Bernard MALGRANGE

Prépublication de l'Institut Fourier n° 636 (2004)

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS INVOLUTIFS

Bernard MALGRANGE
INSTITUT FOURIER, Université de Grenoble I, UMR 5582 CNRS, BP 74,
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 555.
Mots clefs. — truc.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS INVOLUTIFS

Bernard MALGRANGE

Prépublication de l'Institut Fourier n° 636 (2004)

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cet article est la rédaction, promise depuis longtemps, d'un exposé systématique sur « l'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques ». Voici quelques explications.

La théorie des systèmes différentiels en involution a été créée par E. Cartan dans une série d'articles autour de 1900 ; voir notamment [**Ca1**]. Son but est d'obtenir un théorème d'existence tout à fait général pour un système d'équations aux dérivées partielles analytique ; le système est *a priori* quelconque, par exemple surdéterminé, ou même sous-surdéterminé (par rapport à la situation classique du théorème de Cauchy-Kovalevski, on a « trop » d'équations pour certaines fonctions inconnues, et « pas assez » pour d'autres). Cartan exprime sa condition en termes de systèmes différentiels extérieurs ; il appelle « systèmes en involution » ceux qui la vérifient. Ces conditions ont été étendues ultérieurement par Kähler [**Kah**], pour donner finalement ce qu'on appelle maintenant « le théorème de Cartan-Kähler ». Cartan et, à sa suite, de nombreux géomètres différentiels ont utilisé ce théorème dans divers problèmes, au premier rang desquels il faut citer le « problème d'équivalence » des structures différentielles ; pour ce dernier problème, je renvoie notamment à [**Gar**], [**Mo1**] et [**Ol**].

Cependant, pendant longtemps, la signification algébrique de la notion d'involutivité est restée assez mystérieuse, malgré des travaux importants de Janet [**Ja1**], [**Ja2**] et Matsushima [**Mat1**], [**Mat2**]. Dans le même ordre d'idée, je signale aussi les premiers travaux de Kuranishi [**Ku1**], [**Ku2**], dont je reparlerai plus loin. La situation change, après l'introduction par Spencer de méthodes cohomologiques dans les équations aux dérivées partielles ; cf. [**Spe1**], [**Spe2**]. Il faut ici citer notamment les articles de Guillemin-Sternberg [**G-S**], Singer-Sternberg [**S-S**], Quillen [**Qu**], Kuranishi [**Ku3**], Goldschmidt [**Go**] ; à la suite de ces travaux, on aboutit à une autre définition des systèmes en involution (ou « involutifs »), plus claire et maniable ; notamment elle peut être appliquée directement aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, sans passer par l'intermédiaire des systèmes différentiels extérieurs.

Outre les articles [**Ku3**] et [**Qu**] déjà cités (ce dernier se limitant toutefois au cas linéaire), on trouvera cette théorie exposée dans divers livres et articles plus récents [**B-C-G**], [**Gas**], [**Ol**], [**Po1**], [**Po2**], [**Sei**], [**Ya**]. Certains de ces exposés se placent dans le contexte des systèmes différentiels extérieurs, d'autres dans celui des équations aux dérivées partielles ; le lien entre les deux points de vue, souvent implicite, n'apparaît à ma connaissance explicitement que dans [**Ku3**]. Il reste que, à mon sens, en dehors des géomètres différentiels, cette théorie n'est pas aujourd'hui aussi connue qu'elle mériterait de l'être ; ce fait m'a incité à commencer cet article en en donnant une réexposition de plus.

Un problème laissé en suspens par ces articles est le suivant : étant donné un système différentiel qui n'est pas en involution, existe-t-il un moyen de le ramener à un autre qui ait les mêmes solutions et soit en involution ? Cartan, en particulier dans son livre classique [**Ca2**] étudie ce problème, et définit pour cela la notion de « prolongement » d'un système. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, le prolongement s'obtient simplement en dérivant les équations ; dans le cas des systèmes extérieurs, la définition est un peu plus compliquée, mais analogue. Cartan affirme qu'en général, en itérant cette opération, on arrivera à un système en involution (peut-être incompatible). Voici comment il s'exprime à ce propos [**Ca2**, p. 116].

« On voit d'après ce qui précède que, si le système donné n'est pas en involution, on a un moyen régulier d'en déduire une suite de nouveaux systèmes admettant les mêmes solutions que le système donné. On peut démontrer, *sous certaines conditions qu'il n'est du reste pas facile de préciser*, qu'on finira par arriver à un système en involution » (souligné par Cartan).

Cette assertion, assez mystérieuse, est à l'origine d'un certain nombre de travaux ; il faut mentionner avant tout les articles de Kuranishi [**Ku1**], [**Ku2**] où il donne une version précise de cette assertion sous certaines hypothèses de régularité ; je mentionne aussi que, dans le cas des modules gradués sur des anneaux de polynômes (= traduction algébrique des systèmes linéaires à coefficients constants), le résultat est démontré chez Janet [**Ja2**]. Là encore, la version homologique de l'involutivité change les choses : le théorème de Janet devient une conséquence immédiate du théorème de finitude de Hilbert ; quant à Kuranishi, il réobtient très simplement ses résultats dans [**Ku3**], toujours sous des hypothèses de régularité convenables.

Cependant, pour obtenir un résultat général, il faut faire appel à d'autres idées. Or, il se trouve que celles-ci ont été développées de façon tout à fait indépendante dans les années 30 par Ritt, dans ses travaux sur « l'algèbre différentielle » ; je vais en parler maintenant.

Ritt, probablement en cherchant à préciser des idées de Drach sur la théorie de Galois différentielle, se pose le problème d'étudier systématiquement les idéaux définissant des systèmes d'équations aux dérivées partielle algébriques (= polynomiaux) sur $\mathbb{C}$ **[Ri1]**. Le premier résultat qu'il obtient, en collaboration avec Raudenbush est un semi-analogue du théorème de finitude de Hilbert : les suites croissantes d'idéaux différentiels réduits (= égaux à leur racine) sont stationnaires ; il est immédiat d'en déduire que de tels idéaux sont intersections finies d'idéaux premiers.

Ritt en poursuivant son analyse, montre que, génériquement, les jets d'ordre k de solutions se prolongent à l'ordre $k+1$, et même se prolongent en solutions convergentes. Pour ce dernier résultat, il utilise, non la théorie des systèmes en involution, mais la théorie parallèle des « systèmes orthonomes passifs » de Riquier **[Riq]**.

Incidemment, par rapport à la théorie de Cartan, celle de Riquier a les avantages et les inconvénients suivants :

i) La notion de système orthonome passif dépend du système de coordonnées choisies ; mais, dans n'importe quel système de coordonnées, un système differentiel peut être rendu génériquement orthonome passif.

ii) La notion de système en involution est indépendante des coordonnées ; mais les critères effectifs d'involutivité ne sont vérifiés que dans un système de coordonnées générique.

Donc, en gros : pour les calculs effectifs, la théorie de Riquier peut être plus commode ; mais si l'on veut des notions globales sur des variétés, elle est inutilisable, et il faut utiliser les systèmes en involution.

Il est maintenant tentant de se dire ce qui suit : les arguments de Ritt, un peu modifiés, vont montrer que, génériquement (*i.e.* hors d'une hypersurface d'un espace de jets convenable), n'importe quel système algébrique d'équations aux dérivées partielles vérifie les conditions de Kuranishi ; un tel système est alors génériquement involutif lorsqu'on le prolonge à un ordre assez grand. Cela démontrera l'assertion de Cartan, à condition d'interpréter « sous des conditions qu'il n'est pas facile de préciser » comme signifiant « aux points génériques ».

Il est surprenant que les travaux de Ritt, et par voie de conséquence cette idée aient totalement échappé aux géomètres différentiels. Une exception cependant est celle de Pommaret [**Po1**], [**Po2**], qui donne une description des idéaux différentiels premiers en termes d'involutivité générique. À vrai dire, il emploie un argument un peu différent de celui qui est esquissé plus haut. Mais ce dernier pourrait, lui aussi, être aisément mis en forme.

Je n'ai pris connaissance de ce travail de Pommaret qu'assez récemment, et l'article présent en est indépendant. Dans ce travail, je reprends la question, avec les différences suivantes :

i) Je travaille dans une situation analytique, et non algébrique, c'est-à-dire que je pars d'un système différentiel analytique. Comme les dérivations donnent des fonctions polynomiales des dérivées ultérieures, on peut supposer que les équations considérées sont polynomiales par rapport aux dérivées d'ordre ℓ, pour $\ell >> 0$. Un procédé classique de réduction ramène au cas $\ell = 1$ (ce que faisait déjà Ritt dans [**Ri2**], où il donne une version analytique « germique » du théorème de Ritt-Raudenbush).

ii) Je donne des énoncés globaux, pour ce que j'appelle les « D-variétés ». À noter que, pour les applications que j'ai surtout en vue, groupoïdes de Lie et théorie de Galois différentielle, j'ai besoin à la fois de notions globales, et d'admettre des singularités. Dans le cas non-singulier, la notion de D-variété est essentiellement équivalente à des notions développées par différents auteurs depuis les années 80 sous divers noms (« variational bicomplex », « differentiable manifolds », *etc.*), voir [**Ts**], [**Tu**], [**Vi**], [**Zh**].

Ces auteurs développent principalement ces notions à propos de problèmes de calcul des variations ; voir aussi dans [**B-G**] une version en termes de systèmes différentiels extérieurs. Ces notions ont été reprises plus récemment, sous le nom de « diffiétés » par Fliess et ses co-auteurs en vue de problèmes de contrôle (« systèmes plats ») ; voir notamment [**F-L-M-R**].

Je signale aussi que les $\mathcal{F}$-variétés de Buium [**Bu**], $\mathcal{F}$ un corps différentiel, sont proches de la version algébrique des D-variétés ; elles lui servent en particulier pour des problèmes d'arithmétique (conjecture de Mordell sur un corps de fonctions).

Quelques détails maintenant sur l'organisation de cet article. Une première partie, Chapitres I, II, III, est consacrée à une réexposition de la théorie des systèmes involutifs, en se plaçant du point de vue des équations aux dérivées partielles. Il faut y ajouter l'appendice B, qui fait le pont avec le point de vue « systèmes différentiels extérieurs ». Les innovations sont ici uniquement de nature rédactionnelle. J'en signale deux.

D'une part, j'examine en détail les différentes méthodes d'obtention des obstructions au prolongement (souvent appelées « torsion » dans la littérature) ; je les compare et vérifie qu'elles coïncident au signe près.

D'autre part, dans la démonstration de l'existence des solutions convergentes (théorème de Cartan-Kähler), je reprends en la précisant la méthode que j'avais employée dans un article antérieur [**Mal2**], méthode qui sépare complètement les questions de convergence de celles relative à l'existence des prolongements. *A priori*, cette méthode n'était pour moi qu'une curiosité destinée à varier la présentation ; j'ai donc pris connaissance avec surprise et intérêt des travaux récents de Morimoto [**Mo2**], [**Mo3**], où il utilise cette méthode dans un cas où la réduction classique à Cauchy-Kovalevsky ne semble pas s'appliquer. L'inconvénient de cette présentation est, bien sûr, de passer sous silence le « premier théorème de Cartan-Kähler » (dont l'énoncé habituel n'est qu'un corollaire) ; cet énoncé est une remarquable version surdéterminée de Cauchy-Kovalevsky, qui me semble avoir un intérêt théorique par elle-même.

Concernant l'appendice B, j'aimerais faire deux remarques :

i) Je me limite aux systèmes différentiels extérieurs usuels, sans faire la théorie des prolongements. Il est possible d'avoir une notion généralisant un peu les D-variétés en termes de systèmes différentiels extérieurs (en gros, il suffit pour cela de reprendre les constructions de [**B-G**] en y admettant des singularités). Contrairement à mes intentions initiales, j'ai renoncé à ajouter un chapitre sur ce sujet. Après une tentative de rédaction, je l'ai trouvé lourd et sans idée vraiment nouvelle.

ii) Le sujet traité ici se borne, suivant Cartan, à la recherche des germes de solutions convergentes. Le sujet ne doit pas être confondu avec le sujet, bien plus vaste, de l'étude générale des systèmes différentiels extérieurs, de leurs singularités (p. ex. des singularités des feuilletages), de leur comportement global, *etc.*

La partie essentielle de cet article est formée des Chapitres IV et V. Au Chapitre IV, je donne les définitions des D-variétés, et j'énonce les résultats principaux. Ces résultats sont déjà annoncés, en grande partie dans [**Mal4**] et [**Mal5**], mais j'ai repris ici la question à zéro pour la raison suivante : ces deux articles, quoiqu'écrits avant celui-ci, en sont la suite logique, et en utilisent les résultats. Pour éviter tout risque de cercle vicieux, j'ai donc préféré les ignorer dans le cours principal du texte, et ne les mentionner qu'à propos de remarques accessoires. Au Chapitre V, je donne les démonstrations essentielles, théorème de finitude et théorème d'involutivité générique ; ce chapitre est le développement d'une note [**Mal3**] où la méthode suivie ici est esquissée. Enfin, à l'appendice A, je donne les propriétés des « variétés affines au-dessus d'une variété analytique complexe » qui sont utilisées à partir du Chapitre IV. Il s'agit de résultats classiques, et dans le cas algébrique, et dans le cas analytique (Nullstellensatz, cohérence de la racine, *etc.*) ; dans le cas mixte considéré ici, je n'ai pas de référence. Fort heureusement, le théorème de comparaison de Grauert-Remmert permet de se ramener facilement à une situation déjà connue.

Un mot encore : la définition des D-variétés, telle qu'elle est donnée ici, n'est en aucun cas intangible ; d'une part, une définition analogue peut être facilement donnée dans un contexte algébrique sur $\mathbb{C}$, ou sur un corps de caractéristique 0 algébriquement clos. Les mêmes résultats sont vrais, avec des démonstrations plus simples ; par exemple, le théorème de Frisch sur le caractère nœthérien des anneaux de fonctions holomorphes sur un polydisque fermé est simplement remplacé par le théorème de finitude de Hilbert.

D'autre part, dans la situation analytique, il pourrait être commode dans certaines questions de considérer des situations mixtes plus compliquées, *i.e.* des schémas relatifs au-dessus d'une variété $\mathbb{C}$-analytique, au sens de Hakim [**Ha**]. Je me suis contenté du cas affine relatif parce que cette notion générale, assez lourde, n'apportait pas ici de résultats substantiellement nouveaux, et parce que le cas traité suffisait pour les applications que j'ai surtout en vue, à savoir une extension au cas non linéaire de la théorie de Galois différentielle.

Merci, pour terminer, aux nombreux collègues qui m'ont encouragé, et avec qui j'ai eu l'occasion de discuter de ces questions. Parmi eux, je citerai avant tout H. Goldschmidt et M. Kuranishi que je remercie de leur accueil et de leur hospitalité lors de nombreux passages à Columbia. Merci aussi aux collègues du groupe de calcul formel de l'INRIA à Sophia-Antipolis, en particulier à E. Hubert qui m'a introduit aux travaux de Ritt et Kolchin, et à A. Quadrat qui m'a signalé les références à Janet que j'ignorais. Merci enfin à A. Guttin-Lombard pour son travail de saisie toujours aussi impeccable.

CHAPITRE I

MODULES GRADUÉS, INVOLUTIVITÉ

1. Complexe de Koszul

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps *infini*, de caractéristique quelconque ; pour les applications aux équations aux dérivées partielles, dans les chapitres ultérieurs, k sera soit $\mathbb{C}$, soit un corps de fonctions sur $\mathbb{C}$.

Soit n un entier, fixé une fois pour toutes ; on pose $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, et on note $A_\ell \subset A$ l'espace des polynômes homogènes de degré ℓ ; on pose aussi $A_1 = V$.

Soit M un A-module (unitaire). Rappelons la définition du *complexe de Koszul* $K.(\xi_1, \ldots, \xi_n\ ; M)$ ou, en abrégé $K.(\underline{\xi}\ ; M)$ ([**Bo1**], [**Se**]) : on prend $K_p(\underline{\xi}, M) = \Lambda^p V \otimes M$, le produit tensoriel étant pris sur k ; avec les conventions usuelles, on a donc $K_p = 0$ pour $p \notin [0, n]$; la différentielle d est k-linéaire, et définie par la formule suivante, où le signe $\widehat{\ }$ désigne, comme d'habitude, que le terme correspondant doit être omis

$$d\left(\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes m\right) = \sum (-1)^{j+1} \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\xi_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes \xi_{i_j} m \ . \tag{1.1}$$

On vérifie immédiatement qu'on a $d^2 = 0$. Les groupes d'homologie correspondants sont notés $H_p(\underline{\xi}, M)$.

Exemple 1.2. — *i)* Si $n = 1$, le complexe $K(\xi_1\ ; M)$ est $0 \to M \xrightarrow{\xi_1} M \to 0$; donc $H_1(\xi_1\ ; M) = \ker \xi_1$; $H_0(\xi_1, M) = \operatorname{coker} \xi_1$.

ii) $H_n(\xi\ ; M) = \{m \in M \mid \xi_1 m = \cdots = \xi_n m = 0\}$.

iii) $H_0(\underline{\xi}\ ; M) = M / \sum \xi_i M$.

On écrira aussi le second membre $M/(\xi_1, \ldots, \xi_n)M$.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates :

1.3. — $K.(\underline{\xi}\ ; M)$ « ne dépend pas de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ », mais seulement de V ; *i.e.* si l'on a une autre base $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de V, $K.(\underline{\xi}\ ; M)$ est canoniquement isomorphe à $K(\underline{\eta}\ ; M)$;

Cela résulte de la formule suivante : si l'on a $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V$, alors

$$d\,(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m) = \sum (-1)^{j+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha}_j \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes \alpha_j m\ .$$

(*Démonstration* : développer les α_j en fonction des ξ_i.)

1.4. — Une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne naissance à une suite exacte longue

$$H_{p+1}(\underline{\xi}\ ; M'') \xrightarrow{\delta} H_p(\underline{\xi}, M') \longrightarrow H_p(\xi, M) \to H_p(\xi, M'') \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Ceci est un cas particulier de la suite exacte de cohomologie (voir n'importe quel traité d'algèbre homologique) ; la flèche δ est définie ainsi : si l'on a $m'' \in \Lambda^{p+1} V \otimes M''$, avec $dm'' = 0$, on relève m'' en $m \in \Lambda^{p+1} V \otimes M$; dm est à valeurs dans $\Lambda^p V \otimes M'$ et c'est un cycle dont la classe dans $H_p(\xi, M')$ est indépendante de m ; par définition, cette classe est $\delta m''$.

Faisons maintenant agir A sur $K.(\underline{\xi}\ ; M)$ par $a(\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes m) = \xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_p} \otimes am$; on a le résultat suivant :

Proposition 1.5. — *Pour tous p et i, on a $\xi_i H_p(\underline{\xi}\ ; M) = 0$.*

Supposons par exemple $i = 1$; on définit un « opérateur d'homotopie » $\ell : \Lambda^p V \otimes M \to \Lambda^{p+1} V \otimes M$ par $\ell(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m) = \xi_1 \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \otimes m$. On vérifie qu'on a, pour $m \in \Lambda^p V \otimes M$: $\xi_1 m = d\ell m + \ell dm$; si donc m est un cycle, on a $dm = 0$ et $\xi_1 m = d\ell m$.

Corollaire 1.6. — *Si M est de type fini sur A, les $H_p(\underline{\xi}\ ; M)$ sont de type fini sur k.*

Du fait que A est nœthérien, on déduit immédiatement que les $H_p(\xi, M)$ sont de type fini sur A ; par la proposition précédente, ils sont donc de type fini sur $A/(\xi_1, \ldots, \xi_n) = k$.

La proposition qui suit est un peu moins évidente :

Proposition 1.7. — *Il existe une suite exacte* $\cdots \to H_p(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \xrightarrow{\xi_1} H_p(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \to H_p(\xi_1, \ldots, \xi_n\ ; M) \to H_{p-1}(\xi_2, \ldots, \xi_n\ ; M) \xrightarrow{\xi_1} \cdots$

Pour établir cette proposition, considérons le complexe double $K.(\xi_1\ ; K.(\xi_2, \ldots, \xi_n ; M))$; ce complexe se décrit ainsi : on pose $V' = k\xi_1$, qu'on identifie à k, et $V'' = k\xi_2 \oplus \cdots \oplus k\xi_n$; la première différentielle est identifiée à ξ_1 ; la seconde est notée d''

$$\begin{array}{ccc} (V') \otimes \Lambda^q V'' \otimes M & \xrightarrow{d''} & (V') \otimes \Lambda^{q-1} V'' \otimes M \\ {\scriptstyle \xi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \xi_1}\big\downarrow \\ \Lambda^q V'' \otimes M & \xrightarrow{d''} & \Lambda^{q-1} V'' \otimes M \end{array}$$

le complexe simple associé est donc, en degré p, $\Lambda^{p-1}V'' \otimes M \oplus \Lambda^p V'' \otimes M$, avec la différentielle $\left(\begin{smallmatrix} -d'' & 0 \\ \xi_1 & d'' \end{smallmatrix}\right)$.

En identifiant $\Lambda^{p-1}V'' \oplus \Lambda^p V''$ à $\Lambda^p V$ par $(\alpha, \beta) \longmapsto \xi_1 \wedge \alpha + \beta$ on vérifie que le complexe simple considéré n'est autre que $K.(\xi_1, \dots, \xi_n\ ; M)$. D'autre part, les éléments de ce complexe simple dont la première composante est nulle forment un sous-complexe, égal à $K.(\xi_2, \dots, \xi_n\ ; M)$; le quotient est égal à $K.(\xi_2, \dots, \xi_n\ ; M)[1]$ (*i.e.* le complexe décalé de un vers la gauche, avec la différentielle $-d''$). La suite exacte de cohomologie donne alors la suite exacte cherchée ; pour achever la démonstration il suffit d'identifier à ξ_1 l'homomorphisme de liaison de cette suite exacte (les autres flèches sont évidentes). Ceci peut être laissé en exercice au lecteur.

2. Cas des modules gradués

On rappelle qu'un A-module M est dit *gradué* si l'on a une décomposition en somme directe $M = \oplus M_\ell$, avec $A_\ell M_q \subset M_{\ell+q}$; on ne considérera ici que des graduations positives ; ou bien, ce qui revient au même, on conviendra que $M_\ell = 0$ pour $\ell < 0$.

Pour $r \in \mathbb{Z}$, on définit le module décalé $M(r)$ par $M(r)_\ell = M_{r+\ell}$ si $\ell \geq 0$, $M(r)_\ell = 0$ sinon. Faire attention que, si l'on a $r > 0$, dans $M(r)$ on « perd » $M_0, \dots, M_{r-1}$. Donc, en général, on n'aura pas $M(r)(s) = M(r+s)$; ceci sera seulement vrai en degrés assez grands.

Dans la suite, les modules gradués seront toujours *supposés de type fini* ; prenons des générateurs m_i, $1 \leq i \leq p$ qu'on peut supposer homogènes de degré r_i (sinon, on les remplace par leurs composantes homogènes) ; considérant l'application $(a_1, \dots, a_p) \mapsto \sum a_i m_i$, on voit ceci : *$M$ gradué, est de type fini si et seulement s'il est un quotient de $\oplus A(-r_i)$, avec $r_i \geq 0$.*

Considérons le complexe de Koszul $K.(\underline{\xi}\ ; M)$; la différentielle d est homogène de degré $+1$ pour la graduation, donc $K.(\underline{\xi}\ ; M)$ est somme directe de complexes $0 \to \Lambda^n V \otimes M_q \to \Lambda^{n-1} V \otimes M_{q+1} \to \cdots \to M_{q+n} \to 0$.

La partie homogène de degré q de $H_p(\underline{\xi}, M)$, *i.e.* celle qui provient des cycles de $\Lambda^p V \otimes M_q$ sera notée $H_{p,q}(\underline{\xi}, M)$ [ou $H_{p,q}(M)$ si aucune confusion n'est possible].

