $z\in\partial D$.*
  - *ii) Pour $I=(i_1,\dots,i_k)\in\mathfrak{I}(k)$, les fonctions $\{\rho_{i_1},\dots,\rho_{i_k}\}$ sont des fonctions définissantes de $M$ sur $U$.*
  - *iii) $\overline{\partial}\rho_{i_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\rho_{i_k}\neq 0$ sur $U$.*
  - *iv) Si on note $\Omega_\nu=\{z\in U \mid \rho_\nu(z)<0\}$, $\nu\in\{\pm1,\dots,\pm k\}=:J$, $M\cap U=\bigcap\limits_{j\in J}\overline{\Omega}_\nu$, $U\setminus M=\bigcup\limits_{j\in J}\Omega_\nu$, $U=\bigcup\limits_{j\in J}\overline{\Omega}_\nu$.*
  - *v) Pour $i_1,\dots,i_\ell$, $\ell\leqslant k$, $i_j\in J$ tels que $|i_j|\neq|i_h|$ si $h\neq j$, $d\psi(z)\wedge d\rho_{i_1}(z)\wedge\cdots\wedge d\rho_{i_\ell}(z)\neq 0$ sur $\{z\in U \mid \psi(z)=\rho_{i_1}(z)=\cdots=\rho_{i_\ell}(z)=0\}$.*
  - *vi) Pour tout $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ un élément d'un $k$-simplexe, la forme de Lévi $\mathscr{L}^X(\lambda_0\psi+\lambda_1\rho_{i_1}+\cdots+\lambda_k\rho_{i_k})$ admet au moins $(q+k)$ valeurs propres strictement positives en tout point de $U$.*

*Remarque.* — D'après le théorème 2.3.1, on a une formule d'homotopie pour les formes différentielles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overline{D}_\beta\cap M$ (pour $\beta>0$) qui sont de bidegrés $(n,s)$ avec $n-k-q+1\leqslant s\leqslant n-k$.

DÉFINITION 3.2.

*1) Une bosse $q$-convexe pour $M$ est une collection ordonnée $[U_1,U_2,D_1,D_2,\psi_1,\psi_2,\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$ telle que*

- *$U_1\subset\subset U_2$ sont des ouverts relativement compact dans $X$ et $U_2$ est biholomorphe à un domaine relativement compact de $\mathbb{C}^n$,*
- *$[U_2,D_i,\psi_i,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$, $i=1,2$ est une configuration affine $q$-convexe pour $M$.*
- *$D_1\subset D_2$ avec $D_2\setminus D_1\subset\subset U_1$ et $D_1\not\subset U_1$.*

*Remarque.* — Si $u\in C^0_{n,r}(\overline{D_i\cap U_2}\cap M)$, $i=1,2$ avec $du=0$, soit $\beta>0$ et $D_{\beta_i}$ un domaine à bord lisse obtenu par les fonctions $\max_\beta$ de [He-Le] et qui approxime $D_i\cap U_2$, alors d'après la formule d'homotopie du paragraphe 2, $T_r u\in C^{1/2}_{n,r-1}(D_{\beta_i}\cap M)$ et est solution de $\overline{\partial}_b v=u$ sur $D_{\beta_i}\cap M$.

*2) On dit que $[\theta_1,\theta_2,V]$ est un élément d'extension $q$-convexe dans $M$, si $\theta_1$, $\theta_2$ sont des domaines de $M$ à bord $\mathscr{C}^2$ et $V$ est un ouvert relativement compact dans $M$ tels que :*

- $\theta_1 \subseteq \theta_2$ ;
- $\theta_2 \setminus \theta_1 \subset\subset V$ ;
- *il existe une bosse $q$-convexe $[U_1,U_2,D_1,D_2,\psi_1,\psi_2,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$ telle que : $V = M \cap U_2$ et pour $i = 1,2$ ; $\theta_i \cap V = \{z \in V \mid \psi_i(z) < 0\} = D_i \cap V$.*

*3) On dit que $\theta_2$ peut-être obtenu de $\theta_1$ par un élément d'extension $q$-convexe dans $M$, s'il existe $V$ dans $M$, tel que $[\theta_1,\theta_2,V]$ est un élément d'extension $q$-convexe dans $M$.*

Théorème 3.3 (Th. 4.1.4 de [R]). — *Soit $M$ une sous-variété* CR *générique $q$-concave de codimension $k$ d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. Soit $[D,G]$ une extension $q$-convexe stricte dans $M$ et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\overline{G \setminus D}$ par des ouverts de $M$. Alors, il existe des ouverts de $M$ ; $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_N$, $V_0,V_1,\dots,V_{N-1}$ tels que :*

- $\theta_0 = D$ *et* $\theta_N = G$ ;
- *Pour tout $i \in \{0,1,\dots,N-1\}$, $[\theta_i,\theta_{i+1},V_i]$ est un élément d'extension $q$-convexe dans $M$ ;*
- *Pour tout $i \in \{0,\dots,N-1\}$, il existe $j_0 \in I$, tel que $V_i \subset\subset U_{j_0}$.*

On peut maintenant établir le théorème de finitude.

Théorème 3.4. — *Soit $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$, $M \subset X$ une sous-variété de $X$. On suppose :*

- *$M$ est une variété* CR *générique de codimension $k$ ;*
- *$M$ est $q$-concave à l'infini.*

*Alors* $\dim H^{n,n-k-q+2}_{0,c}(M) < +\infty$.

Pour faire la preuve du théorème, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 3.5. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$ et $M$ une sous-variété* CR *générique de $X$ de codimension $k$. On suppose que $M$ est $q$-concave, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$. Soit $\psi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $M$, $(q+k)$-convexe telle que : si $a := \inf_{\xi\in M}\psi(\xi)$ et $b :=$ $\sup_{\xi\in M}\psi(\xi)$, alors pour tout $\alpha,\gamma \in ]a,b[$, l'ensemble $\{\alpha \leqslant \psi \leqslant \gamma\}$ est compact , alors pour tout $\alpha,\gamma \in ]a,b[$, $\alpha < \gamma$ et tout $\delta > 0$, on a l'assertion suivante : il existe un opérateur linéaire et continu*

$$T^\alpha_{n-q-k+2} : Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\alpha \leqslant \psi\};M) \to C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(\{\alpha-\delta \leqslant \psi \leqslant \gamma+\delta\};M)$$

*tel que $\overline{\partial}_b T^\alpha_{n-k-q+2} f = f$ sur $\{\psi < \gamma\}$, pour toute forme différentielle $f$ appartenant à $Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\alpha \leqslant \psi\};M)$.*

*Démonstration du lemme.* — Soit $f \in Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\alpha \leqslant \psi\};M)$, posons $\Omega_\alpha = \{\psi < \alpha\}$.

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in ]a,b[$ et $\delta' > 0$ tel que $\gamma + \delta' < b$, il existe un opérateur linéaire et continu $T_N : Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\alpha \leqslant \psi < \gamma+\delta'\};M) \to$

$C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(\{\psi \leqslant \gamma+\delta'\})$ tel que $\overline{\partial}_b T_N f = f$ sur $\{\psi < \gamma+\delta'\}$. En effet, soit $\chi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $M$ à support compact dans $\{\psi < \gamma+\delta'\}$ et qui vaut 1 dans $(\{\alpha-\delta \leqslant \psi \leqslant \gamma\})$. Alors $u = \chi T_N(f)$ convient.

Soient $\gamma \in ]a,b[$ et $\delta' > 0$ tel que $\gamma+\delta' < b$. $\Omega_{\gamma+\delta'}$ est une extension $q$-convexe stricte de $\Omega_{\alpha-\frac{\delta}{2}}$. D'après le théorème 4.1.4 de [R], il existe $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_N,V_0,V_1,\dots,V_{N-1}$ des ouverts de $M$ tels que $\theta_0 = \Omega_{\alpha-\frac{\delta}{2}}$, $\theta_N = \Omega_{\gamma+\delta'}$ et $[\theta_i,\theta_{i+1},V_i]$, $i = 0,\dots,N-1$ est un élément d'extension $q$-convexe. $f \equiv 0$ sur $\Omega_\alpha$, donc il existe $u_0 = T_0(f) = 0$ sur $\overline{\theta}_0$ telle que $du_0 = f$ sur $\theta_0$. Nous allons montrer que $f$ est $\overline{\partial}_b$-exacte sur $\theta_1$.

Puisque $[\theta_0,\theta_1,V_0]$ est un élément d'extension $q$-convexe, il existe une bosse $q$-convexe $[V,U,D_0,D_1,\psi_0,\psi_1,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$ telle que $[U,D_i,\psi_i,\rho_1,\dots,\rho_k,\rho_{-1},\dots,\rho_{-k}]$ est une configuration affine $q$-convexe, $i = 0,1$.