Les suites exactes 1.4 et 1.7 se lisent ici ainsi

2.1. — Si l'on a une suite exacte de A-modules-gradués $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, on a des suites exactes longues

$$H_{p+1,q-1}(M'') \xrightarrow{\delta} H_{p,q}(M') \longrightarrow H_{p,q}(M) \longrightarrow H_{p,q}(M'') \longrightarrow \cdots$$

2.2. — Pour M gradué, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} H_{p,q-1}(\xi_2, \dots, \xi_n; M) &\xrightarrow{\xi_1} H_{p,q}(\xi_2, \dots, \xi_n; M) \\ &\longrightarrow H_{p,q}(\xi_1, \dots, \xi_n, M) \longrightarrow H_{p-1,q}(\xi_2, \dots, \xi_n; M) \xrightarrow{\xi_1} \cdots \end{aligned}$$

Les cas particuliers $p = 0$ et $p = 1$ s'interprètent ainsi

2.3. — *Si $H_{0,q}(M) = 0$ pour $q \geq \ell$, alors M est engendré par $M_0, \dots, M_{\ell-1}$ et réciproquement.*

En effet $H_{0,q}(M) = M_q/(\xi_1, \dots, \xi_n)M_{q-1}$.

2.4. — On vérifie facilement qu'on a $H_{p,q}(A) = 0$ pour tous p, q sauf $p = 0$, $q = 0$.

Soit alors M un module gradué engendré par ses éléments de degré 0 (ce sera en pratique le cas dans les applications) ; si $r = \dim_k M_0$, on a alors une suite exacte de modules gradués $0 \to N \to A^r \to M \to 0$; en prenant les suites exactes de cohomologie, on trouve, pour $(p, q) \neq (0, 0)$ et $(-1, +1)$ des isomorphismes $H_{p+1,q-1}(M) \xrightarrow{\sim} H_{p,q}(N)$; en particulier, on a le résultat suivant : $H_{1,q}(M) = 0$ pour $q \geq \ell$ $(\ell \geq 0)$ *équivaut à : $H_{0,q+1}(N) = 0$, i.e. au fait que N est engendré par ses éléments de degré $\leq \ell$.*

Voici maintenant les résultats principaux de ce paragraphe :

Théorème et Définition *2.5.* — *Pour M, A-module gradué (de type fini, comme toujours), il existe $\ell \geq 1$ tel qu'on ait $H_{p,q}(M) = 0$ pour tout p et pour $q \geq \ell$. On dit alors que M est ℓ-involutif (si $\ell = 1$, on dit simplement « involutif »).*

Ceci résulte immédiatement de 1.6.

Suivant Mumford ([**Mu**], [**B-M**]), les géomètres algébristes disent « ℓ-régularité » pour « ℓ-involutivité » [la définition de Mumford est un peu différente, et se réfère au faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_k^{n-1}$ défini par M ; il est cependant facile de voir que les deux définitions sont équivalentes : voir par exemple [**B-C-G**] ou comparer la définition 3.2, *i)* de [**B-M**] avec la proposition 5.7 ci-dessous]. J'ai gardé la terminologie traditionnelle des géomètres différentiels, à la suite d'E. Cartan.

La définition de l'involutivité adoptée ici n'est pas non plus celle d'E. Cartan. En fait, la condition $(*)_q$ qui intervient ci-dessous est due à Matsushima ([**Mat1**], [**Mat2**]) (sous une forme équivalente, en termes d'équations aux dérivées partielles). Le théorème ci-dessous montre l'équivalence de la condition de Matsushima avec la définition adoptée ici. Son équivalence avec la définition de Cartan sera vue ultérieurement.

Théorème 2.6 **(Guillemin-Serre-Sternberg), [G-S] ou [B-C-G])**
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *M est ℓ-involutif.*
2. *Il existe une base $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de V, possédant pour tout $q \geq \ell$, la propriété suivante :*

   $(*)_q$ *Pour $i = 1, \ldots, n$, l'application*
$$\eta_i : M_q/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{q-1} \to M_{q+1}/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_q$$
   est injective ; de plus, $M_q/(\eta_1, \ldots, \eta_n)M_{q-1} = 0$.

Il sera commode d'employer la terminologie suivante : une suite $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ de vecteurs indépendants de V sera dit ℓ-régulière si les conditions intervenant dans $(*)_q$ sont satisfaites pour $i = 1, \ldots, r$ et pour $q \geq \ell$. D'autre part, il sera aussi commode de se ramener au cas $\ell = 1$ en remplaçant M par $M(\ell - 1)$. On écrira alors $M_+ = \bigoplus_{q>0} M_q$ et on définira de même $H_p(M)_+$.

Lemme 2.7. — *Supposons η_1 1-régulier. Alors, pour tout p, on a une suite exacte $0 \to H_p(M)_+ \to H_p(M/\eta_1 M)_+ \to H_{p-1}(M)_+ \to 0$.*

Soient en effet respectivement K et Q le noyau et l'image de $\eta_1 : M \to M$, munis des graduations induites par M. La suite exacte $0 \to K \to M \to Q(1) \to 0$ donne une suite exacte
$$H_{p,q}(K) \longrightarrow H_{p,q}(M) \longrightarrow H_{p,q+1}(Q) \xrightarrow{\delta} H_{p-1,q+1}(K)\ .$$
Par hypothèse, $K_+ = 0$; donc la flèche $H_{p,q}(M) \to H_{p,q+1}(Q)$ est surjective pour $q = 0$ et bijective pour $q \geq 1$.

On considère ensuite la suite exacte $0 \to Q \to M \to M/\eta_1 M \to 0$, et la suite exacte de cohomologie correspondante
$$H_{p,q}(Q) \longrightarrow H_{p,q}(M) \longrightarrow H_{p,q}(M/\eta_1 M) \xrightarrow{\delta} H_{p-1,q+1}(Q) \longrightarrow H_{p-1,q+1}(M)\ .$$

Alors, pour $q \geq 1$, la première flèche peut être remplacée par $H_{p,q-1}(M) \to H_{p,q}(M)$, et la dernière par $H_{p-1,q}(M) \to H_{p-1,q+1}(M)$, on vérifie que ces flèches sont égales à la multiplication par η_1 ; d'après 1.5, elles sont donc nulles ; d'où le résultat.

Lemme 2.8. — *Les hypothèses suivantes sont équivalentes :*

1) $H_n(M)_+ = 0$.
2) *Il existe* $\eta \in V$ *1-régulier.*
3) *Presque tout* $\eta \in V$ *est 1-régulier.*

(Presque tous = tous sauf ceux qui sont contenus dans une réunion finie d'hyperplans de V).

3) $\Rightarrow$ 2) est trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). $H_n(M)_+ = 0$ signifie que les m annulés par $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont dans M_0 ; ceci est évidemment conséquence de 2).

1) $\Rightarrow$ 3). Soit P un supplémentaire dans M_0 de $\mathrm{Ann}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Le sous-module $P \oplus M_+ = M'$ de M n'a pas d'éléments annulés par $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Donc, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier associé à M' (cf. [**Bo2**] ou[**Se**]), on a $\mathfrak{P} \not\supset V$; en choisissant η n'appartenant à aucun des $\mathfrak{P} \cap V$, η est injectif sur M' (l'existence d'un tel η résulte de l'hypothèse « k infini »).

Démonstration du théorème 2.6. — On va démontrer par récurrence les équivalences suivantes :

i) $H_n(M)_+ = \cdots = H_{n-p+1}(M)_+ = 0, \quad (p = 1, \ldots, n)$.

ii) Il existe une suite $(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ 1-régulière.

iii) Presque toute suite $(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ est 1-régulière.

Ceci donnera le théorème, compte-tenu de l'équivalence triviale $H_0(M)_+ = 0 \Leftrightarrow M_q/(\xi_1, \ldots, \xi_n)M_{q-1} = 0$, $q \geq 1$.

(« Presque toute suite » signifie ici : η_1 est hors d'une réunion finie d'hyperplans de V, η_2 hors d'une réunion finie d'hyperplans de V dépendant de η_1, *etc.*)

ii) $\Rightarrow$ *i)* En appliquant l'hypothèse de récurrence à $M/\eta_1 M$ et à la suite 1-régulière $(\eta_2, \ldots, \eta_p)$, on trouve qu'on a

$$H_n(M/\eta_1 M)_+ = \cdots = H_{n-p+2}(M/\eta_1 M)_+ = 0 \, .$$

D'autre part, on a $H_n(M)_+ = 0$ par 2.8. Alors le lemme 2.7 donne le résultat voulu.

i) $\Rightarrow$ *iii)* On renverse le raisonnement : comme $H_n(M)_+ = 0$, presque tout η_1 est 1-régulier ; alors, le lemme 2.7 montre qu'on a

$$H_n(M/\eta_1 M)_+ = \cdots = H_{n-p+2}(M/\eta_1 M)_+ = 0\ .$$

Par hypothèse de récurrence, presque toute suite $(\eta_2, \ldots, \eta_p)$ est 1-régulière pour $M/\eta_1 M$; en particulier, on pourra choisir $(\eta_2, \ldots, \eta_p)$ linéairement indépendant de η_1 ; alors la suite $(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ est 1-régulière pour M. $\square$

Remarque 2.9. — En fait, le raisonnement précédent montre plus : disons que $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est strictement 1-régulière si cette suite est régulière et si, de plus $\operatorname{ann}(\eta_1; M) = \operatorname{ann}(\eta_1, \ldots, \eta_n; M)$; $\operatorname{ann}(\eta_2; M/\eta_1 M) = \operatorname{ann}(\eta_2, \ldots, \eta_n ; M/\eta_1 M)$, *etc.*

Les raisonnements précédents montrent que, si M est 1-involutif, presque toute suite $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est strictement 1-régulière. En fait, nous verrons un peu plus loin que *toute* suite 1-régulière est strictement 1-régulière.

On peut aussi se demander si les suites 1-régulières forment un ouvert de Zariski dans les bases de V ; cela pourrait sans doute se déduire des résultats précédents, mais nous verrons au prochain paragraphe par une autre méthode que tel est bien le cas.

3. Critères effectifs d'involutivité

Sous la forme donnée ici, le théorème qui suit est dû à Quillen [**Qu**],[**B-C-G**] ; voir aussi [**B-S**]. Auparavant, et avant que le théorème 2.6 ne soit connu, Janet avait en substance démontré le résultat suivant : les hypothèses du théorème pour ℓ entraînent le même résultat pour $\ell' \geq \ell + 1$ ([**Ja1**], [**Ja2**] ; voir aussi Matsushima ([**Mat1**], [**Mat2**]).

Théorème 3.1. — *Soit M gradué sur A ; on suppose qu'on a $H_{0,q}(M) = H_{1,q}(M) = 0$ pour $q \geq \ell$. On suppose d'autre part qu'il existe une base $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de V telle que, pour $1 \leq i \leq n$,*

$$\eta_i : M_\ell/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{\ell-1} \longrightarrow M_{\ell+1}/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_\ell$$

soit injectif. Alors M est ℓ-involutif, et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est ℓ-régulier.

En pratique, où l'on sera dans les conditions 2.4 (on a une suite exacte graduée $0 \to N \to A^r \to M \to 0$, avec N engendré par ses éléments de degré $\leq \ell$), les deux premières hypothèses du théorème seront satisfaites. La dernière donne alors un critère effectif d'involutivité.

Démonstration. — Je vais donner une démonstration un peu différente de celle de Quillen, démonstration qui sera réutilisée au Chapitre II. Posons $A' = \mathbb{C}[\eta_2, \ldots, \eta_n] = A/\eta_1 A$ et $M' = M/\eta_1 M$; on a une suite exacte $0 \to N' \to A'^p \to M' \to 0$ avec $N' = N + \eta_1 A^p/\eta_1 A^p$. Par suite N' est engendré par ses éléments de degré $\leq \ell$, et M' satisfait les hypothèses de la proposition pour la suite $(\eta_2, \ldots, \eta_n)$; par récurrence sur n, on peut supposer que $(\eta_2, \ldots, \eta_n)$ est ℓ-involutif pour M'. Par suite, il suffit de prouver le résultat suivant : pour $m \geq \ell + 1$, $\eta_1 : M_m \to M_{m+1}$ est injectif; par récurrence sur m, il suffit de prouver le résultat pour $m = \ell + 1$.

L'injectivité de $\eta_1 : M_\ell \to M_{\ell+1}$ signifie qu'on a $\eta_1 A^p_\ell \cap N_{\ell+1} = \eta_1 N_\ell$ et il s'agit de démontrer le même résultat avec ℓ remplacé par $\ell + 1$.

Pour cela, notons H' l'homologie de Koszul par rapport à $(\eta_2, \ldots, \eta_n)$, et donnons d'abord qu'on a $H'_{1,\ell+1}(N') = 0$; en effet, en prenant la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte $0 \to N' \to A'^p \to M' \to 0$, et en faisant attention aux degrés, on trouve une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H'_{2,\ell}(M') \longrightarrow H'_{1,\ell+1}(N') \longrightarrow H'_{1,\ell+1}(A'^p) \longrightarrow \cdots$$

Le premier terme s'annule par l'hypothèse de récurrence et le théorème 2.6, et le dernier s'annule par 2.4 ; d'où le résultat.

Prenons maintenant $\alpha \in \eta_1 A^p_{\ell+1} \cap N_{\ell+2}$; on a $\alpha = \eta_1\beta = \Sigma\eta_i\gamma_i$, $\gamma_i \in N_{\ell+1}$, $\beta \in A^p_{\ell+1}$; notant $\overline{\gamma}_i$ $(i \geq 2)$ la classe de γ_i dans $N'_{\ell+1}$, on a $\Sigma'\eta_i\overline{\gamma}_i = 0$ $(\Sigma' = \sum_{t\geq 2})$. Le résultat démontré ci-dessus nous donne des $\overline{\delta}_{ij} \in N'_\ell$, $\overline{\delta}_{ij} = -\overline{\delta}_{ji}$ $(2 \leq i, j \leq n)$ avec $\overline{\gamma}_i = \Sigma'\eta_j\overline{\delta_{ij}}$. En relevant les $\overline{\delta}_{ij}$ en des $\delta_{ij} \in N_\ell$, avec $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$, on a $\gamma_i = \Sigma'\eta_j\delta_{ij} + \eta_1\delta_i$; l'hypothèse $\eta_1 A^\ell_p \cap N_{\ell+1} = N_\ell$ donne $\delta_i \in N_\ell$. Finalement, on a $\alpha = \eta_1\beta = \eta_1\gamma_1 + \Sigma\eta_i\eta_1\delta_i$, avec $\gamma_1 \in N_{\ell+1}$, $\delta_i \in N_\ell$; donc on a $\beta = \gamma_1 + \Sigma\eta_i\delta_i \in N_{\ell+1}$; ceci achève la démonstration. □

Prenons maintenant un A-module gradué M, et une base quelconque $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de V ; écrivons les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \ker\eta_i \longrightarrow & M_\ell/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{\ell-1} \\ & \longrightarrow M_{\ell+1}/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_\ell \longrightarrow M_{\ell+1}/(\eta_1, \ldots, \eta_i)M_\ell \longrightarrow 0 \ . \end{aligned}$$

En écrivant que la somme alternée des dimensions est nulle, et en faisant la somme de ces égalités pour $i = 1, \ldots, n$, on trouve l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \sum \dim\ker\eta_i + \dim M_{\ell+1} \\ & = \sum_i \dim M_\ell/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{\ell-1} + \dim M_{\ell+1}/(\eta_1, \ldots, \eta_n)M_\ell \ . \end{aligned}$$

De là, et du théorème 3.1, on déduit le résultat qui suit.

***Théorème 3.3* (« Critère de Cartan »).** — *Soit M gradué sur A, avec $H_{0,q}(M) = H_{1,q}(M) = 0$ pour $q \geq \ell$. Soit $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ une base de V ; alors*
1) $\dim M_{\ell+1} \leq \sum\limits_i \dim M_\ell/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M_{\ell-1}$.
2) *On a l'égalité si et seulement si la suite $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ est ℓ-régulière.*

Introduisons maintenant, suivant Cartan, les « caractères » définis ainsi ; pour $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ base de V, on pose $\bar{\beta}^i_\ell(\underline{\eta}) = \dim M_\ell/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M_{\ell-1}$, $(1 \leq i \leq n+1)$, et l'on pose $\beta^i_\ell = \inf\limits_{\underline{\eta}} \bar{\beta}^i_\ell(\eta)$; on a les résultats suivants :

3.4. — Pour ℓ fixé, l'ensemble des $\underline{\eta}$ pour lesquels le minimum est atteint (pour $i = 1, \dots, n+1$) est un ouvert de Zariski de l'espace des repères $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ (écrire $\eta_j = \sum \lambda_{jk}\xi_k$, et considérer le rang des applications $M^{i-1}_{\ell-1} \to M_\ell$ définies par $(m_1, \dots, m_{i-1}) \to \sum \eta_j m_j$). Une telle base sera qualifiée ci-dessous de « minimale ».

3.5. — Supposons qu'on ait $H_{0,q}(M) = H_{1,q}(M) = 0$ pour $q \geq \ell$. Alors, pour que M soit ℓ-involutif, il faut et il suffit qu'on ait $\beta^1_{\ell+1} = \beta^1_\ell + \cdots + \beta^n_\ell$; dans ce cas une base $\underline{\eta}$ est ℓ-régulière si et seulement si elle est minimale. Ceci montre en particulier que les bases ℓ-régulières forment un ouvert de Zariski (non vide si M est ℓ-involutif, vide sinon).

En effet le second membre de l'inégalité 3.3, 1) est supérieur ou égal à $\beta^1_\ell + \cdots + \beta^n_\ell$ et le minimum est atteint pour les bases minimales ; donc l'égalité ne peut être obtenue que pour une telle base ; et si elle est obtenue pour l'une d'elles, elle le sera pour toutes les autres.

Les résultats précédents permettent de retrouver facilement le théorème de Hilbert relatif à la dimension de M_q lorsque $q \to +\infty$; en effet M est ℓ-involutif, pour un certain ℓ ; le théorème 2.6 montre alors que $M/(\eta_1, \dots, \eta_{i-1})M$ est ℓ-involutif sur $k[\eta_i, \dots, \eta_n]$; par conséquent, on aura, pour $q \geq \ell$, $\beta^i_{q+1} = \beta^i_q + \cdots + \beta^n_q$, $(1 \leq i \leq n)$, et, $\beta^{n+1}_q = 0$. On en déduit par récurrence la formule suivante (je laisse les détails au lecteur) :

$$\dim M_{\ell+r} (= \beta^1_{\ell+r}) = \beta^1_\ell + \binom{r}{1}\beta^2_\ell + \cdots + \binom{r+n-2}{n-1}\beta^n_\ell \,. \tag{3.6}$$

Ce polynôme est de degré $i-1$, avec $i = \sup\{j \mid \beta^j_\ell \neq 0\}$; la caractérisation de la dimension par le polynôme de Hilbert-Samuel[**Se**] montre donc que *la dimension de M est égale à i.*

Remarque 3.7. — Au lieu des β_q^i, il est plus usuel de considérer les α_q^i définis par $\alpha_q^i = \beta_q^i - \beta_q^{i+1}$; évidemment, on a $\alpha_q^i \geq 0$. Si M est ℓ-involutif, on a, pour $q \geq \ell$, $\alpha_q^i \geq \alpha_q^{i+1}$. Pour le voir, il suffit de traiter le cas $\ell = 1$, ce qui va être fait au prochain paragraphe.

4. Forme normale d'un module involutif

Les résultats de ce paragraphe sont relatifs au cas où $\ell = 1$ (bien sûr, si M est ℓ-involutif, avec $\ell \geq 2$, on peut les appliquer à $M(\ell - 1)$; mais ceci ne donnera aucun renseignement sur $M_0, \ldots, M_{\ell-2}$). Soit donc M involutif, et soit $\underline{\eta}$ une suite 1-régulière. Montrons d'abord le résultat annoncé en 2.9, à savoir que $\underline{\eta}$ est strictement 1-régulière ; on va utiliser un argument de **[Ku3]** : montrons par exemple que l'annulateur K_1 dans M est égal à l'annulateur de η_1 ; soit $m \in M$, avec $\eta_1 m = 0$; par 1-régularité, on a $m \in M_0$; d'autre part, pour $i \geq 2$, on a $\eta_1(\eta_i m) = \eta_i \eta_1 m = 0$; utilisant à nouveau la 1-régularité, on a $\eta_i m = 0$; d'où le résultat.

Soit maintenant $\underline{\eta}$ une base 1-régulière de M, et soit K_i l'annulateur de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ dans $M/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M$; on pose encore $K_0 = 0$, $K_{n+1} = M_0$; on a $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{n+1}$; et pour, $1 \leq i \leq n$, on a des suites exactes

$$0 \to K_i \to M_0 \to M_1/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_0 \to M_1/(\eta_1, \ldots, \eta_i)M_0 \to 0 \ .$$

Soit P_i un supplémentaire de K_i dans K_{i+1}, et posons $\alpha_0^i = \dim P_i$ $(0 \leq i \leq n)$. On a $\dim K_i = \alpha_0^0 + \cdots + \alpha_0^{i-1}$, $\dim M_0 = \alpha_0^0 + \cdots + \alpha_0^n$, et, en utilisant les suites exactes précédentes :

$$\alpha_1^i = \beta_1^i - \beta_1^{i+1} = \alpha_0^i + \cdots + \alpha_0^n \quad (1 \leq i \leq n) \ . \tag{4.1}$$

Cette formule montre, en particulier, le résultat annoncé en 3.7, à savoir que α_1^i est une fonction décroissante de i.

Pour trouver la forme normale cherchée, donnons-nous, pour chaque $i \in [0, n]$ une base $(e_{i,j})$ de P_i $(1 \leq j \leq \alpha_0^i)$; pour simplifier les notations, nous noterons cette base $\underline{e}_i$, en écrivant les $e_{i,j}$ en colonne. Les propriétés précédentes des K_i donnent alors pour chaque paire (i, j) avec $i > j$, une relation

$$\eta_i \underline{e}_j = \sum a_{ij}^{k\ell} \eta_k \underline{e}_\ell \ , \tag{4.2}$$

les $a_{ij}^{k\ell}$ étant des matrices de type $(\alpha_0^\ell, \alpha_0^j)$, nulles sauf peut être pour $k \leq j$ et $k \leq \ell$. Par exemple, pour $n = 3$, on obtiendra les formules suivantes, où $*$ désigne les $a_{ij}^{k\ell}$,

i) $\eta_1 \underline{e}_0 = \eta_2 \underline{e}_0 = \underline{\eta}_3 \underline{e}_0 = 0$

$$ii)\ \begin{cases} \eta_2\underline{e}_1 = *\eta_1\underline{e}_1 + *\eta_1\underline{e}_2 + *\eta_1\underline{e}_3 \\ \eta_3\underline{e}_1 = *\eta_1\underline{e}_1 + *\eta_1\underline{e}_2 + *\eta_1\underline{e}_3 \end{cases}$$

$$iii)\ \eta_3\underline{e}_2 = *\eta_1\underline{e}_1 + *\eta_1\underline{e}_2 + *\eta_1\underline{e}_3 + *\eta_2\underline{e}_2 + *\eta_2\underline{e}_3.$$

Les coefficients $a_{ij}^{k\ell}$ *ne sont pas quelconques* ; ils doivent satisfaire certaines relations que nous allons déterminer. Auparavant, suivant [**Qu**], donnons un résultat dont nous verrons ultérieurement qu'il est étroitement lié au théorème de Cartan-Kähler ; pour cela, considérons l'application

$$u : \oplus P_i \otimes k[\eta_1, \ldots, \eta_i] \to M$$

dans laquelle on gradue le premier membre par le degré des polynômes ; on a le résultat suivant :

Théorème 4.3. — *L'application u est un isomorphisme de k-vectoriels gradués.*

La surjectivité est évidente à partir de (4.2) Pour démontrer la bijectivité, il suffit d'établir l'égalité des dimensions en chaque degré. Pour cela, on va démontrer plus généralement les isomorphismes

$$K_{p+1} \oplus \bigoplus_{i>p} k[\eta_{p+1}, \ldots, \eta_i] \otimes P_i \xrightarrow{\sim} M/(\eta_1, \ldots, \eta_p)M\ .$$

Ici encore, les surjectivités sont évidentes. Le résultat est évident pour $p = n$ car $K_{p+1} = M_0 = M/(\eta_1, \ldots, \eta_n)M$; supposons-le donc vrai pour p et démontrons-le pour $p-1$. On va montrer, par récurrence sur r, que les dimensions en degré r des deux membres, notées respectivement $\beta_r'^p$ et β_r^p, sont égales. Le résultat est vrai pour $r = 0$; d'autre part, d'après le §3, on a $\beta_r^p = \beta_{r-1}^p + \cdots + \beta_{r-1}^n$; donc il suffit d'établir le résultat analogue avec β remplacé par β' ; mais cela résulte immédiatement de l'égalité

$$\dim k[\eta_1, \ldots, \eta_\ell]_r = \binom{\ell + r - 1}{r}\ .$$

Pour étudier maintenant les relations auxquelles doivent satisfaire les $a_{ij}^{k\ell}$, considérons *a priori* le A-module gradué M défini par les relations (4.2) avec $a_{ij}^{k\ell}$ vérifiant seulement les conditions indiquées en (4.2) La suite $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ n'est pas forcément 1-régulière (auquel cas, par exemple 4.3 ne sera pas vrai). Nous allons chercher les conditions pour qu'elle le soit. Pour cela, soit N le noyau de la surjection $A \otimes M_0 \to M$; en particulier, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow V \otimes M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0\ .$$

Posons, pour $i > j$: $\underline{n}_{ij} = \eta_i \otimes \underline{e}_j - \sum a_{ij}^{k\ell} \eta_k \otimes \underline{e}_\ell$; $\underline{n}_{ij}$ est considéré comme une colonne, à composantes dans $V \otimes M_0$; les coefficients des $\underline{n}_{ij}$ engendrent N_1, et il est facile de voir qu'ils sont linéairement indépendants sur k ; donc ils forment une base de N_1 ; une base d'un supplémentaire dans $V \otimes M_0$ est donnée par les (composantes des) $\eta_i \otimes \underline{e}_j$, avec $i \leq j$.

Par définition, N est engendré par N_1 ; notons alors le noyau Q de $A \otimes N_1 \to N$; on a en particulier des suites exactes

$$0 \longrightarrow N_2 \longrightarrow A_2 \otimes M_0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow V \otimes N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow 0$$

Q_2 est l'ensemble des $\sum\limits_{i>j} b_{ij} \otimes \underline{n}_{ij}$ tels qu'on ait $\sum b_{ij} \underline{n}_{ij} = 0$ dans N_2 (b_{ij}, des lignes à α_0^j composantes, à valeurs dans V) ; par exemple, comme $\underline{n}_{i0} = \eta_i \otimes \underline{e}_0$, on aura $\eta_j \underline{n}_{i,0} - \eta_i \underline{n}_{j,0} = 0$.

Pour trouver les relations cherchées entre les $a_{ij}^{k\ell}$, nous allons écrire que la suite $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est 1-régulière. Par le critère de Cartan 3.3, il suffit d'écrire qu'on a $\dim M_2 = \sum \beta_1^i$, avec $\beta_1^i = \alpha_1^i + \cdots + \alpha_1^n$, $a_1^i = \alpha_0^i + \cdots + \alpha_0^n$; on a d'autre part $\dim N_1 = n\alpha_0^0 + (n-1)\alpha_0^1 + \cdots + \alpha_0^{n-1}$ (utiliser par exemple la base précédemment considérée de N_1). Utilisant les deux suites exactes ci-dessus, on trouve alors que le critère de Cartan équivaut à l'une des assertions équivalentes suivantes :

4.4. — 1) On a $\dim N_2 \geq \alpha_0^0 \binom{n+1}{2} + \cdots + \alpha_0^p \left[\binom{n+1}{2} - \binom{p+1}{2}\right] + \cdots$, avec égalité si et seulement si η est 1-régulier.

2) On a $\dim Q_2 \leq \alpha_0^0 \binom{n}{2} + \cdots + \alpha_0^p \binom{n-p}{2} + \cdots$, avec égalité si et seulement si η est 1-régulier.

Comme les $\eta_k \underline{n}_{ij}$, $k \leq i$ sont des éléments de N_2 qui sont visiblement linéairement indépendants, la première assertion signifie aussi que η est 1-régulier si et seulement si ces éléments, qui sont en nombre voulu, forment une base de N_2.

D'autre part, le nombre $\dim Q_2$ s'interprète comme la dimension de l'espace des relations, à coefficients dans V, entre les composantes des $\underline{n}_{ij}$; on se le rappellera facilement en remarquant qu'il est égal au nombre obtenu dans le cas particulier trivial où tous les $a_{ij}^{k\ell}$ sont nuls ; en effet, dans ce cas, on a $\underline{n}_{ij} = \eta_i \otimes \underline{e}_j$, et les relations sont simplement $\eta_k \underline{n}_{ij} - \eta_i \underline{n}_{kj} = 0 \quad (i, k > j)$. En fait, on peut voir M comme une déformation du module défini par les relations triviales ; le résultat précédent exprime simplement la platitude de cette déformation ; je n'insisterai pas là-dessus.

On procède maintenant par récurrence ; on suppose qu'on a déjà obtenu les conditions pour que $(\eta_2, \ldots, \eta_n)$ soit 1-régulier pour $M/\eta_1 M$, en tant que $k[\eta_2, \ldots, \eta_n]$-module. Il est équivalent, et un peu plus commode de travailler, au lieu de $M/\eta_1 M$, avec $\widetilde{M}$ défini ainsi : $\widetilde{M} = M/\eta_1 M$ en degrés ≥ 1 ; $\widetilde{M}_0 = M_0 \ominus K_1 (= P_1 \oplus \cdots \oplus P_n)$ en degré 0. Alors une base de $\widetilde{M}_0$ est formée par $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$; les équations correspondant à (4.2) s'obtiennent en prenant les équations (4.2) où $i \geq 2$, $j \geq 1$ et en y faisant $\eta_1 = 0$. Avec des notations évidentes, soit $\widetilde{\underline{n}}_{ij}$ la base ainsi obtenue de $\widetilde{N}_1$; on suppose $(\eta_2, \ldots, \eta_1)$ 1-régulier pour $\widetilde{M}$; donc l'égalité analogue à 4.4 pour $\widetilde{Q}_2$ est satisfaite.

Le résultat est alors le suivant :

Proposition 4.5. — *Dans les conditions précédentes, pour que $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ soit 1-régulier (ou, ce qui revient au même, pour que l'égalité dans 4.4 soit vérifiée), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :*

Toute relation entres les $\widetilde{\underline{n}}_{ij}$ à coefficients dans $\widetilde{V} = k\eta_2 \oplus \cdots \oplus k\eta_n$ (plus exactement, à coefficients vecteurs-lignes dont les composantes sont dans $\widetilde{V}$) se relève en une relation entre les $\underline{n}_{k\ell}$ à coefficients dans V.

Nécessité. — Si l'on a $\sum b_{ij} \widetilde{\underline{n}}_{ij} = 0$, on aura $\sum b_{ij} \underline{n}_{ij} = \eta_1 p$, $p \in V \otimes M_0$; l'image de $\eta_1 p$ dans M_2 est nulle ; donc, par 1-régularité, l'image de p dans M_1 est nulle, et l'on a $p \in N_1$; écrivant p en fonction des $\underline{n}_{k\ell}$, on obtient le relèvement cherché.

Suffisance. — Si la condition précédente est satisfaite, les relations entre les $\widetilde{n}_1$, au nombre de $\dim \widetilde{Q}_2 = \alpha_0^1 \binom{n-1}{2} + \cdots + \alpha_0^p \binom{n-p}{2} + \cdots$ donnent, en les relevant, un nombre au moins égal de relations entre les $\underline{n}_{ij}$.

À celles-là, il faut ajouter les relations triviales $\eta_k \underline{n}_{i,0} - \eta_i \underline{n}_{k,0} = 0$, visiblement indépendantes des précédentes, car portant seulement sur les $\underline{n}_{i,0}$; elles sont au nombre de $\alpha_0^0 \binom{n}{2}$; on trouve donc qu'on a $\dim Q_2 \geq \alpha_0^0 \binom{n}{2} + \cdots + \alpha_0^p \binom{n-p}{2} + \cdots$ D'après 4.4 on a donc l'égalité et la suite $\underline{\eta}$ est 1-régulière.

La démonstration précédente donne une méthode pour écrire une base de Q_2 ; elle donne aussi une méthode pour écrire, par récurrence, les conditions que doivent satisfaire les $a_{ij}^{k\ell}$ dans (4.2) pour que la suite $\underline{\eta}$ soit régulière.

***Exemple 4.6* (classique).** — Supposons qu'un seul des α_0^i soit $\neq 0$, par exemple α_0^1. Les équations sont alors les suivantes :

$$\eta_i \underline{e}_1 = a_i \eta_1 \underline{e}_1 \quad (i = 2, \ldots, n) .$$

Modulo η_1, on a $\eta_i \underline{e}_1 \equiv 0$ et les relations triviales $\eta_i\eta_j - \eta_j\underline{e}_i \equiv 0$ ($i \neq j$) pour relever ces relations, on écrit $0 = \eta_i\eta_j\underline{e}_1 - \eta_j\eta_i e_1 = \eta_1(a_j\eta_i\underline{e}_1 - a_i\eta_j\underline{e}_1)$; d'où $a_j\eta_j\underline{e}_1 - a_i\eta_j\underline{e}_1 = 0$. Utilisant à nouveau les équations, on trouve $a_ja_i - a_ia_j = 0$.

Exemple 4.7. — À titre d'autre exemple, traitons le cas $n = 3$, en supposant pour simplifier qu'on a $\underline{e}_3 = 0$. Les équations portant sur $\underline{e}_0$ n'intervenant pas, et pouvant être omises, les seules équations à considérer sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned}\eta_2\underline{e}_1 &= \alpha\eta_1\underline{e}_1 + \beta\eta_1\underline{e}_2\\ \eta_3\underline{e}_1 &= \gamma\eta_1\underline{e}_1 + \delta\eta_1\underline{e}_2\\ \eta_3\underline{e}_2 &= \lambda\eta_1\underline{e}_1 + \underline{\mu}\eta_1\underline{e}_2 + \nu\eta_2\underline{e}_2\ .\end{aligned}$$

Modulo η_1, η_2, on a une seule équation $\eta_3 e_2 \equiv 0$, qui ne donne aucune relation. Modulo η_1, on a $\eta_2\underline{e}_1 \equiv 0$, $\eta_3\underline{e}_1 \equiv 0$, $\eta_3\underline{e}_2 \equiv \nu\eta_2\underline{e}_2$, et la relation triviale $\eta_2\eta_3\underline{e}_1 - \eta_3\eta_2\underline{e}_1 \equiv 0$; pour la relever, on multiplie la première équation par $-\eta_3$, la seconde par η_2 et on les ajoute ; on trouve $\eta_1(\gamma\eta_2\underline{e}_1 + \delta\eta_2\underline{e}_2 - \alpha\eta_3\underline{e}_1 - \beta\eta_3\underline{e}_2) = 0$, d'où $\gamma\eta_2\underline{e}_1 + \delta\eta_2\underline{e}_2 - \alpha\eta_3\underline{e}_1 - \beta\eta_3\underline{e}_2 = 0$.

Utilisant à nouveau les équations, on écrit les composantes de cette relation sur la base $(\eta_1\underline{e}_1, \eta_1\underline{e}_2, \eta_2\underline{e}_2)$ de M_1 ; ceci donne les relations $\gamma\alpha - \alpha\gamma - \beta\lambda = \gamma\beta - \alpha\delta - \beta\mu = \delta - \beta\nu = 0$.

5. Syzygies

Les résultats ici sont classiques ; voir par exemple [**Bo1**],[**Se**]. Ils ne seront guère utilisés dans la suite, et sont surtout donnés pour leurs relations avec l'involutivité. Comme précédemment, on pose $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$; un A-module gradué est dit « *gradué-libre* » s'il est de la forme $\bigoplus_i A(-r_i)$, avec $r_i \geq 0$; on a déjà vu au §2 que, pour M gradué de type fini, il existe un morphisme surjectif $L \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$, avec L gradué libre, ε de degré 0.

Définition 5.1. — (L, ε) est dit minimal si

$$L/(\xi_1, \ldots, \xi_n)L \to M/(\xi_1, \ldots, \xi_n)M$$

est bijectif.

On a le résultat suivant :

Proposition 5.2. — *Un tel (L, ε) minimal existe, et est unique à isomorphisme non unique près.*

Pour montrer l'existence, on prend une base sur k de $\overline{M} = M/(\xi_1, \ldots, \xi_n)M$, formée d'éléments homogènes ; on la relève en des éléments homogènes de même degré de M et on étend en une application $L = \overline{M} \underset{k}{\otimes} A \to M$; cette application est surjective en vertu du lemme suivant :

Lemme 5.3. — *Soient P et Q gradués et $u : P \to Q$ homogène de degré 0 ; on suppose $P/(\xi_1, \ldots, \xi_n)P \to Q/(\xi_1, \ldots, \xi_n)Q = 0$ surjectif ; alors u est surjectif.*

Si $P = 0$, on a $Q/(\xi_1, \ldots, \xi_n)Q = 0$; donc $Q = 0$ [car Q ne peut pas avoir d'éléments de degré minimal ; c'est aussi un cas particulier de 2.3].

Dans le cas général, soit $R = \operatorname{coker} u$; l'exactitude à droite du produit tensoriel $\underset{A}{\otimes} k$ montre qu'on a $R/(\xi_1, \ldots, \xi_n)R = 0$, donc $R = 0$.

Soit maintenant une autre paire (L', ε') minimale ; comme L' est gradué libre, on a un isomorphisme canonique $L' \simeq L'/(\xi_1, \ldots, \xi_n)L' \underset{k}{\otimes} A$, donc $L' \simeq L$. D'autre part, il existe $u : L \to L'$ homogène de degré 0 qui rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varepsilon} & M \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \| \\ L' & \xrightarrow{\varepsilon'} & M \end{array}$$

(prendre des générateurs homogènes de L et relever à L' leur image dans M). D'après le lemme précédent, u est surjectif ; comme L_q et L'_q ont même dimension pour tout q, u est bijectif. D'où la proposition.

En général, u n'est pas unique. Cependant, il le sera, par exemple, si M est engendré par ses éléments de degré minimal, par exemple de degré 0 ; en effet dans ce cas $\overline{M}$ se relève à M de manière unique.

Maintenant : une *résolution* de M est une suite exacte (éventuellement infinie) $\to L_p \xrightarrow{d_p} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ les L_i étant gradués-libres, et les d_i de degré 0.

Une telle résolution est dite *minimale* si ε est minimal et si, pour tout p, $L_p \to \operatorname{Im} d_p$ est minimal. Le résultat suivant se démontre immédiatement par récurrence à partir de 5.2.

Proposition 5.4. — *Tout M gradué de type fini admet une résolution minimale ; deux telles résolutions sont isomorphes (en général, non canoniquement).*

Observons encore ceci : soit $\to L_p \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$ une résolution graduée libre de N ; posons $\overline{L}_p = L_p/(\xi_1, \ldots, \xi_n)L_p$ $(= L_p \underset{A}{\otimes} k)$. Pour que la résolution soit minimale, il faut et il suffit que les flèches $\overline{d}_p : \overline{L}_p \to \overline{L}_{p-1}$ soient nulles.

Par récurrence, il suffit de voir ceci : soit $L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ une présentation graduée-libre de M ; alors « ε minimal » équivaut à $\overline{d}_1 = 0$. Soit $N = \ker\varepsilon = \operatorname{Im} d_1$; la condition « $\overline{d}_1 = 0$ » équivaut au fait que la flèche $\overline{N} \to \overline{L}$ est nulle; mais la suite exacte $\overline{N} \to \overline{L} \to \overline{M} \to 0$ montre que cette condition équivaut à « $\overline{L} \to \overline{M}$ est bijectif ».

Le théorème suivant relie les relations minimales avec le complexe de Koszul.

Théorème 5.5. — *Soit $(L_., d)$ une résolution minimale de M ; alors on a un isomorphisme (en général, non canonique) de A-modules gradués $L_p \simeq H_p(M) \underset{k}{\otimes} A(-p)$.*

Tout d'abord, par les constructions précédentes, $L \simeq H_0(M) \underset{k}{\otimes} A$; soit $N = \ker(\varepsilon : L_0 \to M)$; on a une suite exacte

$$H_{p+1}(L_0) \longrightarrow H_{p+1}(M) \longrightarrow H_p(N) \longrightarrow H_p(L_0) \longrightarrow \cdots$$

Utilisant $H_p(L_0) = 0$ pour $p \geq 1$, et $H_0(L_0) \xrightarrow{\sim} H_0(M)$, on en déduit qu'on a $H_{p+1}(M) \xrightarrow{\sim} H_p(N)$, $p \geq 0$; en mettant les degrés, on trouve un isomorphisme de degré 0 $H_{p-1}(M)(-1) \simeq H_p(N)$; comme $L_1 \to N$ est minimal, on a $L_1 \simeq H_0(N) \underset{k}{\otimes} A \simeq H_1(M) \underset{k}{\otimes} A(-1)$; on continue de même par récurrence.

***Corollaire 5.6* (Hilbert)**. — *Une résolution minimale est de longueur $\leq n$.*

Proposition 5.7. — *Si M est ℓ-involutif, la résolution minimale de M vérifie $L_p = \oplus A(-r_{i,p})$ avec $p \leq r_{i,p} \leq \ell - 1 + p$.*

Réciproquement, si M admet une résolution qui satisfait ces conditions, alors M est ℓ-involutif.

La première assertion résulte immédiatement du théorème précédent et du fait que, pour M ℓ-involutif, $H_{p,q}(M) = 0$ pour tout p et $q \geq \ell$.

Pour démontrer la réciproque, on utilise un raisonnement analogue à celui de 5.5. Tout d'abord, la condition sur L_0 montre qu'il est engendré par ses éléments de degré $\leq \ell - 1$; donc il en va de même de M, et $H_{0,q}(M) = 0$, $q \geq \ell$. Posant ensuite $N = \ker\varepsilon$, et raisonnant comme ci-dessus, on trouve des isomorphismes gradués $H_{p+1}(M)(-1) \simeq H_p(M)$, $p \geq 1$, et une suite exacte graduée $0 \to H_1(M)(-1) \to H_0(N) \to H_0(L_0)$; utilisant la condition sur L_1, on trouve $H_{0,q}(N) = 0$, $q \geq \ell + 1$, d'où $H_{p,q}(M) = 0$, $q \geq \ell$; et ainsi de suite par récurrence. D'où le résultat.

Comme indiqué plus haut, on comparera ce résultat avec la définition 3.2 *(i)* de [**B-M**].

Terminons par quelques remarques sur le cas *involutif* ($\ell = 1$). Dans ce cas, dans la résolution minimale, L_p est engendré par ses éléments de degré p. Donc $\ker d_{p-1} = \operatorname{Im} d_p$ a la même propriété. En raisonnant comme à la remarque qui suit 5.3 on en déduit, par récurrence, que la résolution minimale est unique, à isomorphisme canonique près, et que l'isomorphisme $L_p \simeq H_p(M) \underset{A}{\otimes} A(-p)$ est canonique.

Remarquons aussi que les calculs faits au §4 donnaient une expression « explicite » de L_1, L_2, d_1, d_2 en fonction d'une base 1-régulière ; on pourrait probablement calculer de même les termes suivants de la résolution ; je laisse la question au lecteur intéressé.

Indiquons pour finir comment on peut ici décrire la flèche

$$d_p : H_p(M) \underset{k}{\otimes} A(-p) \longrightarrow H_{p-1}(M) \underset{k}{\otimes} A(-p+1)$$

qui, ici, est canonique.

On a $H_p(M) = H_{p,0}(M) = Z_{p,0}(M) =$ les éléments a de $\Lambda^p V \otimes M_0$ qui vérifient $\delta a = 0$, δ la différentielle de Koszul. Sur $\Lambda^{\cdot} V \otimes A \otimes M$ (les $\otimes$ sont pris sur k), on a deux différentielles :

$\delta' =$ (la différentielle de Koszul sur $\Lambda^{\cdot} V \otimes M$) $\otimes \mathrm{id}_A$

$d =$ (la différentielle de Koszul sur $\Lambda^{\cdot} V \otimes A$) $\otimes \mathrm{id}_M$

On remplace δ' par $\delta = (-1)^p \delta'$ sur $\Lambda^p V \otimes A \otimes M$; alors, on a $d\delta + \delta d = 0$ et $d + \delta$ est une différentielle sur $\Lambda^{\cdot} V \otimes A \otimes M$.

i) On montre que $\Lambda^{\cdot} V \otimes A \otimes M$, muni de $d + \delta$ et de l'augmentation évidente $A \otimes M \to M$ est une résolution de M sur A ; il suffit de traiter le cas $M = A$, auquel cas c'est simplement la « résolution diagonale » classique.

ii) On considère le sous-complexe formé des $Z_{p,0}(M) \otimes A$ (modulo l'isomorphisme $A \otimes M \xrightarrow{\sim} M \otimes A$) ; on va voir qu'il a la même cohomologie que le précédent : par conséquent, ce complexe est la résolution minimale de M ; la flèche correspondante est la flèche induite par $d \ : Z_{p,0}(M) \otimes A \to Z_{p-1,0}(M) \otimes A$.

Pour établir ce résultat, prenons $a \in Z_{p,0}(M) \otimes A$, avec $da = 0$ (ou $\varepsilon a = 0$ si $p = 0$) ; on sait qu'on a $a = (d + \delta)b$, avec $b \in \Lambda^{p+1} V \otimes A \otimes M$; donc $b = b_0 + \cdots + b_q$, $b_j \in \Lambda^{p+1} V \otimes A \otimes M_j$; montrons par récurrence descendante sur Q qu'on peut supposer $b_1 = \cdots = b_q = 0$. On a $\delta b_q = 0$, $db_q + \delta b_{q-1} = 0, \ldots, db_0 = a$; comme M est involutif, il existe $c \in \Lambda^{p+2} V \otimes A \otimes M_{q-1}$, avec $\delta c = b_q$; alors on a $a = (d + \delta)b'$, $b' = b - (d + \delta)c$, et b' ne contient de termes que jusqu'en degré $q - 1$; par récurrence, on a donc $a = (d + \delta)b$, avec

$b \in \Lambda^{p+1}V \otimes A \otimes M_0$; alors, on a $\delta b = 0$ et $a = db$; ceci donne le résultat cherché.

CHAPITRE II

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS : THÉORIE FORMELLE

Dans ce chapitre et les suivants, j'utiliserai librement les notions de base relatives aux espaces analytiques complexes et aux faisceau analytiques cohérents. Pour ces questions, voir notamment [**Gu-R**], [**Gr**], [**Na**]. La définition des espaces analytiques et celle des sous-espaces analytiques sont celles de [**Gr**], *i.e.* « avec éléments nilpotents ». Dans un premier temps, je n'aurai vraiment à utiliser que des notions élémentaires, principalement le théorème des fonctions implicites et ses variantes.

1. Notion de système différentiel

1.1. — Donnons-nous trois entiers n, p, ℓ avec $n > 0, p > 0, \ell \geq 0$. Un *système différentiel* (analytique) d'ordre ℓ à n variables et p fonctions est défini par la donnée

i) D'un ouvert $Y_\ell \subset \mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha| \leq \ell} \mathbb{C}^p$, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

ii) D'un idéal cohérent $\mathcal{I}$ (= sous-faisceau cohérent d'idéaux) du faisceau $\mathcal{O}_{Y_\ell}$ des fonctions holomorphes sur Y_ℓ.

Soit $Z_\ell = (|Z_\ell|, \mathcal{O}_{Z_\ell})$ le sous-espace analytique fermé de Y_ℓ défini par $|Z_\ell| =$ l'ensemble des zéros de $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}_{Z_\ell} = \mathcal{O}_{Y_\ell}/\mathcal{I}$. Il sera commode de noter, un peu abusivement, (Z_ℓ) le système différentiel défini par $(Y_\ell, \mathcal{I})$.

1.2. — Supposons, ce qui est toujours possible localement, $\mathcal{I}$ défini par q fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_q$, et notons (x_i, y_j^α) les variables de Y_ℓ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$; $|\alpha| \leq \ell$). Par définition une *solution* du système (Z_ℓ) au voisinage de $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ est une famille $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p)$ de fonctions holomorphes de x au voisinage de x^0, vérifiant, pour $1 \leq k \leq q$, $f_k(x, \partial^\alpha \bar{y}) = 0$, avec $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ [Bien entendu, on sous-entend qu'on a $(x^0, \partial^\alpha \bar{y}(x^0)) \in Y_\ell$].

Une *solution formelle* est définie de la même manière, avec $\bar{y} \in \mathbb{C}[[x-x^0]]^p$; il est clair que ces notions ne dépendent que de $\mathcal{I}$, et pas des générateurs choisis ; en fait, elle ne dépendent même que de la *racine* de $\mathcal{I}$, mais ce fait ne sera pas utilisé systématiquement avant le Chapitre IV.