Soit $\beta > 0$, $D_{i\beta}$, $i = 0,1$ un domaine à bord lisse qui approxime $D_i$. Puisque la formule d'homotopie marche pour des formes différentielles définies jusqu'au bord, on a besoin pour pouvoir répéter le processus d'avoir une solution $u_1$ de $\overline{\partial}_b u = f$ sur $\theta_1$ définie sur $\overline{\theta}_1$.

Considérons $\widetilde{D}_1 \supset\supset D_{1\beta}$ et $\widetilde{V} \supset\supset V$ des domaines de $X$, tels que $\widetilde{D}_1 \setminus D_0 \subset\subset \widetilde{V}$ et l'on sait résoudre le $\overline{\partial}_b$ sur $\widetilde{D}_1 \cap M$ pour les $(n,r)$ formes différentielles avec $n-k-q+1 \leqslant r \leqslant n-k$. D'après la formule d'homotopie précédente, il existe un opérateur linéaire et continu $\widetilde{T}_1$ de $C^0_{n,n-k-q+2}(\overline{\widetilde{D}_1 \cap M})$ vers $C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(\widetilde{D}_1 \cap M)$ tel que $d\widetilde{T}_1(f) = f$ sur $\widetilde{D}_1 \cap M$ ; $d(\widetilde{T}_1(f) - T_0(f)) = 0$ sur $D_{0\beta} \cap M$ et $\widetilde{T}_1(f) - T_0(f) \in C^0_{n,n-k-q+1}(\overline{D_{0\beta} \cap M})$. D'après la formule d'homotopie, il existe un opérateur linéaire continu $T_{0\beta}$ de $C^0_{n,n-k-q+1}(\overline{D_{0\beta} \cap M})$ vers $C^{1/2}_{n,n-k-q}(D_{0\beta} \cap M)$ tel que $dT_{0\beta}(\widetilde{T}_1 - T_0)(f) = (\widetilde{T}_1 - T_0)(f)$ sur $D_{0\beta} \cap M$.

Soit $\chi_0$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $X$ à support compact dans $\widetilde{V}$ qui vaut 1 sur $\overline{\theta_1 \setminus \theta_0}$.

$$T_0(f) + d(\chi_0(\widetilde{T}_1 - T_0)(f) = \widetilde{T}_1(f) - d((1-\chi_0)(\widetilde{T}_1 - T_0)(f)) \text{ sur } \theta_0 .$$

Posons

$$u_1 = T_1(f) = \begin{cases} T_0(f) + d\left(\chi_0(\widetilde{T}_1 - T_0)(f)\right) & \text{sur } \theta_0 \\ \widetilde{T}_1(f) - d\left((1-\chi_0)(\widetilde{T}_1 - T_0)(f)\right) & \text{sur } \overline{\theta_1 \setminus \theta_0}. \end{cases}$$

Alors $u_1$ convient et est obtenue par un opérateur linéaire continu ; $u_1 = T_0(f)$ en dehors d'un voisinage de $\overline{\theta_1 \setminus \theta_0}$. On reprend le même raisonnement avec $[\theta_1,\theta_2,V_1]$ pour obtenir $u_2 = T_2(f)$ sur $\overline{\theta}_2$ telle que $du_2 = f$ sur $\theta_2$. On continue le processus et au bout de $N$-étapes, on obtient $u_N = T_N(f)$ sur $\overline{\theta}_N$ telle que $du_N = f$ sur $\theta_N$ ; $T_N(f) = T_{N-1}(f)$ en dehors d'un voisinage de $\overline{\theta_N \setminus \theta_{N-1}}$.

Par un choix convenable des voisinages de $\overline{\theta_{j+1} \setminus \theta_j}$, $j = 0,\dots,N-1$, on a $T_N(f) = T_0(f)$ sur $\Omega_{\alpha-\delta}$. □

LEMME 3.6. — *Soient $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$ et $M$ une sous-variété* CR *générique de codimension $k$ de $X$. On suppose que $M$ est $q$-concave à l'infini, $2 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$ et $\varphi$, $\mathscr{C}^\infty$ comme dans la définition 0.2. Soient $\alpha_0,\alpha \in \mathbb{R}$ donnés tels que $\alpha_0 < \alpha < c_\infty$ et $\alpha_0$ est tel que si $\xi \in M$ avec $\varphi(\xi) \geqslant \alpha_0$, alors $\varphi$ est $(q+k)$ concave en $\xi$.*

*Alors pour tout* $\delta > 0$, *il existe des opérateurs linéaires et continus :*

$$T_{n-k-q+2} : Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha\}; M) \longrightarrow C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(\{\varphi \leqslant \alpha+\delta\}; M)$$

*et*

$$K_{n-k-q+2} : Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha\}; M) \longrightarrow Z^{1/2}_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha_0\}; M)$$

*tels que* $\overline{\partial}_b T_{n-k-q+2} f = f + K_{n-k-q+2} f$ *pour toute* $f \in Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha\}; M)$.