1.3. — Par contre, ce qui suit dépend de $\mathcal{I}$ lui-même : soit $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p)$ un jet d'ordre m en x^0 de fonction de x ; un tel jet s'écrit $\bar{y} = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} y^{\alpha,0} (x-x^0)^\alpha$, avec $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$; il peut aussi être identifié à la famille $(x^0, y^{\alpha,0})_{|\alpha| \leq m}$. Supposons qu'on ait $m = \ell + k$, $k \geq 0$, et supposons qu'on ait $a = (x^0, y^{\alpha,0})_{|\alpha| \leq \ell} \in Y_\ell$; alors, pour $f \in \mathcal{I}_a$, $f(x, \partial^\alpha \bar{y})$ définit de façon évidente un jet d'ordre k de fonction de x au voisinage de x^0. Si ce jet est nul pour tout $f \in \mathcal{I}_a$, on dira que $(x, \bar{y})$ est une *solution formelle d'ordre* m (ou : un jet d'ordre m de solution) de (Z_ℓ). En particulier, il est clair qu'une solution formelle d'ordre ℓ est simplement un point de Z_ℓ, et qu'une solution formelle d'ordre ∞ est ce qu'on a appelé plus haut une solution formelle.

Il est commode d'écrire les choses ainsi : pour $m \geq \ell$, posons $Y_m = Y_\ell \times \prod\limits_{\ell+1 \leq |\alpha| \leq m} \mathbb{C}^p$; on identifie dans la suite les fonctions sur Y_m à des fonctions sur Y_{m+1} au moyen de la projection évidente $p_{m+1} : Y_{m+1} \to Y_m$ (je laisse le lecteur puriste rétablir les p_{m+1}^{-1} dans les formules qui suivent). On a des opérateurs de dérivation de $\mathcal{O}_{Y_m}$ dans $\mathcal{O}_{Y_{m+1}}$ définis par

$$(1.4) \quad D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\varepsilon_i}, \ \varepsilon_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), \text{ le 1 à la i-ème place.}$$

On a évidemment $D_i D_j = D_j D_i$; pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, on posera donc $D^\beta = D_1^{\beta_1} \cdots D_n^{\beta_n}$; dans la situation considérée ci-dessus, avec $f \in \mathcal{I}_a$, la formule de Taylor donne

$$f(x, \partial^\alpha \bar{y}) = \sum \frac{1}{\beta!} (D^\beta f)(x^0, y^{\alpha,0})(x - x^0)^\beta .$$

Par conséquent, $\bar{y}$ est une solution formelle d'ordre $m = \ell + k$ si et seulement si $\bar{y}$ vérifie $(D^\beta f)(x^0, y^{\alpha,0}) = 0$, $f \in \mathcal{I}_a$, $|\beta| \leq k$. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 1.5. — On appelle prolongement d'ordre k de (Z_ℓ) le système différentiel défini par $(Y_m, \mathcal{I}_m)$, $m = \ell + k$, $\mathcal{I}_m$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{Y_m}$ engendré par les $D^\beta \mathcal{I}$, $|\beta| \leq k$.

Notant (Z_m) ce prolongement, on pose encore les définitions suivantes :

Définition 1.6. — *i)* On dira que (Z_ℓ) est formellement intégrable à l'ordre 1 (ou : que les conditions d'intégrabilité d'ordre 1 sont satisfaites) si $|Z_{\ell+1}| \to |Z_\ell|$ est surjectif.

ii) On dira que (Z_ℓ) est formellement intégrable à l'ordre k (resp. formellement intégrable) si (Z_m) est formellement intégrable à l'ordre 1 pour $\ell \leq m \leq \ell + k - 1$ (resp. pour tout $m \geq \ell$).

Dans ce chapitre ci, nous donnerons des conditions suffisantes d'intégrabilité formelle. Dans le suivant, nous examinerons les solutions analytiques (théorème de Cartan-Kähler) ; en fait, nous démontrerons le résultat suivant : si (Z_ℓ) est formellement intégrable, par tout point de $|Z_\ell|$ passe une solution analytique. Au Chapitre IV, nous examinerons dans quelle mesure, d'un système donné, on peut déduire un système formellement intégrable équivalent, *i.e.* ayant les mêmes solutions.

Exemple 1.7. — Les exemples ci-dessous sont classiques. Le premier montre la nécessité de prolonger les systèmes pour obtenir un système formellement intégrable. Le second montre que, par ce procédé, on peut seulement espérer obtenir un système formellement intégrable « au point générique », *i.e.* en ôtant certains points singuliers. Je renvoie au Chapitre IV pour des énoncés généraux dans ce sens.

i) Prenons $p = 1$, $\ell = 1$, et considérons le système linéaire $\partial_1 y = 0$, $x_1\partial_2 y + x_2\partial_3 y + \cdots + x_{n-1}\partial_n y = 0$ (autrement dit, avec des notations évidentes, l'idéal engendré par y'_1, $x_1 y'_2 + \cdots + x_{n-1}y'_n$). Le premier prolongement (Z_2) contient y'_2, car $[\partial_1, x_2\partial_2 + \cdots + x_{n-1}\partial_n] = \partial_2$; de même, (Z_3) contient y'_3 car $(\partial_2, x_1\partial_2 + \cdots + x_{n-1}\partial_n] = \partial_3$, et ainsi de suite ; finalement (Z_n) contient le système (Z'_1) défini par $y'_1, \ldots, y'_n$ (ou si l'on préfère $\partial_1 y = \cdots \partial_n y = 0$). Il est facile de voir que (Z'_1) est formellement intégrable, et qu'il est équivalent à (Z_1) ; mais, pour l'obtenir, on a dû faire $n - 1$ prolongements.

ii) Prenons $n = 1, p = 1$, et prenons (Z_1) défini par l'équation $xy' + y - f$, f une fonction holomorphe de x au voisinage de 0 ; il est facile de vérifier que (Z_1) est formellement intégrable sur $x \neq 0$; par contre, il ne l'est pas en $x = 0$: posons en effet $f = \sum b_n x^n$, et cherchons $\bar{y}$ sous la forme $\sum a_m x^m$; il existe une solution formelle unique (d'ailleurs convergente) définie par $a_m = \frac{b_m}{m+1}$; mais un jet d'ordre m de solution est défini par $a_p = b_p/p + 1$, $p \leq m - 1$, et a_m quelconque ; donc $|Z_{m+1}| \longrightarrow |Z_m|$ n'est pas surjectif.

Notons aussi que le système défini par $x^2y'+y-f=0$ possède des propriétés analogues, mais que la solution formelle en 0, n'est pas nécessairement convergente. Ce phénomène, d'ailleurs bien connu, relève de la théorie des « points singuliers irréguliers » des équations différentielles ordinaires, sujet qui sort du cadre du présent exposé.

2. Module caractéristique

On garde les notations du paragraphe précédent ; on écrira « $f \in \mathcal{O}_{Y_m}$ » pour « $f \in \mathcal{O}_{Y_m,a}$, avec $a \in Y_m$ ». Pour $f \in \mathcal{O}_{Y_m}$, on appelle « symbole de f » l'expression $\delta f = \sum\limits_{j,|\alpha|=m} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha}\delta y_j^\alpha$, autrement dit la différentielle de f modulo les dx_i et les dy_j^α, $|\alpha| \leq m-1$. De la formule (1.4) on déduit qu'on a $\delta D_i f = \xi_i \delta f$, avec $\xi_i(g\delta y_j^\alpha) = g\delta y_j^{\alpha+\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)$,$g \in \mathcal{O}_{Y_m}$; comme les ξ_i commutent, on pourra écrire $\delta y_j^\alpha = \xi^\alpha \delta y_j$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$; on a donc $\delta f \in \bigoplus\limits_j \mathcal{O}_{Y_m}[\xi_1,\ldots,\xi_n]_\ell \delta y_j = \mathcal{O}_{Y_m}[\xi_1,\ldots,\xi_n]_\ell^p$, où $[\cdots]_\ell$ désigne les polynômes homogènes de degré ℓ.

Soit maintenant $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\ell$ un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{Y_\ell}$; on pose les définitions suivantes :

Définition 2.1. — *i)* On appelle symbole d'ordre ℓ de $\mathcal{I}$ le sous-$\mathcal{O}_{Z_\ell}$-module cohérent N_ℓ de $\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi]_\ell^p$ engendré par les classes mod $\mathcal{I}$ des δf, $f \in \mathcal{I}$.

ii) On appelle symbole de $\mathcal{I}$ le sous-module gradué N de $\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi]^p$ engendré par N_ℓ.

iii) On appelle module (ou système) caractéristique de (Z_ℓ) le module gradué quotient $\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi]^p/N$.

Soit $(Y_{\ell+1}, \mathcal{I}_{\ell+1} = \mathcal{I}')$ le prolongement d'ordre un de $(Y_\ell, \mathcal{I})$, et soit $Z_{\ell+1}$ l'espace analytique correspondant ; notons $q : |Z_{\ell+1}| \to |Z_\ell|$ la projection et $q^* : q^{-1}\mathcal{O}_{Z_\ell} \to \mathcal{O}_{Z_{\ell+1}}$ l'application évidente (souvent dans la suite q^{-1} et q^* seront sous-entendus). Notons encore N' et M' le module des symboles et le module caractéristique de $(Z_{\ell+1})$. D'une part, N' est engendré par $N'_{\ell+1}$; d'autre part, de la formule $\delta D_i f = \xi_i \delta f$, on déduit que $N'_{\ell+1}$ est engendré par $q^*q^{-1}N_{\ell+1} \subset q^*q^{-1}\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi]_{\ell+1}^p$. On déduit de là que la même formule est vraie pour N'_k, avec $\ell+1$ remplacé par $k \geq \ell+1$. En utilisant l'exactitude à droite du produit tensoriel, on en déduit ceci : si M_+ est le module M, avec M_ℓ remplacé par $\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi]_\ell^p$, on a

$$M' = \mathcal{O}_{Z_{\ell+1}} \underset{q^{-1}\mathcal{O}_{Z_\ell}}{\otimes} q^{-1}M_+ \; ; \tag{2.2}$$

suivant l'usage ceci sera noté q^*M_+.

Pour les prolongements suivants, on a des formules analogues que je laisse au lecteur.

En fait, les modules précédents seront utiles principalement par l'intermédiaire de leurs valeurs ponctuelles : pour $a \in |Z_\ell|$, on notera $N_\ell(a)$ le sous-espace de $\mathbb{C}[\xi]^p_\ell$ engendré par les valeurs en a des éléments de N_ℓ, et de même pour N ; on définira alors $M(a)$ comme le quotient $\mathbb{C}[\xi]^p/N(a)$; il revient au même de le définir comme étant égal à $M \underset{\mathcal{O}_{Z_\ell}}{\otimes} \mathbb{C}_a$ (même argument que ci-dessus). Si maintenant b est un point de $|Z_{\ell+1}|$, avec $q(b) = a$, on aura $N'_\ell(b) = N_k(a)$, $k \geq \ell + 1$, et $M'(b) = M_+(a)$ (je laisse les vérifications au lecteur).

Pour énoncer les propriétés qui suivent, je supposerai que Z_ℓ est *lisse*, *i.e.* que $|Z_\ell|$ est une sous-variété non singulière de Y_ℓ, *et* que $\mathcal{I}$ est l'idéal de toutes les fonctions nulles sur $|Z_\ell|$; dans ce cas, $\mathcal{O}_{Z_\ell}$ s'identifie à l'espace des fonctions holomorphes, au sens usuel, sur la variété analytique complexe $|Z_\ell|$; voir au Chapitre IV une situation plus générale.

2.3. — Pour que M_ℓ soit localement libre sur $\mathcal{O}_{Z_\ell}$, il faut et il suffit que la dimension de $M_\ell(b)$ soit localement constante sur $|Z_\ell|$. L'assertion directe est évidente ; la réciproque résulte du fait suivant : si $\dim M_\ell(b)$ est localement constante, M_ℓ est localement conoyau d'une application $\mathcal{O}^r_{Z_\ell} \to \mathcal{O}^s_{Z_\ell}$ de rang constant.

Proposition 2.4 **([Go])**. — *Outre la lissité de Z_ℓ, faisons les hypothèses suivantes :*

i) M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont localement libres.

ii) Pour tout $k \geq \ell$ et tout $b \in |Z_\ell|$, on a $H_{2,k}(M(b)) = 0$.

Alors, pour $k \geq \ell + 2$, M_k est localement libre.

Ici, on note $H_{2,k}(\cdot) = H_{2,k}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \cdot)$ (cf. I.2), et on pose $T = \mathbb{C}\xi_1 + \cdots + \mathbb{C}\xi_n$. La suite exacte $0 \to N(b) \to \mathbb{C}[\xi] \to M(b) \to 0$, jointe à la dernière hypothèse, implique qu'on a $H_{1,k+1}(N(b)) = 0$, $k \geq \ell$; ceci, joint au fait que N est engendré par ses éléments de degré ℓ implique l'exactitude de la suite

$$\Lambda^2 T \otimes N_k(b) \longrightarrow T \otimes N_{k+1}(b) \longrightarrow N_{k+2}(b) \longrightarrow 0 \quad (k \geq \ell) ,$$

Raisonnons par récurrence, et supposons $\dim N_k(b)$ et $\dim N_{k+1}(b)$ localement constants ; l'image de la première flèche a une dimension semi-continue inférieurement ; le noyau de la seconde coïncide avec le noyau de la flèche évidente $T \otimes N_{k+1}(b) \to \mathbb{C}[\xi]^p_{k+2}$; donc sa dimension est semi-continue supérieurement ; comme ces deux espaces coïncident, leur dimension est localement constante ; donc celle de $N_{k+2}(b)$ l'est aussi et le résultat suit de 2.3.

Le résultat précédent, qui sera constamment utilisé par la suite, a l'inconvénient de n'être pas « effectif », en ce sens qu'il demande une infinité de vérifications (pour $k \geq \ell$). Voici un résultat effectif qui l'implique :

Proposition 2.5. — *On suppose Z_ℓ lisse, et M_ℓ et $M_{\ell+1}$ localement libres. On suppose en outre que, en un point $a \in |Z_\ell|$, $M(a)$ est ℓ-involutif, et que la base $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de T est ℓ-régulière. Alors les mêmes propriétés sont vraies pour b voisin de a.*

On utilise le critère de Cartan I.3.3 ; pour tout k, voisin de a, on a

$$\dim M_{\ell+1}(b) \leq \sum \dim M_\ell(b)/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{\ell-1}(b)$$

(on a d'ailleurs ici $M_{\ell-1}(b) = \mathbb{C}[\xi]^p_{\ell-1}$).

Par hypothèse on a l'égalité pour $b = a$; le premier membre est constant et les termes du second membre sont semi-continus supérieurement, donc ont un maximum local en a. Par suite, ils sont constants, et l'égalité est vraie pour tout b voisin de a.

On remarquera que la démonstration donne aussi la constance locale de $\dim M_\ell(b)/(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})M_{\ell-1}(b)$. Au lieu d'utiliser 2.4, on peut alors en déduire la constance locale de $\dim M_k(b)$, $k \geq \ell + 1$, en utilisant I.(3.6).

3. Prolongement des solutions formelles

Le théorème d'existence des solutions formelles démontré ici est une variante du théorème de Cartan-Kähler, qui est due à Goldschmidt [**Go**]. La démonstration de cet auteur sera donnée au §4 ; dans ce paragraphe-ci, j'emploierai une méthode duale, plus proche des calculs usuels en algèbre différentielle (on pourra plus ou moins comparer, p. ex. avec la notion « d'ensemble cohérent » de [**Ro**]) ; dans le cas linéaire, voir aussi [**Mal1**].

La traduction en termes de systèmes différentiels extérieurs n'est rien d'autre que « l'absorption de la torsion », à la Cartan, cf. [**B-C-G**] ; ce point sera vu à l'appendice B.

3.1. — On garde les hypothèses des paragraphes précédents, et on se place en outre dans les hypothèses suivantes :

i) Z_ℓ est lisse ;

ii) M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont localement libres ;

iii) La projection « oubli des y_j^α, $|\alpha| = \ell$ », $q : |Z_\ell| \to \mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\leq \ell-1} \mathbb{C}^p$ est localement de rang constant ; en outre, pour $a \in |Z_\ell|$, si $f \in \mathcal{I}_a$ est indépendante des y_j^α, $|\alpha| = \ell$, on a, pour $1 \leq i \leq n$: $D_i f \in \mathcal{I}_a$.

Dans cette section, pour simplifier, on écrira $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{Y_\ell}$; ceci ne créera pas d'ambiguïté. La dernière hypothèse sera utilisée via le lemme suivant :

Lemme 3.2. — *Dans les hypothèses précédentes, soit $f \in \mathcal{I}_a$, avec $\frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} \in \mathcal{I}_a$, $1 \leq j \leq p$, $|\alpha| = \ell$. Alors, pour tout i, on a $D_i f \in \mathcal{I}_a \mathcal{O}_{Y_{\ell+1}}$.*

Soit $\mathcal{I}'_a$ l'ensemble des $g \in \mathcal{I}_a$ qui sont indépendantes des y_j^α, $|\alpha| = \ell$. La lissité de Z_ℓ et le fait que q soit de rang constant entraînent qu'on a $f \in \mathcal{O}_a \mathcal{I}'_a + \mathcal{I}_a^2$ (choisir des coordonnées locales adaptées à Z_ℓ et q). Par hypothèse, on a $D_i \mathcal{I}'_a \subset \mathcal{I}_a$ et le lemme s'ensuit.

Ce lemme a la conséquence suivante : prenons $n \in N_{\ell,a}$; n est représenté dans $\mathcal{O}_a[\xi]_\ell^p$ par $\sum h_k \delta g_k$, $h_k \in \mathcal{O}_a$, $g_k \in \mathcal{I}_a$; il est aussi représenté par δg, avec $g = \sum h_k g_k \in \mathcal{I}$.

Posons $D_i g = h_i + \sum_{j,|\beta|=\ell+1} h_{i,j,\beta} y_j^\beta$ avec h_i, $h_{i,j,\beta} \in \mathcal{O}_a$; *la classe de ces éléments modulo $\mathcal{I}_a$ ne dépend que de n* ; en effet, si n est représenté par $\delta g'$, $g' \in \mathcal{I}_a$, $g - g'$ vérifie les conditions du lemme. On note $\overline{D}_i n \in \mathcal{O}_{Z_\ell,a} \oplus \bigoplus_{j,|\beta|=\ell+1} \mathcal{O}_{Z_\ell,a} y_j^\beta$ la classe ainsi obtenue.

Définissons maintenant la *torsion* du système (Z_ℓ) (on pourrait tout aussi bien dire « la courbure » ; cf. exemple plus bas). D'après l'hypothèse *ii)* et 2.3, l'application surjective $d : T \otimes N_\ell \to N_{\ell+1} : \sum \xi_i \otimes n_i \to \sum \xi_i n_i$ a un noyau $Z(T \otimes N_\ell)$ localement libre, et sa valeur en $a \in |Z_\ell|$ est égale à $Z(T \otimes N_\ell(a))$.

Soit alors $n = \sum \xi_i \otimes n_i \in Z(T \otimes N_\ell)$; le fait que $dn = 0$ entraîne immédiatement que, dans la somme $\sum \overline{D}_i n_i$, les coefficients des y_j^β, $|\beta| = \ell + 1$, sont nuls ; on pose alors la définition suivante :

Définition 3.3. — Pour $n = \sum \xi_i \otimes n_i \in Z(T \otimes N_\ell)$, on pose $\tau(n) = \sum \overline{D}_i n_i \in \mathcal{O}_{Z_\ell}$. On appelle torsion du système (Z_ℓ) l'application $\tau : Z(T \otimes N_\ell) \to \mathcal{O}_{Z_\ell}$ ainsi définie.

On vérifie immédiatement que cette application est $\mathcal{O}_{Z_\ell}$-linéaire, donc définie fibre par fibre. Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.4. — *Avec les hypothèses précédentes, soit $(Z_{\ell+1})$ le premier prolongement de (Z_ℓ) [cf. 1.5]. Pour que $a \in |Z_\ell|$ soit l'image d'un point $b \in |Z_{\ell+1}|$, il faut et il suffit qu'on ait $\tau(\cdot)(a) = 0$.*

Pour $f \in \mathcal{I}_a$, posons $D_i f = D'_i f + D''_i f$, avec $D'_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{j,|\alpha| \leq \ell-1} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\varepsilon_i}$, $D''_i f = \sum\limits_{j,|\alpha|=\ell} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\varepsilon_i}$; on considère $D'_i f(a)$ comme élément de $\mathbb{C}$, (en remplaçant les y_j^α par leur valeur en a), et $D''_i f(a)$ comme forme linéaire dans les variables y_j^β, $|\beta| = \ell + 1$.

Soient $f_1, \ldots, f_r$ des générateurs de $\mathcal{I}_a$; pour trouver $b \in |Z_{\ell+1}|$, de projection a, on doit résoudre par rapport aux y_j^β le système linéaire $D'_i f_k(a) + D''_i f_k(a) = 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq r$. La condition pour cela est la suivante : toute relation $\sum \lambda_{ik} D''_i f_k(a) = 0$, $\lambda_{ik} \in \mathbb{C}$, entraîne $\sum \lambda_{ik} D'_i f_k(a) = 0$.

Posons $g_i = \sum\limits_k \lambda_{ik} f_k$, $n = \sum \xi_i \otimes \delta g_i \pmod{\mathcal{I}_a}$; la relation $\sum \lambda_{ik} D''_i f_k(a) = 0$ signifie qu'on a $dn(a) = 0$, donc $n(a) \in Z(T \otimes N_\ell(a))$; alors la relation $\sum \lambda_{ik} D' f_k(a) = 0$ signifie $\tau(n)(a) = 0$. D'où le théorème.

Exemple 3.5. — Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$; sur X, on considère le système d'équations $\partial_i \, \underline{y} + A_i \, \underline{y} = 0$, $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T$, A_i des matrices $p \times p$ dépendant holomorphiquement de x ; dans le langage ci-dessus, on pose $Y_0 = X \times \mathbb{C}^p$, $Y_1 = X \times \prod\limits_{|\alpha| \leq 1} \mathbb{C}^p$, et $\mathcal{I}$ est défini par les composantes des $\underline{y}^i + A_i \, \underline{y}$, $(1 \leq i \leq n)$. Ici, $|Z_1| \to Y_0$ est bijectif, et on peut identifier $\mathcal{O}_{Z_1}$ à $\mathcal{O}_{Y_0}$; on a alors $N_1 = \bigoplus\limits_j \mathcal{O}_{Y_0}[\xi]_1 \delta y_j$, et $Z(T \otimes N_1)$ est engendré par les $\xi_i \otimes \xi_k \delta y_j - \xi_k \otimes \xi_i \delta y_j$; posant $\delta \underline{y} = (\delta y_1, \ldots, \delta y_p)$, on trouve qu'on a

$$\begin{aligned} \tau\big(\xi_i \otimes \xi_k \delta \underline{y} - \xi_k \otimes \xi_i \delta \underline{y}\big) &= \tau\Big[\xi_i \otimes \delta(\underline{y}^k + A_k \, \underline{y}) - \xi_k \otimes \delta(\underline{y}^i + A_i \, \underline{y})\Big] \\ &= D_i(\underline{y}^k + A_k \, \underline{y}) - D_k(\underline{y}^j + A_i \, \underline{y}) \\ &= \Big(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + [A_i, A_k]\Big) \, \underline{y} \, . \end{aligned}$$

On trouve donc la courbure de la connexion de forme $\sum A_i \, dx_i$; ceci était à prévoir, puisque la nullité de la courbure est la condition de prolongement à l'ordre 2 des jets de solution d'ordre 1.

Pour terminer cette section, montrons que la torsion, qui est définie sur les cycles de $T \otimes N_\ell$, s'annule sur les bords convenablement définis. On reprend donc les hypothèses du théorème ; pour simplifier, on va travailler localement, au voisinage d'un point $a \in |Z_\ell|$ (avec les hypothèses faites, $Z_{\ell-1}$ ne pourrait être défini que comme variété immergée).

Au voisinage de a la projection q, qui est de rang constant, définit un germe de sous-variété lisse $Z' = Z'_{\ell-1}$ de $\mathbb{C}^n \times \prod\limits_{|\alpha| \leq \ell-1} \mathbb{C}^p$; les fonctions nulles sur $|Z'|$

s'identifient à $\mathcal{I}'_a$, ensemble des $g \in \mathcal{I}_a$ indépendantes des y_j^α, $|\alpha| = \ell$ [cf. 3.2]. Considérons alors le sous-module $N'_{\ell-1,a}$ de $\oplus \mathcal{O}_{Z_\ell,a}[\xi]_{\ell-1}\delta y_j$ engendré par les symboles δg d'ordre $\ell - 1$ avec $g \in \mathcal{I}'_a$. La formule $\xi_i \delta g = \delta D_i g$, jointe au fait qu'on a $D_i g \in \mathcal{I}_a$, montre qu'on a $\xi_i N'_{\ell-1,a} \subset N_{\ell,a}$; par suite, on a une flèche de Koszul $d : \Lambda^2 T \otimes N'_{\ell-1,a} \to T \otimes N_{\ell,a}$; son image est dans $Z(T \otimes N_{\ell,a})$; le résultat est alors le suivant :

Proposition 3.6. — *La torsion τ s'annule sur l'image de d.*

Soit $n \in \Lambda^2 T \otimes N'_{\ell-1,a}$; n est représenté par $\sum\limits_{i<j} \xi_i \wedge \xi_j \otimes \delta g_{ij}$, avec $g_{ij} \in \mathcal{I}'_a$, et dn est représenté par $\sum \xi_i \otimes \delta D_i g_{ij} - \xi_j \otimes \delta D_i g_{ij}$; donc $\tau(dn) = \sum D_i D_j g_{ij} - D_j D_i g_{ij} = 0$; d'où le résultat.

3.7. — Voici maintenant le théorème de prolongement annoncé. Les notations sont celles des §1 et 2 ; en particulier N_ℓ, N, M, *etc.* sont les modules définis par le système $(Y_\ell, \mathcal{I})$, noté aussi (Z_ℓ). On note les prolongements comme en 1.5.

Théorème 3.8 **([Go])**. — *On fait les hypothèses suivantes :*

i) Z_ℓ est lisse ;

ii) M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont localement libres ; de plus on a, pour tout $a \in |Z_\ell|$ et tout $k \geq \ell$, $H_{2,k}(M(a)) = 0$.

iii) $|Z_{\ell+1}| \to |Z_\ell|$ est surjectif.

Alors, pour tout $k \geq \ell + 1$, Z_k est lisse et $|Z_{k+1}| \to |Z_k|$ surjectif.

Par récurrence, il suffit de démontrer que les hypothèses du théorème sont encore vérifiées, si l'on remplace ℓ par $\ell + 1$.

i) La lissité de $Z_{\ell+1}$ résulte de ce qu'il est défini par des équations linéaires affines en les variables y_j^β, $|\beta| = \ell + 1$, au-dessus de Z_ℓ, de ce que le fibré vectoriel associé est le dual de $M_{\ell+1}$ qui est localement libre, et de la surjectivité de $|Z_{\ell+1}| \to |Z_\ell|$ (je laisse les détails au lecteur).

ii) D'après 2.4, M_k est localement libre pour tout $k \geq \ell$, en particulier pour $k = \ell + 2$. Soit alors M' le module caractéristique de $(Z_{\ell+1})$. La formule (2.2) montre que M' vérifie *ii)*, avec ℓ remplacé par $\ell + 1$.

iii) Pour démontrer que $|Z_{\ell+2}| \to |Z_{\ell+1}|$ est surjectif, on applique maintenant 3.4 et 3.6 à $Z_{\ell+1}$. Pour tout $a \in |Z_{\ell+1}|$, on a

$$H_{2,\ell}(M(a)) = H_{1,\ell}(M(a)) = 0 \ .$$

De ceci et des propriétés de rang constant des N_k, on déduit que $Z(T \otimes N_{\ell+1})/d(\Lambda^2 T \otimes N_\ell)$ est nul, donc aussi $Z(T \otimes N'_{\ell+1})/d(\Lambda^2 T \otimes N'_\ell)$, avec $N'_k =$

$\mathcal{O}_{Z_{\ell+1}} q^* q^{-1} N_k$, q la projection $Z_{\ell+1} \to Z_\ell$. On vérifie tout de suite que ce dernier module est celui qui intervient dans 3.6 appliqué à $(Z_{\ell+1})$. Donc la torsion est nulle et $|Z_{\ell+2}| \to |Z_{\ell+1}|$ est surjectif, ce qui démontre le théorème.

On remarquera l'analogie du dernier raisonnement avec celui du Chapitre I, Théorème 3.1 (cf. Chapitre III, Remarque 5.4).

Systèmes différentiels involutifs 3.9. — Le théorème précédent donne l'occasion d'une définition qui jouera un rôle essentiel dans les chapitres suivants. Les notations sont les mêmes qu'en 3.7.

Définition 3.10. — On dit qu'un système (Z_ℓ) est ℓ-involutif (ou involutif, si aucune confusion n'est à craindre) si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) Z_ℓ est lisse ;

ii) M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont localement libres. De plus, pour tout $a \in |Z_\ell|$, $M(a)$ est ℓ-involutif.

iii) $|Z_{\ell+1}| \to |Z_\ell|$ est surjectif.

Autrement dit, (Z_ℓ) est involutif s'il satisfait les hypothèses du théorème 3.8, avec de plus $M(a)$ involutif pour tout $a \in |Z_\ell|$. Il résulte aussitôt de ce théorème que, si (Z_ℓ) est involutif, ses prolongements $(Z_{\ell+k})$ le sont aussi pour tout $k \geq 0$.

L'hypothèse « involutive » est en principe plus restrictive que les hypothèses de 3.8, mais elle a l'avantage d'être plus effective, [cf. 2.5]. D'autre part, la restriction n'est en fait qu'apparente : en effet, si (Z_ℓ) vérifie les hypothèses de 3.8, pour tout point $a \in |Z_\ell|$, on peut trouver un voisinage ouvert U_a de a dans Y_ℓ et un entier k tels que $(Z_{\ell+k})$ soit involutif au-dessus de U_a (d'une manière vague « localement, les prolongements de Z_ℓ finissent par devenir involutifs ») : pour voir ce résultat, il suffit de choisir k tel que $M(a)$ soit $\ell + k$-involutif, et d'appliquer 2.5 et 3.8.

La définition des systèmes involutifs adoptée ici, à la suite de **[G-S]**, **[Go]**, **[Qu]**, est basée sur l'expression de l'involutivité en termes de complexe de Koszul. La version de Cartan lui-même sera vue ultérieurement, avec les systèmes différentiels extérieurs.

4. Prolongement des solutions formelles (suite)

Le but de ce paragraphe est de reprendre les calculs du précédent d'une manière duale, plus proche des calculs habituels des géomètres différentiels.

Dualité sur les symboles 4.1. — Soit $\mathbb{C}[\xi]_\ell^*$ le dual sur $\mathbb{C}$ de l'espace $\mathbb{C}[\xi]_\ell$ des polynômes homogènes de degré ℓ en $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. On écrit $a = \sum\limits_{|\alpha|=\ell} a_\alpha \xi^\alpha$ un tel polynôme, et $b = (b^\alpha)_{|\alpha|=\ell}$ un élément du dual, la dualité étant donnée par $\langle a, b\rangle = \sum a_\alpha b^\alpha$. Il est commode ici d'identifier b au polynôme homogène $\sum \frac{1}{\alpha!} b^\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x]_\ell$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; alors, si l'on fait agir ξ_i sur b par $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a $\langle a, b\rangle = a(b)\big|_{x=0}$. Dans cette dualité, le transposé de $\xi_i : \mathbb{C}[\xi]_\ell \to \mathbb{C}[\xi]_{\ell+1}$ est donné par $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{C}[x]_{\ell+1} \to \mathbb{C}[x]_\ell$.

Les mêmes notions s'appliquent sans changement avec $\mathbb{C}[\xi]$ remplacé par $\mathbb{C}[\xi]^p$ (ici, il faut prendre les a_α et b^α à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ et l'on pose $a_\alpha b^\alpha = \sum\limits_j a_{\alpha,j} b_j^\alpha$). Le complexe de Koszul fabriqué avec $\mathbb{C}[\xi]^p$ a pour dual le *complexe de Spencer*, dont la différentielle extérieure est obtenue en transposant la différentielle de Koszul I.(1.1). Notant $dx_1, \ldots, dx_n$ une base de $T^* = \mathbb{C}[\xi]_1^*$, et remarquant que la différentielle de Koszul peut s'écrire $dm = \sum dx_i \lrcorner (\xi_i m)$, on trouve que $d^* : \Lambda^p T^* \otimes \mathbb{C}[\xi]_\ell \to \Lambda^{p+1} T^* \otimes \mathbb{C}[x]_{\ell-1}$ est *la différentielle extérieure usuelle* ; si donc on a $\omega = \sum dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \otimes b_{i_1 \cdots i_p}$, on aura

$$d\omega = \sum dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge \partial_j b_{i_1 \cdots i_p} \ .$$

Par exemple avec des notations évidentes, si l'on a $\omega = \sum dx_i \otimes (b_i^\alpha)$, $|\alpha| = \ell$, on aura $d^*\omega = \sum dx_i \wedge dx_j \otimes (c_i^\beta)$, $|\beta| = \ell - 1$, avec $c_{ij}^\beta = b_j^{\beta+\varepsilon_i} - b_i^{\beta+\varepsilon_j}$.

Plus généralement, si M est un $\mathbb{C}[\xi]$-module homogène de type fini, on définira M^* par $(M^*)_\ell = M_\ell^*$, dual de M_ℓ sur $\mathbb{C}$, et on aura un complexe de Spencer $d^* : \Lambda^p T^* \otimes M_\ell^* \to \Lambda^{p+1} T^* \otimes M_{\ell-1}^*$ défini de la même manière.

Espaces de jets 4.2. — Je vais rappeler ici le langage des espaces de jets ; comme ce sujet est bien connu, ce rappel sera aussi minimaliste que possible.

Soit $\pi : Y \to X$ une submersion de variétés analytiques complexes (lisses), et ℓ un entier ≥ 0. On note $J_\ell(\pi)$, ou $J_\ell(Y)$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, l'espace des jets d'ordre ℓ (= développements de Taylor tronqués à l'ordre ℓ) de sections de π. Par exemple, un élément de $J_1(Y)$ est une paire (b, σ), avec $b \in Y$, σ une section de l'application tangente, $t\pi : T_{Y,b} \to T_{X,a}$, $a = \pi(b)$.

Si X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $Y = X \times Y'$, Y' ouvert de $\mathbb{C}^p$, et π la projection, $J_\ell(Y)$ s'identifie à l'ensemble des $(x, y^\alpha)_{|\alpha| \leq \ell}$, avec $x \in X$, $y = y^0 \in Y'$, $y^\alpha \in \mathbb{C}^p$ pour $1 \leq |\alpha| \leq \ell$, c'est-à-dire à un ensemble du type des Y_ℓ considérés au §1. Ceci le munit d'une structure analytique complexe lisse. Dans le cas général, en prenant des coordonnées locales, on munit $J_\ell(Y)$ d'une structure analytique complexe lisse (on vérifie immédiatement que les changements de cartes sont holomorphes).

Faisons encore les remarques suivantes :

i) Soit p_ℓ la projection $J_\ell(Y) \to J_{\ell-1}(Y)$ $(\ell \geq 1)$: c'est une fibration *vectorielle affine* (ceci se voit immédiatement par changement de coordonnées). Le fibré vectoriel associé est le *tangent relatif* $T_{J_\ell/J_{\ell-1}}$ (*i.e.* le fibré des vecteurs de $J_\ell(Y)$ de projection sur $J_{\ell-1}(Y)$ nulle) ; son dual est donc le fibré des formes relatives $\Omega_{J_\ell/J_{\ell-1}}$, dont les éléments ont été considérés au §2 sous le nom de « symboles ».

Prenant des coordonnées comme au §2, et utilisant la dualité de 4.1, on a donc, en $a = (x^0, y^{\alpha,0})$ des identifications

$$\Omega_{J_\ell/J_{\ell-1}}(a) \simeq \mathbb{C}[\xi]^p_\ell \ ; \ T_{J_\ell/J_{\ell-1}}(a) \simeq \mathbb{C}[x - x^0]^p_\ell \ .$$

ii) La notion de système différentiel peut être définie en partant d'un ouvert $Y_\ell \subset J_\ell(Y)$ et d'un sous-espace analytique fermé Z_ℓ de Y_ℓ ; ce qui a été fait aux §2 et §3 (prolongement, système caractéristique, torsion, *etc.*) subsiste sans changement dans ce cadre un peu plus général.

Ceci résulte du fait suivant : les dérivations D_i définies au §1 ne dépendant en fait que d'un choix de coordonnées dans X, et pas dans Y ; si l'on préfère la différentielle $\sum dx_i \otimes D_i$ est indépendante de tout choix de coordonnées. Je laisse la vérification au lecteur.

4.3. — Pour énoncer les résultats qui suivent, il sera commode de faire la convention suivante : soit $Z \xrightarrow{\pi} X$ un morphisme de variétés analytiques complexes (lisses), et soit $Z' \subset Z$ l'ouvert éventuellement vide des points où π est une submersion ; alors, pour $\ell \geq 1$, on pose $J_\ell(Z) = J_\ell(Z')$.

Soient X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $Y = X \times Y'$, Y' ouvert de $\mathbb{C}^p$; on a les résultats suivants :

Lemme 4.4. — *Soit Z une sous-variété analytique lisse de Y (= une sous-variété lisse fermée d'un ouvert de Y), et soit $Z_1 \hookrightarrow J_1(Y)$ son prolongement d'ordre 1 au sens de 1.5. Alors, on a $Z_1 = J_1(Z)$.*

L'assertion est évidente au voisinage d'un point $a \in |Z|$ où la projection $Z \to X$ est une submersion. Prenons maintenant un point a où ce n'est pas le cas ; il faut démontrer que l'image de $Z_1 \to Z$ ne contient pas a.

Posons $a = (x, y) \in \mathbb{C}^{n+p}$, et soient $f_1, \ldots, f_q$ des générateurs de l'idéal de Z en a ; les points de Z_1 qui sont au-dessus de a sont les (x, y, y^i) qui vérifient $f_k(x, y) = 0$; $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_j} y^i_j = 0$, $1 \leq k \leq q$, $1 \leq i \leq n$. L'existence d'un tel point donnerait un relèvement de T_xX dans T_aZ, ce qui est impossible puisque $T_aZ \to T_xX$ n'est pas surjectif.

Le lemme suivant utilise l'application classique $j_1 : J_{\ell+1}(Y) \to J_1(J_\ell(Y))$, où le second membre est défini à partir de la projection « source » $J_\ell(Y) \to X$, et où j_1 est défini ainsi : soit σ une section de $Y \to X$ au voisinage de x^0 ; elle définit une section de $J_\ell(Y) \to X$ (en chaque x, on prend le jet d'ordre ℓ de σ en x) ; d'où une section de $J_1(J_\ell(Y))$; on vérifie immédiatement que sa valeur en x^0 ne dépend que du jet d'ordre $\ell+1$ de σ en x^0.

Lemme 4.5. — *Soit Z_ℓ une sous-variété lisse de $J_\ell(Y)$ et soit $Z_{\ell+1} \hookrightarrow J_{\ell+1}(Y)$ son prolongement d'ordre 1. On a*

$$|Z_{\ell+1}| = |J_1(Z_\ell)| \cap |j_1 J_{\ell+1}(Y)| \subset |J_1(J_\ell(Y))| \ .$$

Prenons $a = (x, y^\alpha)_{|\alpha| \leq \ell}$ dans $|Z_\ell|$, et soient $f_1, \dots, f_q$ des générateurs de l'idéal de Z_ℓ en a ; alors, d'après le lemme précédent, $|J_1(Z_\ell)|$ est l'ensemble $(x, y^\alpha, y^{\alpha,i})$ des zéros des équations $f_k(x, y^\alpha) = 0$; $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha,i} = 0$. Un tel point est dans $|Z_{\ell+1}|$ si et seulement s'il existe des y^α, $|\alpha| = \ell+1$ tels qu'on ait $y^{\alpha,i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \leq \ell$; cette condition équivaut au fait que ce point est dans $j_1 J_{\ell+1}(Y)$.

4.6. — En fait la démonstration donne le résultat plus précis suivant :

$$Z_{\ell+1} = J_1(Z_\ell) \underset{J_1(J_\ell(Y))}{\times} J_{\ell+1}(Y)$$

(ceci ne servira pas ici ; pour la définition du produit fibré, voir **[Gr]**). On peut voir que, moyennant une définition convenable de $J_1(Z_\ell)$, le même résultat est vrai pour un sous-espace analytique quelconque Z_ℓ de $J_\ell(Y)$.

4.7. — L'étude du prolongement en termes de jets se fait maintenant ainsi. On prend encore $X = \mathbb{C}^n$, $Y = X \times \mathbb{C}^p$, Y_ℓ un ouvert de $J_\ell(Y)$, et enfin Z_ℓ une sous-variété lisse de Y_ℓ ; on suppose que Z_ℓ vérifie les conditions *i)* à *iii)* de 3.1.

Désignons par q la projection $J_\ell(Y) \to J_{\ell-1}(Y)$; soit $a \in |Z_\ell|$, $a' = q(a)$, et $Z' = Z'_{\ell-1}$ la projection $q(Z_\ell)$ au voisinage de a ; l'hypothèse *iii)* montre que le prolongement d'ordre un Z'_ℓ de $Z'_{\ell-1}$ contient Z_ℓ ; d'après les lemmes qui précèdent $J_1(Z'_{\ell-1}) \to Z'_{\ell-1}$ est surjectif, donc $Z'_{\ell-1} \to X$ est une submersion. Comme $Z_\ell \to Z'_{\ell-1}$ est une submersion, a fortiori $Z_\ell \to X$ est une submersion.

Restant une fois pour toutes au voisinage de a, désignons par $Z_{\ell+1} \hookrightarrow J_{\ell+1}(Y)$ le prolongement d'ordre un de Z_ℓ. Pour chercher à quelle condition il existe $b \in |Z_{\ell+1}|$ de projection a, on opère de la manière suivante : les propriétés de lissité précédentes permettent de trouver $c \in J_1(Z_\ell)$ ayant les deux propriétés suivantes :

i) Sa projection sur $J_1(Z_{\ell-1})$ est égale à $j_1(a)$;

ii) Sa projection sur Z_ℓ (par l'application évidente $J_1(Z_\ell) \to Z_\ell$) est égale à a.

Explicitement, posons $a = (x^0, y^\alpha)$ (on écrit ici y^α pour $y^{\alpha,0}$, pour simplifier), et soient $f_1, \ldots, f_q$ des générateurs de l'idéal de Z_ℓ en a ; alors, on a $c = (x^0, y^\alpha, y^{\alpha,i})_{|\alpha| \leq \ell}$, avec les propriétés suivantes :

α) $\quad y^{\alpha,i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$ pour $|\alpha| \leq \ell - 1$;

β) $f_k(x^0, y^\alpha) = 0$; $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum\limits_{j,\alpha} \frac{\partial f_k}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha,i} = 0, \quad 1 \leq k \leq q, \quad 1 \leq i \leq n.$

Dans c, seuls les $(y^{\alpha,i})$, $|\alpha| = \ell$ ne sont pas fixés ; pour que l'on ait $c \in |Z_{\ell+1}|$, il faut et il suffit, d'après 4.5 qu'il existe des y^β, $|\beta| = \ell + 1$ tels qu'on ait $y^{\alpha,i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| = \ell$, $1 \leq i \leq n$; il revient au même de demander qu'on ait $y^{\alpha+\varepsilon_{i,j}} - y^{\alpha+\varepsilon_{j,i}} = 0$, $|\alpha| = \ell - 1$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Fixons alors un c, et cherchons à quelle condition on peut le remplacer par $c' = (x^0, y'^\alpha, y'^{\alpha,i})$ vérifiant les hypothèses voulues ; on doit avoir $y'^\alpha = y^\alpha$, $|\alpha| \leq \ell$, $y'^{\alpha,i} = y^{\alpha,i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \leq \ell - 1$; enfin $y'^{\alpha,i} = y^{\alpha,i} - z^{\alpha,i}$, $|\alpha| = \ell$; les $z^{\alpha,i}$ doivent satisfaire les deux conditions suivantes :

i) $\sum\limits_{j,|\alpha|=\ell} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} z_j^{\alpha,i} = 0$, $1 \leq i \leq n$;

ii) $z^{\alpha+\varepsilon_{j,i}} - z^{\alpha+\varepsilon_{i,j}} = y^{\alpha+\varepsilon_{j,i}} - y^{\alpha+\varepsilon_{i,j}}$, $|\alpha| = \ell - 1$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Utilisons maintenant la dualité sur les symboles 4.1. Soient $N_\ell(a) \subset \mathbb{C}[\xi]_\ell^p$ le symbole de Z_ℓ en a, et $M_\ell(a) = \mathbb{C}[\xi]_\ell^p / N_\ell(a)$ (cf. §2). Notons $N_\ell(a)^\perp = M_\ell(a)^*$ l'orthogonal de $N_\ell(a)$ dans $\mathbb{C}[x - x^0]_\ell^p$. Notons encore z^i (resp. $\bar{y}^i$) l'élément de $\mathbb{C}[x - x^0]_\ell^p$ donné par les $(z^{\alpha,i})$ (resp. $(y^{\alpha,i})$), avec $|\alpha| = \ell$, et posons $\omega = \sum dx_i \otimes z^i$, $\pi = \sum dx_i \otimes \bar{y}^i$.

La première condition signifie qu'on a $z^i \in N_\ell(a)^\perp$, ou $\omega \in T^* \otimes N_\ell(a)^\perp$; la seconde qu'on a $d^*\omega = d^*\pi$, donc $\omega - \pi \in d^*\mathbb{C}[x - x^0]_{\ell+1}^p$; la condition pour que l'on puisse trouver un tel ω est donc la suivante :

4.8. — La classe σ de π dans $T^* \otimes \mathbb{C}[x - x^0]_\ell^p / T^* \otimes N_\ell^\perp(a) + d^*\mathbb{C}[x - x^0]_{\ell+1}^p$ est nulle.

On vérifie immédiatement que σ ne dépend que de a, et pas du représentant c choisi ; d'autre part, on a $\mathbb{C}[x - x^0]_\ell^p / N_\ell^\perp(a) = N_\ell(a)^*$, et l'espace considéré est simplement le dual $Z(T \otimes N_\ell(a))^*$ de $Z(T \otimes N_\ell(a))$. Finalement, on a obtenu une classe $\sigma(a) \in Z(T \otimes N_\ell(a))^*$ dont la nullité est nécessaire et suffisante pour que a admette un prolongement à $|Z_{\ell+1}|$.

On pourrait conclure à partir de là en démontrant des analogues de 3.6 et 3.8 avec la cohomologie de Koszul remplacée par la cohomologie de Spencer et τ remplacé par σ. À la présentation près, c'est la démarche de [**Go**]. Ici, je vais faire un peu autrement, en comparant les classes $\sigma(a)$ et $\tau(a)$ qui, par construction, appartiennent toutes deux à $Z(T\otimes N_\ell(a))^*$; plus précisément, je vais démontrer (toujours sous les hypothèses de 3.1) le résultat suivant :

Proposition 4.9. — *On a* $\sigma(a) = -\tau(a)$.

Soient $g_1,\dots,g_n \in \mathcal{O}_{Z_\ell,a}$, vérifiant $\sum \xi_i \delta g_i = 0$; alors $\sum D_i g_i$ ne dépend pas des dérivées d'ordre $\ell+1$, et, par définition, on a

$$\begin{aligned}
\langle \tau(a), \textstyle\sum \xi_i \otimes \delta g_i\rangle &= \sum_i D_i g_i(a) \\
&= \sum_i \Big[\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(a) + \sum_{j,|\alpha|\le \ell-1} \frac{\partial g_i}{\partial y_j^\alpha}(a) y_j^{\alpha+\varepsilon_i}\Big] \\
&= -\sum_i \Big[\sum_{j,|\alpha|=\ell} \frac{\partial g_i}{\partial y_j^\alpha}(a) y_j^{\alpha,i}\Big] \quad \text{d'après } \alpha) \text{ et } \beta) \\
&= -\Big\langle \sigma(a), \textstyle\sum \xi_i \otimes \delta g_i \Big\rangle\ .
\end{aligned}$$

Ceci démontre la proposition.

CHAPITRE III

LE THÉORÈME DE CARTAN-KÄHLER

1. Normes formelles

A). — Je reprends les notations de II.4.1 ; on a donc une dualité entre $\mathbb{C}[\xi]_\ell$ et $\mathbb{C}[x]_\ell$ définie ainsi : si $a = \sum a_\alpha \xi^\alpha$, $b = \sum \frac{1}{\alpha!} b^\alpha x^\alpha$, on a $\langle a, b\rangle = \sum a_\alpha b^\alpha$; en identifiant ξ_i et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a aussi $\langle a, b\rangle = a(b)\big|_{x=0}$.