*Démonstration du lemme.* — D'après le lemme 3.5 pour $\delta > 0$ suffisamment petit, il existe un opérateur linéaire

$$T^\alpha_{n-k-q+2} : Z^0_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha\}; M) \longrightarrow C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(\{\alpha_0 - \delta < \varphi < \alpha+\delta\}; M)$$

tel que $\overline{\partial}_b T^\alpha_{n-k-q+2} f = f$ sur $\left\{\alpha_0 - \frac{\delta}{2} < \varphi\right\}$.

Soit $U_{\alpha_0}$ un voisinage ouvert dans $M$ de $\{\alpha_0 \leqslant \varphi\}$ contenu dans $\{\alpha_0 - \frac{\delta}{2} \leqslant \varphi\}$. $M \setminus U_{\alpha_0}$ est compact. Soit $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ un recouvrement ouvert fini de $M \setminus U_{\alpha_0}$ par des ouverts pour lesquels on a le théorème 0.1 de [L-S], c'est-à-dire il existe pour chaque $j$ un opérateur linéaire continu $T^j_{n-k-q+2} : Z^0_{n,n-k-q+2}(M) \to C^{1/2}_{n,n-k-q+1}(U_j)$ tel que $\overline{\partial}_b T^j_{n-k-q+2} f = f$ sur $U_j$ pour toute $f \in Z^0_{n,n-k-q+2}(M)$. $(U_{\alpha_0}, (U_j)_{j=1,\dots,N})$ est un recouvrement ouvert fini de $M$. Considérons une partition $(\chi^\alpha, \chi^1, \dots, \chi^N)$ de l'unité relativement au recouvrement $(U_{\alpha_0}, (U_j)_{j=1,\dots,N})$ tel que $\chi^\alpha \equiv 1$ dans un voisinage de $\{\alpha_0 \leqslant \varphi\}$.

On pose

$$T_{n-k-q+2} := \chi^\alpha T^\alpha_{n-k-q+2} + \sum_{j=1}^N \chi^j T^j_{n-k-q+2}$$

et

$$K_{n-k-q+2} := \overline{\partial}_b \chi^\alpha \wedge T^\alpha_{n-k-q+2} + \sum_{j=1}^N \overline{\partial}_b \chi^j \wedge T^j_{n-k-q+2}.$$

Pour $z \notin \{\varphi \leqslant \alpha_0\}$, $\overline{\partial}_b \chi^\alpha, \overline{\partial}_b \chi^j$, $j = 1, \dots, N$ sont nulles, donc $K_{n-k-q+2}$ est à support dans $\{\varphi \leqslant \alpha_0\}$.

$\overline{\partial}_b \chi^j$, $j = \alpha, 1, \dots, N$ est $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $U_j$ et $T^j_{n,n-q+2} f \in C^{1/2}_{n-k-q+1}(U_j)$, donc $\overline{\partial}_b \chi^j \wedge T^j_{n-k-q+2} \in C^{1/2}_{n,n-k-q+2}(M)$. Ainsi $K_{n-k-q+2} \in C^{1/2}_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha_0\}; M)$.

En plus

$$f = \chi^\alpha f + \sum_{j=1}^N \chi^j f = \chi^\alpha \overline{\partial}_b T^\alpha_{n-k-q+2} f + \sum_{j=1}^N \chi^j \overline{\partial}_b T^j_{n-k-q+2} f$$

d'où

$$f = \overline{\partial}_b T_{n-k-q+2} f - \left( \overline{\partial}_b \chi^\alpha \wedge T^\alpha_{n-k-q+2} f + \sum_{j=1}^N \overline{\partial}_b \chi^j \wedge T^j_{n-k-q+2} f \right),$$