J'utiliserai les normes suivantes (cf. **[Mal2]**) ; pour $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$, et $b \in \mathbb{C}[x]_\ell$, on pose

$$|b|_r = \sup_\alpha \frac{1}{\ell!} |b^\alpha| r^\alpha \ . \tag{1.1}$$

C'est une norme de type ℓ^∞ ; la norme duale, de type ℓ^1, est donnée par

$$|a|^*_\rho = \ell! \sum |a_\alpha| \rho^\alpha \quad (\rho_i = \frac{1}{r_i}) \ . \tag{1.2}$$

Pour $b \in \mathbb{C}[x]_\ell$, on a les propriétés suivantes :

1.3. — Si $\ell \geq 1$, on a $|b|_r \leq \sum \frac{r_i}{\ell} |\partial_i b|_r$; en particulier $|b|_r \leq \sum r_i |\partial_i b|_r$.

1.4. — $|\partial_i b|_r \leq \frac{k}{r_i} |b|_r$; d'où, par récurrence

$$|\partial^\alpha b|_r \leq \frac{\ell!}{(\ell - |\alpha|)!} \frac{1}{r^\alpha} |b|_r \ .$$

Proposition 1.5. — *Pour $b \in \mathbb{C}[x]_\ell$, $c \in \mathbb{C}[x]_m$, on a $|bc|_r \leq |b|_r |c|_r$.*

Cette proposition résulte immédiatement de l'identité suivante, avec $\gamma \in \mathbb{N}^{\ell+m}$ fixé.

$$\sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ |\alpha|=\ell}} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} = \frac{(\ell+m)!}{\ell! m!} \ . \tag{1.6}$$

En effet, on a $(x+y)^\gamma = \sum\limits_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} x^\alpha y^\beta$; dans cette formule, on prend tous les x_i égaux à u et tous les y_i égaux à 1 ; le premier membre vaut $(u+1)^{\ell+m} = \sum \binom{\ell+m}{k} u^k$. Pour obtenir (1.6), il suffit de comparer les coefficients de u^ℓ dans les deux membres.

B). — Soit maintenant T une indéterminée ; soit $b = \sum b_\ell \in \mathbb{C}[[x]]$, $b_\ell \in \mathbb{C}[x]_\ell$ une série formelle ; on pose

$$|b|_{r,T} = \sum |b_\ell|_r T^\ell \ . \tag{1.7}$$

On utilise dans la suite la notation classique suivante : si l'on a deux séries à termes positifs $u = \sum u_\ell T^\ell$, $v = \sum v_\ell T^\ell$, on écrit $u \ll v$ si, pour tout ℓ, on a $u_\ell \leq v_\ell$.

Les premières propriétés qui suivent sont immédiates. Les suivantes résultent de 1.3 à 1.5

$$|\lambda b|_{r,T} = |\lambda| \ |b|_{r,T}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.8}$$

$$|b+c|_{r,T} \ll |b|_{r,T} + |c|_{r,T} \ .$$

1.9. — Si $b_0 = 0$, on a $|b|_{r,T} \ll \sum r_i T |\partial_i b|_{r,T}$.

1.10. — $|\partial_i b|_{r,T} \ll \frac{1}{r_i} \frac{d}{dT} |b|_{r,T}$.

Proposition 1.11. — *Soient $b^1, \ldots, b^p \in \mathbb{C}[[x]]$, sans terme constant, soit $\Phi = \sum a_\alpha y^\alpha \in \mathbb{C}[[y_1, \ldots, y_p]]$ et soit $\Psi = \sum c_\alpha y^\alpha$ une majorante de Φ (i.e. $|a_\alpha| \leq c_\alpha$ pour tout α). Alors on a*

$$\big|\Phi(b^1, \ldots, b^p)\big|_{r,T} \ll \Psi\big(|b^1|_{r,T}, \ldots, |b^p|_{r,T}\big) \ .$$

Par développement en série, il suffit de voir que, pour $b, c \in \mathbb{C}[[x]]$, on a $|bc|_{r,T} \ll |b|_{r,T} |c|_{r,T}$. Ceci résulte immédiatement de 1.5.

Notons finalement la proposition suivante :

Proposition 1.12. — *Soit $b \in \mathbb{C}[[x]]$. Alors « b converge » équivaut à « $|b|_{r,T}$ converge » (pour un r, ou pour tout r).*

Si b converge, $|b|_{r,T}$ converge à cause de l'inégalité $\alpha! \leq |\alpha|!$. Dans l'autre sens, l'assertion résulte de l'inégalité $\ell!/\alpha! \leq n^\ell$ $(\ell = |\alpha|)$; cette dernière résulte à son tour de la « formule du binôme » $(x_1 + \cdots + x_n)^\ell = \sum\limits_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} x^\alpha$.

Moyennant un choix de norme convenable sur $\mathbb{C}^p$, les résultats précédents s'étendent aux séries appartenant à $\mathbb{C}[[x]]^p$; j'utiliserai ce fait dans la suite sans autre commentaire.

2. Majoration préliminaire

On se place dans la situation des modules involutifs considérée en I.4, le corps de base étant ici $\mathbb{C}$. On écrit donc $A = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \mathbb{C}[\xi]$; $A_\ell = \mathbb{C}[\xi]_\ell$ désigne le sous-espace de A formé des polynômes homogènes de degré ℓ ; on prend M involutif sur A, engendré par $M_0 \simeq \mathbb{C}^p$; on a une suite exacte de modules gradués $0 \to N \to A^p \to M \to 0$, N étant engendré par N_1.

Quitte à faire un changement de base, on peut supposer $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 1-régulier. Reprenons les notations de I.4 : $M_0 = \mathbb{C}^p$ est somme directe de sous-espaces P_j, $\leq j \leq n$, de dimensions respectives α_0^j ; désignant par $\underline{e}_j$ une base de P_j, M est alors défini par les relations I.(4.2) $\xi_i \underline{e}_j = \sum a_{ij}^{k\ell} \xi_k \underline{e}_\ell$, avec $i > j$, $a_{ij}^{k\ell} = 0$ pour $k > j$ et $k > \ell$. On pose encore

$$n_{ij} = \xi_i \otimes \underline{e}_j - \sum a_{ij}^{k\ell} \xi_k \otimes \underline{e}_\ell \quad (i > j) \ . \tag{2.1}$$

Les lignes des n_{ij} sont donc des générateurs de $N_1 \subset A_1^p$ $(= M_0 \otimes A_1)$. On sait par I.5 que les relations entre les (lignes des) n_{ij} sont engendrées par celles de ces relations qui sont linéaires en ξ. On écrira $\sum\limits_{i,j} b_{ij} n_{ij} = 0$ une telle relation (b_{ij} ayant α_0^j colonnes et une ligne), et on choisit une base de ces relations $B^k = (b_{ij}^k)$, $1 \leq k \leq r$.

Comme au §1, on fait maintenant agir ξ_i sur $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]] = \mathbb{C}[[x]]$ par ∂_i ; pour $a \in A$, il est commode d'écrire $a(\partial)$ l'opérateur obtenu par cette action. On considère alors le système différentiel

$$n_{ij}(\partial) y := \partial_i y_j - \sum a_{ij}^{k\ell} \partial_\ell y_k = z_{ij} \ , \tag{2.2}$$

avec $y_j,\ z_{ij} \in P_j \otimes \mathbb{C}[[x]]$.

Désignons par v_j le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ formé des $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient $x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$, et introduisons les « conditions aux limites » suivantes :

$$y_j\big|_{v_j} = u_j, \quad u_j \in P_j \otimes \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_j]] \tag{2.3}$$

et les « conditions de compatibilité »

$$\sum b_{ij}^k(\partial) z_{ij} = 0, \quad 1 \leq k \leq r \ . \tag{2.4}$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Théorème 2.5. — *i) Étant donnés des z_{ij} vérifiant* (2.4), *et des u_j quelconques, le système* (2.2), *avec les conditions aux limites* (2.3) *admet une solution et une seule.*

ii) Il existe $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i > 0$ et $C > 0$ tels qu'on ait, pour tous $y = (y_j)$, $u = (u_j)$ et $z = (z_{ij})$ vérifiant les conditions précédentes, l'inégalité

$$|y|_{r,T} \ll C\big\{|u|_{r,T} + \partial_T^{-1}|z|_{r,T}\big\} \ .$$

En particulier, si u et z convergent, y converge.

Pour ces normes, voir la remarque à la fin du §1 ; d'autre part, pour $\varphi \in \mathbb{C}[[T]]$, $\partial_T^{-1}\varphi$ signifie la primitive sans terme constant.

Démonstration de i). — L'assertion équivaut aux deux suivantes :

a) Pour tout $z = (z_{ij})$ vérifiant (2.4), l'équation (2.2) admet une solution ;

b) L'application $y = (y_j) \mapsto u = (u_j)$ définie par $u_j = y_j|_{v_j}$ est une bijection des solutions de $n_{ij}(\partial)y = 0$ sur $\oplus\, P_j \otimes \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_j]]$.

L'assertion *a)* est un cas particulier de la suivante : supposons qu'on ait une suite exacte de modules gradués $\mathbb{C}[\xi]^r \xrightarrow{B} \mathbb{C}[\xi]^q \xrightarrow{A} \mathbb{C}[\xi]^p$, avec A et B homogènes p. ex. de degré 1. Alors la suite transposée

$$\mathbb{C}[[x]]^p \xrightarrow{A(\partial)} \mathbb{C}[[x]]^q \xrightarrow{B(\partial)} \mathbb{C}[[x]]^r$$

est encore exacte (on écrit ici les éléments de $\mathbb{C}[\xi]^p$ *etc.* en ligne et les actions à droite ; les actions transposées sont écrites à gauche de la manière usuelle).

Ce résultat est immédiat : en regardant degré par degré, on est ramené au cas de la dimension finie.

Pour démontrer *b)*, on remarque que le transposé de la restriction $f \mapsto f|_{v_j} : \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]] \mapsto \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_j]]$ est l'injection évidente $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_j] \longrightarrow \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$. Moyennant quoi, on vérifie sans difficulté que *b)* est l'assertion duale du théorème I.4.3. □

Démonstration de ii). — On va démontrer, par récurrence sur $m \le n$ que l'on peut trouver $(r_1, \dots, r_m)$ tels que $y|_{v_m}$ vérifie les inégalités cherchées. Supposons donc le résultat obtenu pour $m-1$ et $r_1, \dots, r_{m-1}$ obtenus ; montrons que le résultat est vrai pour m, avec les mêmes valeurs de $(r_1, \dots, r_{m-1})$. Pour $y_m, \dots, y_n$, la majoration est évidente, puisqu'elle est donnée par les conditions aux limites $y_j|_{v_m} = z_j$.

Pour $(y_0, \dots, y_{m-1})$, on utilise l'hypothèse de récurrence, et les équations $\partial_m y_j = \sum a_{mj}^{k\ell}\partial_k y_\ell$; en posant $Y = (y_0, \dots, y_{m-1})$ et en changeant les notations, on est ramené à la situation élémentaire suivante : on considère le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x_m} - \sum\limits_1^{m-1} A_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = Z \\ Y|_{x_m=0} = U \end{cases}$$

avec $Y, Z \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]^s$, $U \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_{m-1}]]^s$, A_i des matrices (s,s) constantes. Alors on a le résultat suivant :

Lemme 2.6. — *i) Pour U et Z donnés, ce système admet une solution Y unique ;*

ii) Pour $r_1, \ldots, r_{m-1} > 0$, donnés, il existe $r_m > 0$ et $C > 0$ tels qu'on ait, pour tout (U, Z) : $|Y|_{r,T} \ll C\{|U|_{r,T} + \partial_T^{-1}|Z|_{r,T}\}$.

L'assertion *i)* est immédiate ; pour démontrer *ii)*, on se ramène au cas où $U = 0$ en posant $Y = U + Y_1$, $U_1 = 0$, $Z_1 = Z + \sum A_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$ (noter qu'on a $\left|\frac{\partial U}{\partial x_i}\right|_{r,T} \ll \frac{1}{r_i}\frac{d}{dt}|U|_{r,T}$).

Désignant par ∂_m^{-1} la primitive par rapport à ∂_m qui s'annule sur $x_m = 0$, on est ramené à l'équation $Y - \sum A_i \partial_i \partial_m^{-1} Y = \partial_m^{-1} Z$; on a $|\partial_i \partial_m^{-1} Y|_{r,T} \ll \frac{r_m}{r_i}|Y|_{r,T}$; en choisissant r_m assez petit, on pourra s'arranger pour que la norme de $\sum A_i \partial_i \partial_m^{-1}$ soit inférieure à $1/2$; donc l'équation aura une solution unique Y vérifiant $|Y|_{r,T} \ll 2|\partial_m^{-1} Z|_{r,T} = 2r_m \partial_T^{-1}|Z|_{r,T}$; le résultat s'ensuit. □

3. Le théorème de Cartan-Kähler

Pour énoncer les résultats de ce paragraphe et du suivant, il sera commode d'utiliser la terminologie suivante :

3.1. — Soit (Z_ℓ) un système différentiel d'ordre ℓ (cf. II.1), et soit $a \in |Z_\ell|$. On dit que a est *prolongeable*, si pour tout $k \geq 1$, il existe $b \in |Z_{\ell+k}|$ de projection a. On dit qu'il est *fortement prolongeable* s'il est prolongeable et si tous ses prolongements sont eux-mêmes prolongeables.

D'une façon imagée, « en prolongeant a n'importe comment, on pourra toujours continuer ».

En pratique, pour vérifier la condition « fortement prolongeable », on devra supposer que (Z_ℓ) vérifie les conditions du théorème II.3.8 ou, ce qui revient essentiellement au même, qu'il est involutif au sens de II.3.9. Je ne connais pas d'autre cas où la condition de fort prolongement soit vérifiée ; son emploi par exemple dans les théorèmes 3.2 et 4.1 ci-dessous est donc une commodité d'exposition plus qu'une véritable généralisation ; cf. toutefois la situation considérée par Morimoto dans **[Mo2]** et **[Mo3]**.

Cela posé, considérons un système $(Y_1, \mathcal{I})$ d'ordre un et soit a un point de $|Z_1|$ (les notations sont celles de II.1) ; faisons les hypothèses suivantes :

i) *Le jet a est fortement prolongeable.*

ii) *Le module caractéristique $M(a)$ est involutif.*

Pour énoncer le résultat, nous reprenons les notations du §2 : on choisit les coordonnées pour que $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ soit 1-régulier pour $M(a)$, et que dans la décomposition $M_0(a) = \oplus P_i$, P_i soit engendré par les composantes de δy_i (y_i variable vectorielle de dimension α_0^i). Supposons aussi pour simplifier que les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}^{\varepsilon_i})$ de a soient nulles, et désignons, comme au §2, par v_i le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ défini par $x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$. Le théorème est alors le suivant :

Théorème 3.2. — *Sous les hypothèses 3.1, i) et 3.1, ii) et avec les notations précédentes, on considère les conditions aux limites $y_i|_{v_i} = u_i$, avec $u_i \in P_i \otimes \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_i]]$ et $j_0^1 u_i = 0$.*

Alors, le système $(Y_1, \mathcal{I})$ admet une solution unique $y \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]^p$ vérifiant $j_0^1 y = 0$, et les conditions aux limites précédentes. De plus, si les u_i convergent, y converge.

Pour écrire un système de générateurs de $\mathcal{I}$ au voisinage de 0, on relève d'abord les équations de $M(a)$; avec les notations du §2, et en posant $Q = (n_{ij}) \in A_1^{pq}$, avec $q = n\alpha_0^0 + (n-1)\alpha_0^1 + \cdots + \alpha_0^{n-1}$, on trouve un système

$$Q(\partial)y = A(x,y) + \sum B_i(x,y)\partial_i y + C(x,y,\partial_i y) \ , \tag{3.3}$$

avec $A(0,0) = 0$, $B_i(0,0) = 0$, C ne contenant que des termes de degré ≥ 2 par rapport aux $\partial_i y$ dans son développement en série au voisinage de 0.

À ces équations, on doit ajouter éventuellement des équations du type

$$F(x,y,\partial_i y) = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial F}{\partial y^i}(0) = 0 \quad \text{(j'écris « } i \text{ » pour « } \varepsilon_i \text{ »)} \ . \tag{3.4}$$

Montrons d'abord qu'on peut oublier ces dernières équations : soit $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ l'idéal engendré par les (lignes des) équations (3.3). On a le résultat suivant :

Lemme 3.5. — *Le jet $a = 0$ est fortement prolongeable relativement à $\mathcal{I}'$, et ses prolongements relativement à $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ coïncident.*

Le lemme se voit par récurrence ; supposons-le démontré à l'ordre k, et soit b un prolongement d'ordre k de a ; les prolongements c à l'ordre $(k+1)$ de b relativement à $\mathcal{I}$ forment un espace linéaire affine non vide, contenu dans l'espace des prolongements relativement à $\mathcal{I}'$; ces deux espaces ont même dimension puisque les équations déduites de *ii)* ne font pas intervenir les coefficients de c autres que ceux de b. Donc ces deux espaces coïncident.

Dans la suite, on pourra donc supposer $\mathcal{I}$ défini par (3.3). Notons $y(\ell)$ la composante homogène de degré ℓ de y ; notons aussi $R(y)$ le second membre de (3.3) ; sa composante homogène de degré ℓ ne dépend que des $y(k)$, $k \leq \ell$. Avec ces notations, l'équation (3.3) équivaut à la suite d'équations

$$Q(\partial)[y(\ell+1)] = R(y)(\ell) \ . \tag{3.6}$$

Supposons déjà trouvés $y(2), \ldots, y(\ell)$ vérifiant (3.6) pour $k \leq \ell - 1$ et les conditions aux limites : « $y_i|_{v_i} = u_i$ à l'ordre ℓ ». Alors l'hypothèse de fort prolongement montre l'existence d'un $y(\ell+1)$ vérifiant (3.6) ; l'existence et l'unicité d'un tel prolongement vérifiant en outre les conditions aux limites résulte alors de 2.5, *i)*.

Avec les notations de 2.5, cet $y(\ell+1)$ vérifiera

$$|y(\ell+1)|_r \leq C\big[|u(\ell+1)|_r + \frac{1}{\ell}|R(y)(\ell)|_r\big] \ , \quad \text{avec } r \text{ et } C \text{ indépendants de } \ell.$$

Montrons que ceci entraîne la dernière assertion de l'énoncé. Quitte à changer C, l'inégalité précédente entraîne

$$\sum |(\partial_i y)(\ell)|_r \leq C\big[\ell |u(\ell+1)|_r + |R(y)(\ell)|_r\big] \ .$$

Passons aux normes formelles ; posons $f(T) = |y|_{r,T}$, $g(T) = \sum |\partial_i y|_{r,T}$, et $\delta(T) = C \sum \ell |u(\ell+1)|_r T^\ell$; on aura

$$g(T) \ll \delta(T) + C|R(y)|_{r,T} \ .$$

Utilisons maintenant 1.12 ; on trouve qu'il existe des séries convergentes à termes positifs de 2 (resp. 3) variables $\alpha(v_1, v_2)$, $\beta(v_1, v_2)$ [resp. $\gamma(v_1, v_2, v_3)$] avec $\alpha(0,0) = 0$, $\beta(0,0) = 0$, γ d'ordre ≥ 2 en v_3 telles qu'on ait

$$|A(x,y)|_{r,T} \ll \alpha(T, f(T))$$
$$\sum |B_i(x,y)\partial_i y|_{r,T} \ll \beta\big(T, f(T)\big) g(T)$$
$$|C(x,y,\partial_i y)|_{r,T} \ll \gamma\big(T, f(T), g(T)\big) \ .$$

Enfin, comme $y(0) = 0$, quitte à changer la valeur de C, on a $f(T) \ll CTg(T)$ (cf. (1.8)) ; on aura donc

$$|R(y)|_{r,T} \ll \alpha\big(T, CTg(T)\big) + \beta\big(T, CTg(T)\big) g(T) + \gamma\big(T, CTg(T), g(T)\big) \ .$$

Posons $\zeta(v,w) = \alpha(v, Cvw) + \beta(v, Cvw)w + \gamma(v, Cvw, w)$; ζ est une série convergente à termes positifs avec $\zeta(0,0) = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial w}(0,0) = 0$; on a

$$g(T) \ll \delta(T) + C\zeta\big(T, g(T)\big) \ , \quad \text{avec } g(0) = \delta(0) = 0, \ \delta \text{ à termes positifs.}$$

Supposons les u_i convergents, donc δ convergent. Montrons que la majoration précédente entraîne la convergence de g : d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $h(T) = \delta(T) + C\zeta\big(T, h(T)\big)$ a une unique solution vérifiant $h(0) = 0$, et cette solution converge ; on vérifie par récurrence sur ses coefficients que ceux-ci sont positifs, et qu'on a $g(T) \ll h(T)$. Ceci entraîne le résultat cherché.

Remarque 3.7. — Le « théorème de Cartan-Kähler » usuel est l'énoncé 3.2 sous les hypothèses un peu plus fortes suivantes :

i) Z_1 est involutif au voisinage de a ;

ii) la projection de Z_1 (variétés des zéros de $\mathcal{I}$) sur l'espace Y_0 des variables x_i, y_j est submersive.

Remarquons aussi que dans ce cas, on a $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$ [autrement dit $\mathcal{I}$ est engendré par les équations (3.3)]. Cela résulte immédiatement des propriétés de rang constant impliquées par *i)* et *ii)*.

4. Réduction à l'ordre un

Les notations sont celles de II.1. La « réduction à l'ordre un » se définit intuitivement par le procédé classique qui consiste à rajouter les y^α, $1 \le |\alpha| \le \ell - 1$ comme nouvelles fonctions inconnues, avec les équations $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \le \ell - 2$, et $\frac{\partial y^{\alpha+\varepsilon_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial y^{\alpha+\varepsilon_j}}{\partial x_i}$, $|\alpha| = \ell - 2$.

De façon plus précise, soit $(Y_\ell, \mathcal{I})$ un système différentiel, et soit Z_ℓ l'espace analytique correspondant ; on note U l'espace $\mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\le \ell-1} \mathbb{C}^{p(n+1)}$ de coordonnées $(x, \bar{y}^\alpha, \bar{y}^{\alpha,i})$, $|\alpha| \le \ell - 1$, $1 \le i \le n$ (on écrit « i » pour « ε_i ») ; on note encore j_1 l'application $Y_\ell \to U$ définie par $\bar{y}^\alpha = y^\alpha$, $\bar{y}^{\alpha,i} = y^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \le \ell - 1$ (en termes de jets, c'est l'application $J_\ell(Y) \to J_1(J_{\ell-1}(Y))$ considérée en II.4).

Cette application donne un isomorphisme d'espaces analytiques

$$j_1 : (Y_\ell, \mathcal{O}_{Y_\ell}) \simeq \widetilde{Z}_1 = \big(|\widetilde{Z}_1|, \mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1}\big),$$

avec $|\widetilde{Z}_1| = j_1(Y_\ell)$, $\mathcal{O}_{\widetilde{Z}_1}$ le quotient de $\mathcal{O}_U$ par l'idéal engendré par les $\bar{y}^{\alpha,i} - \bar{y}^{\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \le \ell - 2$, et $\bar{y}^{\alpha+\varepsilon_i,j} - \bar{y}^{\alpha+\varepsilon_j,i}$, $|\alpha| = \ell - 2$. On voit aussi facilement que, si l'on désigne par $(\widetilde{Z}_k)$ les prolongements de $(\widetilde{Z}_1)$, cet isomorphisme se prolonge en une famille d'isomorphismes $j_{k+1} : Y_{\ell+k} \simeq \widetilde{Z}_{k+1}$ qui commutent aux D_i.

Soit alors $\overline{Z}_1$ le sous-espace analytique de $\widetilde{Z}_1$ image de Z_ℓ par l'isomorphisme précédent, et soient $(\overline{Z}_k)$ les prolongements du système $(\overline{Z}_1)$; on aura encore des isomorphismes $j_{k+1} : Z_{\ell+k} \simeq \overline{Z}_{k+1}$, commutant aux D_i.

Dans cette correspondance, les modules caractéristiques se correspondent de la manière suivante, légèrement différente du décalage considéré au Chapitre I ; soit M (resp. $\overline{M}$) le module caractéristique de (Z_ℓ) (resp. $(\overline{Z}_1)$] ; alors, on a $\overline{M}_k = M_{\ell+k-1}$, $k \ge 1$, et $\overline{M}_0 = M_0 \oplus \cdots \oplus M_{\ell-1}$, l'action des ξ_i étant nulle sur $M_0 \oplus \cdots \oplus M_{\ell-2}$, et étant l'action habituelle sinon (ceci se voit facilement, soit par la définition des modules caractéristiques à partir des différentielles relatives, soit par une vérification directe). On en déduit ceci : pour $a \in |Z_\ell|$, et $\bar{a} = j_1(a)$, $M(a)$ est ℓ-involutif si et seulement si $\overline{M}(a)$ est involutif ; en particulier on a le résultat suivant : *(Z_ℓ) est involutif si et seulement si $(\overline{Z}_1)$ est involutif.*

Le résultat est alors le suivant :

Théorème 4.1. — *Soit (Z_ℓ) un système différentiel, et soit $a \in |Z_\ell|$. On suppose a fortement prolongeable. Alors a admet un prolongement d'ordre infini convergent.*

Soit $M(a)$ le module caractéristique de (Z_ℓ) en a ; il existe k tel que $M(a)$ soit $(\ell+k)$-involutif ; en remplaçant a par un de ses prolongements d'ordre k, on pourra supposer $M(a)$ ℓ-involutif ; en se réduisant à l'ordre un, on est alors ramené au théorème 3.2.

En fait, la démonstration précédente donne un résultat plus fort, à savoir une description en termes de conditions aux limites, modulo un nombre fini de termes, des solutions prolongeant un jet fortement prolongeable. Je n'examinerai pas le cas général et me contenterai d'un exemple classique dont j'aurai besoin par la suite.

***Exemple 4.2* (Le théorème de Cauchy-Kovalevski)**

Soit f une fonction holomorphe de (x, y^α), $x \in \mathbb{C}^n$, $y^\alpha \in \mathbb{C}^p$, $|\alpha| \leq \ell$, $\alpha \neq (0, \ldots, 0, \ell)$, définie au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y}^\alpha)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^p$. Désignons par v le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ défini par $x_n = 0$. On considère le système différentiel $\partial_n^\ell y = f(x, \partial^\alpha y)$, avec les conditions aux limites $\partial_n^k y|_v = u_k \in \mathbb{C}[[x_1 - \bar{x}_1, \ldots, x_n - \bar{x}_n]]^p$, $0 \leq k \leq \ell - 1$; on suppose les u_k choisis de manière à avoir $\partial^\alpha y(\bar{x}) = \bar{y}^\alpha$, $|\alpha| \leq \ell$, $|\alpha| \neq (0, \ldots, 0, \ell)$. Dans ces conditions, on a le résultat classique suivant :

Le système précédent a une solution unique. De plus si les u_i convergent, y converge..

L'existence et l'unicité de y se voient facilement par récurrence ; pour établir la convergence, on peut raisonner directement comme en 3.2 en établissant préalablement une généralisation de 2.6 aux systèmes d'ordre n (ceci est essentiellement la démonstration classique de ce théorème, par la méthode des fonctions majorantes).

Une autre méthode, un peu plus lourde, mais dans l'esprit du présent paragraphe, consiste à faire une réduction à l'ordre un. Si $\bar{a}$ est le point du nouveau système correspondant à $a = \big(\bar{x}, \bar{y}^\alpha, f(\bar{x}, \bar{y}^\alpha)\big)$, on voit qu'on est dans les conditions d'application de 3.2, et qu'on peut prendre la décomposition $\overline{M}_0(\bar{a}) = \oplus \overline{P}_i$ suivante : $\overline{P}_0$ est engendré par les $\delta\bar{y}^\alpha$, $|\alpha| \leq \ell - 2$; $\overline{P}_1$ par les $\delta\bar{y}^\alpha$, $|\alpha| = \ell - 1$, $\alpha_1 \neq 0$, $\overline{P}_2$ par les $\delta\bar{y}^\alpha$, $|\alpha| = \ell - 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ et ainsi de suite jusqu'à $\overline{P}_{n-2}$; enfin $\overline{P}_{n-1}$ est engendré par les δy^α, $|\alpha| = \ell - 1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-2} = 0$, et $\overline{P}_n = 0$. Les conditions aux limites du nouveau système s'expriment immédiatement en fonction des u_i, et le résultat s'ensuit.

5. Forme normale d'un système involutif

On a déjà vu des résultats dans ce sens à la remarque 3.7. Pour obtenir des résultats plus précis, je me restreindrai ici aux systèmes différentiels $(Y_1, \mathcal{I})$ d'ordre un qui possèdent les propriétés suivantes :

i) Le système est involutif.

ii) Il est *quasi-linéaire*, c'est-à-dire qu'on a $Y_1 = Y_0 \times \mathbb{C}^{np}$, Y_0 un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, et que $\mathcal{I}$ est engendré par des équations linéaires affines par rapport aux y^i_j (ici encore, j'écris « i » pour « ε_i »).

iii) La projection $|Z_1| \to Y_0$ est une submersion (je rappelle que, en vertu de *i)*, Z_1 est lisse).

Montrons d'abord que tout système (Z_ℓ) involutif peut se ramener localement à un système du type précédent : ceci nous montrera que les résultats de ce paragraphe peuvent s'appliquer à tout système involutif, avec toutefois les mêmes réserves qu'au début de I.4. Tout d'abord, en prenant le premier prolongement $(Z_{\ell+1})$ de (Z_ℓ), et en le réduisant à l'ordre un, on est ramené à un système d'ordre un $(Y_1, \mathcal{I})$ qui satisfait *i)* et *ii)*. Soit p la projection $Z_1 \to Y_0$; elle est localement (sur Y_0) de rang constant à cause de *i)* et *ii)*, donc son image est une sous-variété lisse Z_0 de Y_0 ; d'autre part la projection $Z_1 \to X = \mathbb{C}^n$ est une submersion [utiliser la surjectivité de $|Z_2| \to |Z_1|$, et raisonner comme en II.4.4]. Donc $Z_0 \to X$ est une submersion. Au voisinage d'un point $a \in Z_0$, on peut donc supposer Z_0 défini par $y_{q+1} = \cdots = y_p = 0$. Pour $j \geq q+1$, $1 \leq i \leq n$, on a $y^i_j \in \mathcal{I}$ (utiliser la surjectivité de $|Z_2| \to |Z_1|$ et la lissité de Z_1) ; alors, en faisant $y_j = y^i_j = 0$, $j \geq q+1$, on est ramené à un système en $y_1, \ldots, y_q$, vérifiant *i), ii),* et *iii)*.

Prenons donc un système $(Y_1, \mathcal{I})$ vérifiant les trois conditions précédentes, et plaçons-nous au voisinage d'un point $a \in Y_0$, qu'on peut supposer être le point $(0, 0)$. Soit M son module caractéristique. Comme au §2, on peut supposer que $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est 1-régulier pour $M(a)$; alors, il est 1-régulier pour $M(b)$, b voisin de a, et la dimension de $M_1(b)/(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1})M_0(b)$ est localement constante pour tout i au voisinage de a [cf. remarque à la fin de II.2].

On reprend maintenant, « avec paramètres dans Y_0 », les constructions de I.4 : soit K_i l'annulateur de $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ dans $M/(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1})M$; on a $K_0 \subset \cdots \subset K_{n+1} = M_0$; soit P_i un supplémentaire de K_i dans K_{i+1} ; c'est un fibré vectoriel sur Y_0 de dimension α_0^i. On peut supposer les coordonnées choisies pour qu'une base de $P_j(a)$ soit δy_j, (y_j une coordonnée vectorielle de dimension α_0^j) ; alors, au voisinage de a, une base de P_j sera $\underline{e}_j = \delta y_j + \sum c_{jk}(x,y)\delta y_k$, avec $c_{jk}(0,0) = 0$; en modifiant au besoin les P_j, on peut même supposer qu'on a $c_{jk} = 0$ pour $k \leq j$.

Les équations de M s'écrivent alors comme I.(4.2)

$$\xi_i \underline{e}_j = \sum a_{ij}^{k\ell}(x,y)\xi_k \underline{e}_\ell \ . \tag{5.1}$$

Les $a_{ij}^{k\ell}$ sont soumis, en chaque point $b = (x,y) \in Y_0$ voisin de a, aux conditions décrites en I.4 pour que $M(b)$ soit involutif.

Le système différentiel s'écrit alors ainsi

$$\overline{\partial}_i Y_j - \sum a_{ij}^{k\ell} \overline{\partial}_k Y_\ell = f_{ij}(x,y) \tag{5.2}$$

avec les notations suivantes : on pose $Y_j = y_j + \sum c_{jk}(x,y) y_k$, et $\overline{\partial}_i Y_j = \partial_i y_i + \sum c_{jk}(x,y)\partial_i y_k$ (*i.e.* on ne fait pas opérer les dérivations sur les coefficients c_{jk}).

Pour écrire l'involutivité, il reste à écrire l'intégrabilité, c'est-à-dire la surjectivité $|Z_2| \to |Z_1|$ (toutes les autres conditions sont maintenant satisfaites). On le fait en écrivant la nullité de la torsion comme en II.3 : en principe, ceci se fait explicitement car les calculs de I.4 permettent de déterminer $Z(T \otimes N_1)$; le problème réside dans la longueur des calculs, qui croît très rapidement avec n et p, et la difficulté d'en donner une interprétation simple.

Traitons ici le premier exemple non trivial, à savoir le cas $n = 2$, $\alpha_0^0 = \alpha_0^1 = 1$, $\alpha_0^2 = 0$. En changeant un peu les notations, le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_1 y_0 + c\partial_1 y_1 = f \\ \partial_2 y_0 + c\partial_2 y_1 = g \\ \partial_2 y_1 + b\partial_1 y_1 = h \end{cases} \tag{5.3}$$

avec b, c, f, g, h dépendant de $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_0, y_1)$, et $c(0) = 0$. Ici, y_0 et y_1 sont scalaires. Les conditions d'involutivité de M sont triviale. Pour écrire l'intégrabilité, on part de l'unique relation $\xi_2\xi_1(\delta y_0 + c\delta y_1) - \xi_1\xi_2(\delta y_0 + c\delta y_1) =$

0 ; en la relevant, on est amené à écrire que la relation

$$D_2 f - D_1 g = (D_2 c)\partial_1 y_1 - (D_1 c)\partial_2 y_1$$

est conséquence de (5.3).

En faisant le calcul, on trouve qu'on doit avoir les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_1} h + \frac{\partial c}{\partial y_0} f h + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_0}(g - ch) + \frac{\partial f}{\partial y_1} h - \frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial g}{\partial y_0} f = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} + \frac{\partial c}{\partial y_0} g + \frac{\partial c}{\partial x_1} b + \frac{\partial c}{\partial y_0} f b - \frac{\partial f}{\partial y_0} cb + \frac{\partial f}{\partial y_1} b - \frac{\partial g}{\partial y_0} c + \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0 \ . \end{cases}$$

Ici, le théorème de Cartan-Kähler fera intervenir les conditions aux limites : $y_0(0,0)$ et $y_1(x_1, 0)$ donnés.

Conditions d'involutivité et conditions d'intégrabilité 5.4

Dans le cas des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, il apparaît une analogie entre les conditions d'intégrabilité des systèmes différentiels et les conditions d'involutivité des modules gradués. Posons $A = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ et désignons par A_ℓ le sous-espace des polynômes de degré $\leq \ell$ (la notation diffère ici de celle qui a été utilisée antérieurement). Modulo le changement de notation $\partial_i \to \xi_i$ et une traduction évidente, un système différentiel linéaire (sans second membre) à coefficients constants d'ordre ℓ peut être défini comme un sous-espace vectoriel B_ℓ de A_ℓ^p ; ses prolongement seront les $B_{\ell+k} = A_k B_\ell \subset A_{k+\ell}^p$; posant $B = \cup B_{\ell+k}$, la question de l'intégrabilité revient à comparer sur B le filtration B_k et la filtration $B'_k = B \cap A_k^p$ ($k \geq \ell$; on convient qu'on a $B_k = B'_k = 0$ sinon).

Le module des symboles est ici le module gradué $\overline{B}$ défini par $\overline{B}_k = B_k / B_k \cap A_{k-1}^p$; c'est aussi le sous-module gradué de A^p engendré par $\overline{B}_\ell$. Le module caractéristique est $\overline{C} = A^p/\overline{B}$ (on identifie de la façon évidente le module filtré A et son gradué). Le théorème II.3.8 s'énonce alors ainsi : supposons qu'on ait $H_{2,k}(\overline{C}) = 0$, $k \geq \ell$, et $B_{\ell+1} \cap A_\ell^p = B_\ell$; alors, pour tout $k \geq \ell$ on a $B_{k+1} \cap A_k^p = B_k$; donc les deux filtrations coïncident ; je laisse le lecteur spécialiser la démonstration à ce cas particulier.

L'analogie dont je parlais plus haut apparaît lorsqu'on interprète les choses en termes de *modules de Rees* : on pose $\widetilde{A} = \underset{k \geq 0}{\oplus} t^k A_k$, $\widetilde{B} = \oplus t^k B_k$, et $\widetilde{C} = \widetilde{A}^p / \widetilde{B}$. On a $\widetilde{A} = \mathbb{C}[t, \tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n]$, avec $\tilde{\xi}_i = t\xi_i$; $\widetilde{B}$ et $\widetilde{C}$ sont des modules homogènes sur $\widetilde{A}$ et $\overline{C} = \widetilde{C}/t\widetilde{C}$.

La condition : $B_{k+1} \cap A_k^p = B_k$ est équivalente à l'injectivité de t sur $\widetilde{C}_k$; on déduit immédiatement de là le résultat suivant : *pour que le système différentiel défini par B_ℓ soit involutif, et que $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ soit ℓ-régulier pour $\overline{C}$, il faut et il suffit que $\widetilde{C}$ soit ℓ-involutif, et que $(t, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n)$ soit ℓ-régulier.*

De ce point de vue, le lecteur pourra constater que la démonstration de II.3.8 dans le cas particulier considéré ici est identique à la démonstration du théorème I.3.1. Il pourra aussi vérifier que, dans le cas d'un système linéaire à coefficients constants sans second membre, l'exemple (5.3) se réduit à un cas particulier de l'exemple I.4.7 traité à la fin de I.4.

Bien entendu, pour $k \gg 0$, $\widetilde{C}_{\ell+k}$ sera involutif ; mais le système défini par $B_{\ell+k}$ ne sera pas nécessairement involutif (la condition que t soit régulier n'est pas forcément satisfaite). Par contre, pour $k \gg 0$, $B'_{\ell+k}$ sera involutif, (puisque t sera ici régulier, et le module $\widetilde{C}'$ correspondant à B' involutif). Par conséquent, *il existe k et $k_1 \geq k$ tels que $B_{\ell+k_1} \cap A^p_{\ell+k}$ définisse un système involutif.* Nous verrons au prochain chapitre dans quelle mesure cette propriété s'étend aux systèmes différentiels généraux.

CHAPITRE IV

D-VARIÉTÉS

Dans ce chapitre sont rappelées les principales définitions relatives aux D-variétés ; ces définitions figurent dans [**Mal4**] dont la lecture n'est pas supposée. L'énoncé principal, relatif à « l'involutivité générique », sera démontré au chapitre suivant.

Quelques points de terminologie :

i) En accord avec [**Mal4**] et [**Mal5**], j'appelle à partir d'ici variété ($\mathbb{C}$-analytique) ce que la littérature, à commencer par [**Gr**], appelle « espace $\mathbb{C}$-analytique ». C'est sans doute contraire à l'usage de la géométrie algébrique où les variétés sont supposés réduites, voire irréductibles ; c'est encore plus contraire à l'usage en géométrie analytique où les variétés sont généralement supposées lisses (= non-singulières, en particulier réduites). Mais j'ai trouvé que l'emploi de deux mots différents (« variétés » et « espaces ») pour essentiellement les mêmes objets ne se justifiait pas.

ii) En accord avec [**Mal5**], j'appelle module caractéristique et variété caractéristique ce qui dans [**Mal4**] est appelé module ou variété caractéristique stricte (la notion plus faible, appelée caractéristique dans le dernier article ne servira pas ici).

1. Variétés affines

1.1. — Soit Y une variété $\mathbb{C}$-analytique ; on note $|Y|$ son espace topologique sous-jacent (on écrira quelquefois Y, si cela ne crée pas de confusion), et on note $\mathcal{O}_Y$ son faisceau structural. Une variété affine Z au-dessus de Y est l'espace annelé $(Y, \mathcal{A})$ défini par une $\mathcal{O}_Y$-algèbre localement de présentation finie, c'est-à-dire s'écrivant sur tout ouvert assez petit $U \subset |Y|$ sous la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y[t_1, \ldots, t_n]/(f_1, \ldots, f_m)$, avec $f_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y[t_1, \ldots, t_n])$.

Soient Z et Z' deux variétés affines respectivement au-dessus de Y et Y', d'anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$; soit u un morphisme $Y \to Y'$ défini par $u = (u_0, u_1)$, u_0 une application continue $|Y| \to |Y'|$, u_1 un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (avec unité) $u^{-1}\mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_Y$. Un morphisme $V : Z \to Z'$ au-dessus de u est un morphisme d'algèbres (avec unité) au-dessus du précédent : $u^{-1}\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$; le plus souvent, on aura $Y = Y'$, $u = \mathrm{id}$. En particulier, on a un morphisme canonique $Z \to Y$, défini par la flèche $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{A}$.

On écrira parfois $\mathcal{O}_Z$ pour $\mathcal{A}$, mais il faut faire attention qu'il s'agit d'un faisceau d'anneaux sur $|Y|$. D'autre part, on note Z^{an} l'espace analytique $\operatorname{specan} Z$ **[Ho]** ; on a un morphisme canonique d'espaces annelés $Z^{\mathrm{an}} \to Z$ défini par la projection $\pi : |Z^{\mathrm{an}}| \to Y$ et l'application $\pi^{-1}\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}}$ qui intervient dans la définition de specan.

J'écrirai souvent $|Z|$ pour $|Z^{\mathrm{an}}|$. Les principales propriétés que j'aurai à utiliser sont énoncées ci-dessous. Pour ne pas rompre le fil de l'exposé, je renvoie leur démonstration en appendice.

Dans ce qui suit, je dirai systématiquement idéal, module, *etc.* pour faisceau d'idéaux, de modules, *etc.*

i) La $\mathcal{O}_Y$-algèbre $\mathcal{A}$ est cohérente, *i.e.* tout idéal localement de type fini est localement de présentation finie. Appelant « cohérents » de tels idéaux, et plus généralement des $\mathcal{A}$-modules localement de présentation finie, on a la propriété suivante : toute suite croissante d'idéaux cohérents et, plus généralement de sous-modules cohérents d'un $\mathcal{A}$-module cohérent fixé est localement stationnaire.

ii) Soit N un sous-module cohérent de $\mathcal{A}^p$, et posons $N^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}} \underset{\pi^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi^{-1}N$; soit $y \in |Y|$ et soit $f \in \mathcal{A}_y^p$; pour qu'on ait $f \in N_y$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage U de y tel que, pour tout $z \in \pi^{-1}U$, on ait $f \in N_z^{\mathrm{an}}$.

Soit maintenant M un $\mathcal{A}$-module cohérent, et posons encore

$$M^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{Z^{\mathrm{an}}} \underset{\pi^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \pi^{-1}M \ ;$$

prenant localement une présentation de M, on déduit du résultat précédent que l'application naturelle $M \to \pi_* M^{\mathrm{an}}$ est injective.

iii) Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\mathcal{A}$ et soit $\operatorname{rac}\mathcal{I}$ sa racine, *i.e.* l'idéal $y \mapsto \operatorname{rac}\mathcal{I}_y$. Alors $\operatorname{rac}\mathcal{I}$ est cohérent, et l'on a $(\operatorname{rac}\mathcal{I})^{\mathrm{an}} = \operatorname{rac}(\mathcal{I}^{\mathrm{an}})$.

Les deux propriétés précédentes, combinées avec le « Nullstellensatz » usuel en géométrie analytique en donnent la version « mixte » suivante : si $\mathcal{I}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{A}$, alors $f \in \mathcal{A}_y$ appartient à $\operatorname{rac}\mathcal{I}_y$ si et seulement si f

s'annule sur $V \cap \pi^{-1}(U)$, $V \subset |Z^{\mathrm{an}}|$ l'ensemble des zéros de $\mathcal{I}$ (*i.e.* celui de $\mathcal{I}^{\mathrm{an}}$), U un voisinage de y dans $|Y|$.

Ce qui précède permet de définir Z^{red} comme la variété affine au-dessus de Y, et même au-dessus de Y^{red}, associée à l'anneau $\mathcal{A}^{\mathrm{red}} = \mathcal{A}/\operatorname{rac}(0)$, et au morphisme $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{red}}} = \mathcal{O}_Y/\operatorname{rac}(0) \to \mathcal{A}^{\mathrm{red}}$. On a $(Z^{\mathrm{red}})^{\mathrm{an}} = (Z^{\mathrm{an}})^{\mathrm{red}}$; j'omets les détails.

iv) Soient Z et Z' deux variétés affines au-dessus de Y, soient π et π' les projections canoniques et soit $\psi : Z \to Z'$ un morphisme au-dessus de Y. On dira dans cette situation que Z est une *variété affine au-dessus* de Z'. Ce qui a été dit plus haut peut être répété dans cette situation. En particulier, notons $\widetilde{Z} = Z \underset{Z'}{\times} Z'^{\mathrm{an}}$ la variété affine au-dessus de Z'^{an} d'anneau $\mathcal{O}_Z \underset{\mathcal{O}_{Z'}}{\otimes} \mathcal{O}_{Z'^{\mathrm{an}}}$ (j'omets les π'^{-1}). Alors, on a $\widetilde{Z}^{\mathrm{red}} = (Z^{\mathrm{red}})^{\sim}$, cette dernière variété étant définie, par exemple, comme étant $Z^{\mathrm{red}} \underset{Z'}{\times} Z'^{\mathrm{an}}$ (on obtient le même résultat en remplaçant Z' par Z'^{red}).

Disons d'autre part que Z *domine* Z', ou que le morphisme $Z \to Z'$ est *dominant* si $\mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_Z$ est injectif. En particulier, Z domine Y si $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Z$ est injectif. Si Z domine Z', Z^{red} domine Z'^{red} et $Z \underset{Z'}{\times} Z'^{\mathrm{an}}$ domine Z'^{an}.

Provariétés affines 1.2. — Soit Y_0 une variété analytique ; un « système projectif de variétés affines au-dessus de Y_0 » est une famille $Y_k \xrightarrow{\psi_k} Y_0$ de variétés affines au-dessus de Y_0 (k entier ≥ 1) avec une famille de morphismes $\pi_k : Y_k \to Y_{k-1}$ (en particulier, on a $\pi_1 = \psi_1$). Lorsque tous ces morphismes sont dominants, on dira qu'on a une *provariété affine* $Y = \{Y_k\}$ au-dessus de Y_0 et on pose $\mathcal{O}_Y = \varinjlim \mathcal{O}_{Y_k}$.

On note Y^{red} la provariété affine définie par les Y_k^{red} et les flèches évidentes. D'autre part, un système projectif $\{Z_k\}$ de variétés affines au-dessus d'une variété analytique Z_0 définit une provariété affine de la manière suivante : soit $\mathcal{I}_k = \bigcup_\ell \ker(\mathcal{O}_{Z_k} \to \mathcal{O}_{Z_{k+\ell}})$; d'après 1.1, *i)*, c'est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{Z_k}$; on prend alors pour Y_0 la sous-variété analytique fermée de Z_0 définie par $\mathcal{I}_0$, et pour Y_k la variété affine au-dessus de Y_0 d'anneau $\mathcal{O}_{Z_k}/\mathcal{I}_k$, ($k \geq 1$).

Soient $Y = \{Y_k\}$ et $Z = \{Z_k\}$ deux provariétés affines ; un *morphisme strict* de Y dans Z est définie par la donnée d'un morphisme de variétés analytiques $Y_0 \to Z_0$ et de morphismes $Y_k \to Z_k$ au-dessus du précédent rendant commutatifs les diagrammes évidents

$$\begin{array}{ccc} Y_k & \longrightarrow & Z_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{k-1} & \longrightarrow & Z_{k-1} \end{array}$$

À côté de la notion de morphisme strict, il y a lieu dans certaines questions de considérer des morphismes plus généraux, ne respectant pas les filtrations de Y et de Z ; je renvoie pour leur définition à [**Mal4**].