et si $\overline{\partial}_b f = 0$

$$\overline{\partial}_b \left( \overline{\partial}_b \chi^\alpha \wedge T^\alpha_{n-k-q+2} f + \sum_{j=1}^N \overline{\partial}_b \chi^j \wedge T^j_{n-k-q+2} f \right)$$
$$= - \left( \overline{\partial}_b \chi^\alpha \wedge f + \sum_{j=1}^N \overline{\partial}_b \chi^j \wedge f \right) = f \wedge \left( \overline{\partial}_b \chi^\alpha + \sum_{j=1}^N \overline{\partial}_b \chi^j \right) = 0$$

car $\chi^\alpha + \sum_{j=1}^N \chi^j = 1$, donc $\overline{\partial}_b \left( \chi^\alpha + \sum_{j=1}^N \chi^j \right) = 0$.

Ainsi $K_{n-k-q+2} f \in Z^{1/2}_{n,n-k-q+2}(\{\varphi \leqslant \alpha_0\}; M)$. □

*Démonstration du théorème.* — cf. la preuve du théorème 2.1 de [L-Le2001]. □

## 4. Théorème de séparation de type Andreotti-Vesentini sur les variétés CR génériques $q$-concaves

On va s'intéresser à la séparation de $H^{0,q-1}_\infty(M)$. Rappelons d'abord quelques définitions et résultats de [L-Le2001].

Définition 4.1. — *Soit $M$ une sous-variété d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. On suppose que $M$ est* CR *générique de codimension réelle $k$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soient $p$, $q$ des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et $0 \leqslant q \leqslant n-k$. L'opérateur $\overline{\partial}_b$ est régulier en bidegré $(p,q)$, si pour tout courant $T$ de bidegré $(p,q-1)$ sur un ouvert $\Omega$ de $M$ et tel que $\overline{\partial}_b T$ soit une $(p,q)$ forme différentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega$, alors il existe une $(p,q-1)$ forme différentielle $u$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega$, telle que $\overline{\partial}_b u = \overline{\partial}_b T$.*

Définition 4.2. — *Soit $M$ une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. On suppose que $M$ est* CR *générique de codimension réelle $k$. Soient $p$, $q$ des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et $0 \leqslant q \leqslant n-k$. On dit que $M$ satisfait à la propriété de la $\mathscr{C}^\ell$ propagation de l'exactitude en bidegré $(p,q)$, si on a l'assertion suivante :*

*Il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de $M$ tels que $K_n \subset\subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et si $\varphi$ est une $(p,q)$ forme différentielle de classe $\mathscr{C}^\ell$ sur $M$, $\overline{\partial}_b \varphi = 0$, qui satisfait $\overline{\partial}_b \psi_n = \varphi$ sur $\overset{\circ}{K}_n$, où $\psi_n$ est une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^\ell$ sur $\overset{\circ}{K}_n$, on peut trouver une forme différentielle $\psi_{n+1}$ de classe $\mathscr{C}^\ell$ sur $\overset{\circ}{K}_{n+1}$, telle que $\overline{\partial}_b \psi_{n+1} = \varphi$ sur $\overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $\psi_{n+1} = \psi_n$ sur $\overset{\circ}{K}_{n-1}$.*

Rappelons enfin ce théorème de [L-Le2001].

Théorème 4.3 (de [L-Le2001]). — *Soit $M$ une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une variété analytique complexe $X$ de dimension $n$. On suppose que $M$ est* CR *générique de codimension $k$. Soient $p$, $q$ des entiers naturels avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et $0 \leqslant q \leqslant n-k$.*

*Supposons que l'opérateur $\overline{\partial}_b$ est régulier en bidegré $(n-p, n-k-q)$ et satisfait à la propriété de la classe $\mathscr{C}^\ell$ propagation de l'exactitude en bidegré $(n-p, n-k-q)$ pour un $\ell \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*

*Considérons les assertions suivantes :*

(i) $E^\ell_{p,q+1}(c;M) = \Big\{ f \in \mathscr{C}^\ell_{p,q+1}(c;M) \mid \langle f, \varphi \rangle = 0,\ \forall \varphi \in Z^\ell_{n-p,n-k-q}(M) \Big\}$ ;

(ii) $H^{p,q+1}_{\ell,c}(M)$ *est séparé ;*

(iii) $E^\infty_{n-p,n-k-q}(M) = \Big\{ \varphi \in \mathscr{C}^\infty_{n-p,n-k-q}(M) \mid \langle \varphi, f \rangle = 0,\ \forall f \in Z^\ell_{p,q}(c;M) \Big\}$ ;

(iv) $H^{n-p,n-k-q}_\infty(M)$ *est séparé ;*

*alors* $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$.

*En plus, si on a* $(i)$ *pour* $\ell = +\infty$, *l'application naturelle de* $H^{n-p,n-k-q}_\infty(M) \to \Big(H^{p,q}_{\infty,c}(M)\Big)'$ *est un isomorphisme algébrique.*

THÉORÈME 4.4. — *Soit $X$ une variété analytique complexe de dimension $n$. $M \subset X$, une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $X$. On suppose :*

- *$M$ est une variété* CR *générique de codimension $k$ ;*
- *$M$ est $q$-concave à l'infini,* $2 \leqslant q \leqslant \frac{n-k}{2}$.

*Alors* $H^{0,q-1}_\infty(M)$ *est séparé.*

*Démonstration.* — On a sous les hypothèses du théorème que $\dim H^{n,n-k-q+2}_{0,c}(M) < +\infty$, donc $H^{n,n-k-q+2}_{0,c}(M)$ est séparé.

Pour faire la preuve du théorème, il suffit d'après le théorème 4.3 de montrer que :

*i)* Le $\overline{\partial}_b$ est régulier en dimension $(0, q-1)$.

*ii)* Le $\overline{\partial}_b$ satisfait à la propriété de la $\mathscr{C}^\infty$ propagation de l'exactitude en bidegré $(0, q-1)$.

L'assertion *i)* provient du lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ pour les petits degrés sur une variété CR générique $q$-concave, de la régularité des fonctions CR et de l'isomorphisme de de Rham-Weil (voir [L-Le99], proposition 5.2).

Le point *ii)* est une conséquence du lemme 4.2.3 et du théorème 4.2.5 de [R].

□

*Remerciements* : Ce travail a été fait alors que je bénéficiais d'une bourse de perfectionnement à la recherche de l'agence universitaire de la Francophonie. Je tiens à remercier le professeur Christine Laurent de l'Institut Fourier d'avoir bien voulu m'accueillir dans le cadre de ce programme.

## Bibliographie

[A-V] ANDREOTTI A., VESENTINI E., *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifold*, Publ. Math. I.H.É.S., **25** (1965), 81–130.

[B-L] Barkatou M.-Y., Laurent-Thiébaut Ch., *Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 593, Grenoble (2003).

[Bo] Boggess A., CR *manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, Studies in advanced Mathematics, 1991.

[H-N] Hill C.D., Nacinovich M., *Pseudoconcave* CR *manifolds*, Complex analysis and geometry eds V. Ancona, E. Ballico, A. Silva, Marcel Dekker, Inc., New York (1996), Preprint Dipartimento di Matematica Università di Pisa, February 1993.

[He] Henkin M. G., *Solution des équations de Cauchy Riemann tangentielles sur les variétés* CR *$q$-concaves*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. , **292** (1981), 27–30.

[He-Le] Henkin M. G., Leiterer J., *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas*, Birkhaüser, 1998.

[L-Le95] Laurent-Thiébaut Ch., Leiterer J., *Andreotti-Grauert Theory on real hypersurfaces*, Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1995.

[L-Le98] Laurent-Thiébaut Ch., Leiterer J., *The Andreotti-Vesentini Separation Theorem and Global Homotopy Representation*, Math. Zeit., **227** (1998), 711–727.

[L-Le99] Laurent-Thiébaut Ch., Leiterer J., *Some Applications of Serre Duality in* CR *manifolds*, Nagoya Math. J., **154** (1999), 141–156.

[L-Le2001] Laurent-Thiébaut Ch., Leiterer J., *An Andreotti-Vesentini Separation Theorem on Real Hypersurfaces*, Annali di Matematica, **180** (2001), 59–70.

[L-S] Laurent-Thiébaut Ch., Shaw Mei-Chi, *Boundary Hölder and $L^p$ estimates for Local Solutions of the Tangential Cauchy-Riemann Equation*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 604, Grenoble (2003).

[R] Ricard H., *Résolution avec régularité jusqu'au bord de l'équation de Cauchy-Riemann dans des domaines à coins et de l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle en codimension quelconque*, Thèse de Doctorat de l'Université de Grenoble I, 2002.

Salomon SAMBOU
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
&
Université C. A. DIOP
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
DAKAR (Sénégal)