Encore quelques définitions pour terminer cette section. Soit $Y = \{Y_k\}$ une provariété affine au-dessus de Y_0. Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Y$ sera dit *pseudo-cohérent* si les $\mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{Y_k}$ sont cohérents (dans [**Mal4**], on dit quasi-cohérent, mais ce mot a déjà un autre sens en géométrie algébrique). D'autre part, un $\mathcal{O}_Y$-module M sera dit pseudo-cohérent si, localement sur $|Y_0|$, on a $M = \varinjlim M_k$, M_k un $\mathcal{O}_{Y_k}$-module cohérent. On voit facilement, en utilisant 1.1, *i)* qu'un idéal pseudo-cohérent est pseudo-cohérent en tant que $\mathcal{O}_Y$-module, et réciproquement.

Si l'on a un morphisme strict $u : Y \to Z$, et M un $\mathcal{O}_Z$-module, on définit son image réciproque u^*M comme étant $u^{-1}M \underset{u^{-1}\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{O}_Y$ (on a encore noté u l'application $|Y_0| \to |Z_0|$ sous-jacente). Si M est pseudo-cohérent, u^*M l'est aussi.

2. D-variétés

2.1. — Après ce paragraphe préliminaire, voici l'objet principal de ce chapitre. Une D-variété (ou « diffiété ») est définie par la donnée

i) d'une variété $\mathbb{C}$-analytique X lisse ;

ii) d'une variété $\mathbb{C}$-analytique Y_0, non nécessairement lisse (ni même réduite), munie d'un morphisme $p : Y_0 \to X$;

iii) d'une provariété affine $Y = \{Y_k, \pi_k\}$, $k \geq 1$ au-dessus de Y_0 (cf. notations du §1) ;

iv) d'une dérivation (ou « connexion ») $D : \mathcal{O}_Y \to p^{-1}\Omega^1_X \underset{p^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_Y$,

où Ω^k_X désigne les k-formes différentielles sur X.

Ces données sont soumises à des conditions qu'on va décrire ci-dessous. Auparavant, donnons une définition : si l'on a deux telles données (X', Y', D) et (X, Y, D) on appellera « D-morphisme strict » de la première dans la seconde la donnée d'une application étale (= isomorphisme local) $u : X' \to X$, d'un morphisme $v_0 : Y'_0 \to Y_0$ au-dessus de u, et enfin d'un morphisme strict $v : Y' \to Y$ au-dessus de v_0 ; on demande que ces données commutent à D.

Soient d'autre part X' et Y'_0 deux sous-variétés ouvertes respectivement de X et Y_0, avec $p : |Y'_0| \subset |X'|$; on définit de façon évidente la restriction (X', Y', D) de (X, Y, D) à (X'_0, Y'_0) en restreignant à Y'_0 les faisceaux structuraux des Y_i. Alors, une D-variété sera un système (X, Y, D) possédant la propriété suivante : pour tout $y \in |Y_0|$, on peut trouver une paire (X', Y'_0), avec $y \in |Y'_0|$ telle que la restriction de (X, Y, D) à (X', Y'_0) soit strictement D-isomorphe à un modèle du type qu'on va maintenant décrire.

Pour cela, on se donne

a) un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$

b) un ouvert $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, de coordonnées x et $y = (y_1, \ldots, y_p)$, de projection dans $\mathbb{C}^n$ contenue dans U.

On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{O}_V$, le faisceau des fonctions holomorphes sur V ; pour $\ell \geq 1$, on pose $\mathcal{A}_\ell = \mathcal{O}_V[y_j^\alpha]$, les y_j^α des indéterminées indexées par $j = 1, \ldots, p$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avec $1 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_p \leq \ell$ (on pose aussi $y_j^0 = y_j$). Les $\mathcal{A}_\ell$ sont plongés les uns dans les autres de façon évidente, et l'on pose $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_\ell$. Sur $\mathcal{A}$, on a des dérivations partielles D_i, avec $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha + \varepsilon_i}$ (cf. II.1) et la dérivation, ou « connexion » $D = \Sigma dx_i \otimes D_i$.

Cela dit, donnons-nous un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ qui soit *pseudo-cohérent* et *différentiel* *i.e.* stable par les D_i, et posons $\mathcal{I}_\ell = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_\ell$. Alors les modèles locaux sont les suivants : on prend $X = U$, Y_0 la sous-variété analytique fermée de V définie par $\mathcal{I}_0$, et p la flèche $Y_0 \to X$ induite par la projection $V \to U$; pour $\ell \geq 1$, on prend pour Y_ℓ la variété affine sur Y_0 définie par $\mathcal{A}_\ell / \mathcal{I}_\ell$. Enfin, D et les D_j sont définis par passage au quotient à partir des opérations de même nom considérés ci-dessus.

Pour terminer ce paragraphe, définissons la D-variété réduite associée à une D-variété (X, Y, D) ; tout d'abord, si $Y = \{Y_\ell\}$, la collection des (Y_ℓ^{red}) définit une provariété Y^{red} d'après 1.1, *iii)*. D'autre part, D passe au quotient dans la surjection $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{red}}}$; pour le voir, il suffit de regarder dans un modèle local, et d'appliquer un lemme classique de Ritt **[Ri1]** qui affirme que la racine d'un idéal différentiel est encore un idéal différentiel. On a donc défini une D-variété (X, Y^{red}, D), qui est par définitions la D-variété cherchée.

Solutions 2.2. — Soit (X, Y, D) une D-variété ; prenons $b \in |Y_0|$, et soit $a = p(b^0) \in |X|$; par définition un germe en b^0 de solution (analytique) de Y est un germe en a de section holomorphe $\bar{y}$ de la projection $Y \to X$ (*i.e.* une collection de germes $\bar{y}^\ell : Y_\ell \to X$, définis sur un voisinage fixe de a) avec $\bar{y}^0(a) = b^0$, qui soit tangent aux champs de vecteurs D_i. Il revient au même de dire que c'est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $u : \mathcal{O}_{Y,b^0} \to \mathcal{O}_{X,a}$ qui possède les deux propriétés suivantes

i) on a $u \circ p^* = \mathrm{id}$, p^* l'application canonique $\mathcal{O}_{X,a} \to \mathcal{O}_{Y,b^0}$

ii) on a $uD = du$, d la différentielle usuelle sur $\mathcal{O}_X$.

Plus généralement une solution formelle en b^0 est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $u : \mathcal{O}_{Y,b^0} \to \widehat{\mathcal{O}}_{X,a}$ (le complété formel de $\mathcal{O}_{X,a}$) vérifiant *i)*, et tel que $u \circ p^*$ soit le plongement canonique de $\mathcal{O}_{X,a}$ dans son complété.

Soit u une solution formelle en b^0 ; plaçons-nous dans un modèle local, et gardons les notations de 2.1. On suppose choisies les coordonnées pour avoir $b^0 = \{x = 0, y = 0\}$. Posons $u(y_j) = \bar{y}_j \in \mathbb{C}[[x]]$; alors, on a $u(y_j^\alpha) = u(D^\alpha y_j) = \partial^\alpha \bar{y}_j$, avec $D_\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n} y_j) = 0$. Autrement dit, $y = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_p)$ est solution formelle au sens usuel du système différentiel défini par $\mathcal{I}$.

Posons $b_j^\alpha = \partial_j^\alpha \bar{y}_j(0)$; la collection des $\{b_j^\alpha\}$, $|\alpha| \leq \ell$ définit un point b^ℓ de $|Y^\ell|$, avec $\pi_\ell b^\ell = b^{\ell-1}$; donc $b = \{b^\ell\}$ est un point de $|Y| = \varprojlim |Y_\ell|$.

La réciproque se voit par le même calcul qu'en II.1. Prenons un point b de $|Y|$, de coordonnées $\{b_j^\alpha\}$ (avec ici $b_j^0 = 0$), et posons $\bar{y} = \Sigma b_j^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$; pour voir que c'est une solution formelle, il suffit de vérifier que, pour tout $f \in \mathcal{I}_{b^0}$, on a $f(x_i, \partial^\alpha \bar{y}_j) = 0$. Or, en utilisant la formule de Taylor, on trouve

$$f(x_i, \partial^\alpha \bar{y}_j) = \sum_\beta D^\beta f(0, \partial^\alpha \bar{y}_j^\alpha(0)) \frac{x^\beta}{\beta!} = \sum_\beta D^\beta f(0, b_j^\alpha) = \frac{x^\beta}{\beta!} \ .$$

Le résultat suit alors du fait que, pour tout β, on a $D^\beta f \in \mathcal{I}_{b_0}$. On obtient ainsi une bijection « solutions formelles » $\Longleftrightarrow$ « points de $|Y|$ ». Je laisse le lecteur vérifier que cette bijection ne dépend pas du modèle local choisi ; on trouve de même une bijection « jets d'ordre ℓ de solutions » $\Longleftrightarrow$ « points de Y_ℓ ». En particulier, les solutions et les jets de solutions d'une D-variété coïncident avec ceux de la D-variété réduite qui lui correspond.

2.3. — Le but de cette section est de faire le lien entre les notions considérées au Chapitre II et celles considérées ici. Il est commode de définir auparavant une opération de « décalage de filtration » dans les D-variétés.

Soit (X, Y, D) une D-variété, et soit ℓ un entier ≥ 1. On considère le système projectif $Y[\ell]$ défini ainsi $Y[\ell]_0 = Y_\ell^{\mathrm{an}}$, $Y[\ell]_k = Y_\ell^{\mathrm{an}} \underset{Y_\ell}{\times} Y_{\ell+k}$ (le produit fibré est défini comme en 1.1, *iv)*. La platitude des morphismes $Y[\ell]_k \to Y_{\ell+k}$ entraîne que $Y[\ell]$ est une provariété. Montrons qu'on peut la munir d'une différentielle D qui étend celle de T, et en fait une D-variété.

L'unicité de D, supposé exister, résulte facilement de l'isomorphisme des complétés formels de $Y[\ell]_k$ et de $Y_{\ell+k}$ en un point $b \in |Y_{\ell+k}|$; pour l'existence, on se place dans un modèle local $(X = U, V, \mathcal{I})$, avec les notations de 2.1. On prend $U' = U$, $V' = V \times \prod_{1 \leq |\alpha| \leq \ell} \mathbb{C}^p$, v' étant muni de coordonnées notées $y_{j,\alpha}$, $1 \leq j \leq p$, $|\alpha| \leq \ell$. On prend l'idéal $\mathcal{I}'$ engendré par $\mathcal{I}$ (en identifiant les y_j^β aux $y_{j,0}^\beta$), auquel on rajoute les fonctions $y_{j,\alpha}^{\varepsilon_i} - y_{j,\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \leq \ell - 1$ et leurs dérivées de tous les ordres. Je laisse le lecteur vérifier que l'on a bien toutes les propriétés voulues.

Bien sûr ce procédé, voisin de la « réduction à l'ordre un » faite en III.4, ne change pas l'ensemble des solutions, ni celui des solutions formelles, et décale d'ordre ℓ les jets de solutions. Je signale aussi qu'il est possible d'élargir la famille des morphismes de manière que ces décalages, et même d'autres plus généraux, deviennent des isomorphismes. Comme je n'utiliserai pas ce fait, je renvoie le lecteur intéressé à [**Mal4**].

Cela dit, j'indique rapidement le raccord avec les notions considérées au Chapitre II ; je me borne à la situation locale, en laissant le lecteur examiner de la même manière les systèmes différentiels définis par des sous-variétés d'espaces de jets, dans des situations plus globales.

Soient, comme en II.1, V_ℓ un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha| \leq \ell} \mathbb{C}^p$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et soit $\mathcal{I}'_\ell$ un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{V_\ell}$, espace des fonctions holomorphes sur V_ℓ ; soit Y'_ℓ la sous-variété analytique fermée de V_ℓ définie par $\mathcal{I}'_\ell$.

Pour la suite, on choisit une fois pour toutes, un ouvert $X \in \mathbb{C}^n$ qui contienne la projection de $|Y_\ell|$ (ce choix, imposé par la définition des D-variétés, est à part cela sans aucune importance).

i) Supposons que V_ℓ soit l'image réciproque d'un ouvert $V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, et que $\mathcal{I}'_\ell$ soit engendré par un idéal $\overline{\mathcal{I}}'_\ell \subset \mathcal{O}_V[y_j^\alpha]$, $1 \leq |\alpha| \leq \ell$. On obtient alors immédiatement un modèle local de D-variété de la manière suivante : on prend V comme ci-dessus, et on prend pour $\mathcal{I}$ l'idéal différentiel de $\mathcal{O}_V[y_j^\alpha]$, $1 \leq |\alpha|$, engendré par les $D^\alpha \overline{\mathcal{I}}'_\ell$; posant $\mathcal{I}_m = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_m$ (notations de 2.1), les $\mathcal{I}_m$ sont bien cohérents comme limite inductive de faisceaux cohérents (cf. 1.1, *i)*). Alors $\mathcal{I}$ définit une D-variété dont les solutions au sens de 2.2 coïncident évidemment avec les solutions au sens de II.1 du système différentiel $\mathcal{I}'_\ell$.

ii) Dans le cas général, il faut procéder un peu autrement, et faire une réduction à l'ordre un. On prend $V = V_\ell$, muni des variables x_i et y_j^α, $1 \leq |\alpha| \leq \ell$, qu'on écrit maintenant x_i et $y_{j,\alpha}$, et on ajoute à $\mathcal{I}'_\ell$ les équations

$D_i y_{j,\alpha} = y_{j,\alpha+\varepsilon_i}$, $|\alpha| \leq \ell - 1$. On est alors ramené à la situation *i)*, avec $\ell = 1$, et il est clair que l'on n'a pas changé les solutions du système.

Dans le cas *i)*, où l'on peut appliquer les deux méthodes, on obtient deux D-variétés qui ne sont pas strictement isomorphes. Mais on peut voir qu'elles sont décalées l'une de l'autre au sens expliqué ci-dessus. Je laisse la vérification en exercice.

3. Module et variété caractérisque

Comme je l'ai signalé au début de ce chapitre, je dis « caractéristique » là où **[Mal4]** dit « caractéristique strict ».

Module caractéristique 3.1. — Soit (X, Y, D) une D-variété. Je suppose d'abord qu'on est dans un modèle local du type considéré en 2.1, et j'en reprends les notations. Y est donc défini par un idéal différentiel pseudo-cohérent de $\mathcal{A}$, et l'on pose $\mathcal{I}_\ell = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_\ell$. On a par définition $\mathcal{O}_Y = \mathcal{A}/\mathcal{I}$, $\mathcal{O}_{Y_\ell} = \mathcal{A}_\ell/\mathcal{I}_\ell$.

Pour $f \in \mathcal{A}_\ell$ (*i.e.* f germe de section de $\mathcal{A}_\ell$) on désigne par δf sa différentielle modulo les dx_i et les dy_j^α, $|\alpha| \leq \ell - 1$; autrement dit on a $\delta f = \sum\limits_{j,|\alpha|=\ell} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} \delta y_j^\alpha$; traditionnellement, ceci s'appelle le « symbole » de f.

On a $\delta D_i f = \xi_i \delta f$, ξ_i l'opérateur suivant : ξ_i n'agit pas sur $\mathcal{A}$, et $\xi_i \delta y_j^\alpha = \delta y_j^{\alpha+\varepsilon_i}$; comme les D_i, les ξ_i commutent et l'on peut écrire par récurrence $\delta y_j^\alpha = \xi^\alpha \delta y_j$. On définit alors le module N_ℓ des symboles d'ordre ℓ comme le sous-module de $\bigoplus\limits_{1\leq j\leq p} \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi]\delta y_j = \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi]^p$ engendré par $\delta\mathcal{I}_0, \ldots, \delta\mathcal{I}_\ell$ modulo $\mathcal{I}_\ell$, avec $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Noter que l'adjonction de $\delta\mathcal{I}_0, \ldots, \delta\mathcal{I}_{\ell-1}$ ne change les termes de N_ℓ que dans les degrés $\leq \ell - 1$.

On pose $M_\ell = \mathcal{O}_{Y_\ell}[\xi]^p/N_\ell$, et on l'appelle « module caractéristique d'ordre ℓ ». On pose encore $N = \varinjlim N_\ell$, $M = \varinjlim M_\ell = \mathcal{O}_Y[\xi]^p/N$, et on les appelle respectivement « module des symboles » et « module caractéristique » ; ce sont des $\mathcal{O}_Y[\xi]$-modules pseudo-cohérents.

Les modules des symboles dépendent du modèle local choisi, *i.e.* des générateurs locaux choisis de $\mathcal{O}_{Y_0}$ sur $\mathcal{O}_X$. Par contre, les modules caractéristiques en sont indépendants. J'indique rapidement comment on peut s'en assurer.

i) Soit $f \in \mathcal{A}_\ell$ et $\bar{f}$ sa classe dans $\mathcal{A}_\ell/\mathcal{I}_\ell = \mathcal{O}_{Y_\ell}$; alors la classe de δf dans M_ℓ ne dépend que de $\bar{f}$ et elle s'identifie à la différentielle relative $d_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}\bar{f} \in \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}$ (on convient que $Y_{-1} = X$). Pour la définition de la différentielle relative dans le cas $\mathbb{C}$-analytique, voir **[Gr]** ; l'adaptation au cas mixte considéré ici est sans difficulté.

ii) Désignons par M_ℓ^k (resp. M^k) les éléments homogènes par rapport à ξ de degré k de M_ℓ (resp. M). Ce qui précède donne un isomorphisme $M_\ell^\ell = \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}}$; on en déduit facilement la formule suivante

$$M = \oplus M^\ell = \underset{\ell}{\oplus} \mathcal{O}_Y \underset{\mathcal{O}_{Y_\ell}}{\otimes} \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}} . \tag{3.2}$$

On vérifie d'autre par que les flèches $\xi_i : \Omega^1_{Y_\ell/Y_{\ell-1}} \to \Omega^1_{Y_{\ell+1}/Y_\ell}$ sont bien définies sur une D-variété (X, Y, D) dès qu'on a un système de coordonnées locales sur X, et uniquement sur X. Ceci permet de définir M_ℓ et M sous cette seule hypothèse ; en particulier, M est défini par la formule précédente plus l'action des ξ_i.

iii) Si maintenant, on fait un changement de coordonnées locales sur X, on voit comme d'habitude qu'il faut transformer les ξ_i comme les coordonnées d'un vecteur de T^*X. Il faudra donc remplacer $\mathcal{O}_Y[\xi]$ par $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$, $\widetilde{Y} = Y \underset{X}{\times} T^*X$ la provariété affine sur Y_0 définie ainsi : T^*X est une variété affine sur X, et l'on pose $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_Y \underset{p^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_{T^*X}$, p la projection $Y_0 \to X$.

Variété caractéristique 3.3. — Je garde les mêmes notations, et je pose aussi $\widetilde{Y}_\ell = Y_\ell \underset{X}{\times} T^*X$.

Définition 3.4. — La variété caractéristique Λ est le support du module caractéristique M, c'est-à-dire la sous-provariété affine de $\widetilde{Y}$ définie par l'idéal $\mathcal{K} = \mathrm{rac}(\mathrm{ann}\, M)$.

Posons de même Λ_ℓ = support de M_ℓ ; on a $\Lambda = \varprojlim \Lambda_\ell$, *i.e.* $\mathcal{O}_\Lambda = \varinjlim \mathcal{O}_{\Lambda_\ell}$; il faut toutefois faire attention au fait que les applications $\Lambda_{\ell+1} \to \Lambda_\ell$ ne sont pas nécessairement dominantes.

En pratique, en coordonnées locales avec les notations de 3.1, Λ_ℓ se calculera ainsi : on prend, dans $\mathcal{A}_\ell[\xi_1, \dots, \xi_n]$ l'idéal engendré par $\mathcal{I}_\ell$ et les mineurs d'ordre n $\det(\delta f_1, \dots, \delta f_n)$, où $f_i \in \mathcal{I}_k$, $0 \le k \le \ell$ et δf_i est son symbole principal d'ordre k. On prend enfin la racine de l'idéal obtenu.

À noter que, si l'on s'intéresse seulement à Λ_ℓ hors de la section nulle de T^*X (ce qui est la seule chose intéressante, cf. **[Mal4]**), on peut se limiter aux $f_i \in \mathcal{I}_\ell$ et à leurs symboles principaux d'ordre ℓ.

Nous verrons ultérieurement comment la variété caractéristique intervient dans le problème de Cauchy et la généralisation du théorème de Cauchy-Kovalevski.

4. Involutivité générique

N.B. : la présentation du sujet diffère de celle de **[Mal4]** ; en particulier, contrairement à cet article, je reprends ici la notion usuelle de prolongement.

Espaces de jets et D-variétés 4.1. — Soit X une variété analytique *lisse*, fixée une fois pour toutes, et soit $p : Z \to X$ un morphisme de variétés analytiques ; pour $\ell \geq 0$, on veut définir la « variété affine au-dessus de Z des jets d'ordre ℓ de p », notée $J_\ell(p)$ ou un peu abusivement $J_\ell(Z)$; pour ce faire, on opère de la manière suivante :

i) Dans le cas où Z est lisse et p submersif, la considération des espaces de jets, à laquelle il a déjà été fait allusion au Chapitre II, est classique, et je renvoie à la littérature sur ce sujet ; une bonne référence est, par exemple, **[Ol]**. Je me contente ici de préciser en coordonnées locales la structure de variété affine de $J_\ell(Z)$: on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$, et Z un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, de coordonnées x et $y = (y_1, \ldots, y_p)$, de projection dans $\mathbb{C}^n$ contenue dans X. Alors $J_\ell(Z)$ est la variété affine sur Z de faisceau $\mathcal{O}_Z[y_j^\alpha]$, $1 \leq |\alpha| \leq \ell$.

ii) Dans le cas où Z est quelconque, on va d'abord définir $J_\ell(Z)$ dans un modèle local ; pour cela, on prend X comme ci-dessus et on prend de même un ouvert V de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ de coordonnées x et y, et de projection contenue dans X ; on suppose que Z est la sous-variété analytique fermée de V définie par un idéal cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$.

Alors, par définition, $J_\ell(Z)$ est la sous-variété affine fermée de $J_\ell(V)$ dont l'idéal est engendré par $\mathcal{I}$ et ses dérivées $D^\alpha \mathcal{I}$, $|\alpha| \leq \ell$. Il y a deux points à vérifier :

a) Ceci ne dépend pas des coordonnées locales x et y choisies, *i.e.* les formules de transformations sur $J_\ell(V)$ (sur lesquelles je ne reviens pas) sont compatibles à la restriction à Z. Ceci résulte facilement de l'invariance de la différentielle extérieure $D = \sum dx_i \otimes D_i$.

b) Ceci ne dépend pas de la présentation choisie de Z ; c'est un exercice que je laisse au lecteur (indication : si l'on a deux présentations $X \hookrightarrow V$ et $Z \hookrightarrow V'$, considérer la présentation $Z \hookrightarrow V \underset{X}{\times} V'$ et la comparer aux deux précédentes). N.B. : dans le cas où Z est lisse, mais non submersif, la définition précédente est différente, et en particulier plus précise, que celle donnée en II.4.3.

On a évidemment $J_0(Z) = Z$; d'autre part, on a des morphismes $J_\ell(Z) \to J_{\ell-1}(Z)$; d'où en passant à la limite projective (*i.e.* à la limite inductive sur les faisceaux d'anneaux) une provariété $J(Z) \to Z$; elle est filtrée par des sous-variétés $J(Z)_\ell$ définies ainsi dans un modèle local : avec les notations ci-dessus, $J(Z)$ est défini par l'idéal $\{D^\alpha \mathcal{I}\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dans $\mathcal{O}_V[y_j^\alpha]$, $1 \le |\alpha|$, $1 \le j \le p$; et $J(Z)_\ell$ est défini par l'intersection de cet idéal avec $\mathcal{O}_V[y_j^\alpha]$, $1 \le |\alpha| \le \ell$. Donc $J(Z)_\ell$ est une sous-variété affine fermée de $J_\ell(Z)$, mais qui n'a pas de raison de lui être égale en général. En particulier, $J(Z)_0$ est une sous-variété fermée de $J_0(Z) = Z$.

En coordonnées locales sur X, les opérateurs D_i définissent des morphismes $\mathcal{O}_{J_\ell(Z)} \to \mathcal{O}_{J_{\ell+1}(Z)}$ et aussi $\mathcal{O}_{J(Z)_\ell} \to \mathcal{O}_{J(Z)_{\ell+1}}$ et, en passant à la limite $\mathcal{O}_{J(Z)} \to \mathcal{O}_{J(Z)}$; on vérifie immédiatement que ceci munit $J(Z)$ d'une structure de D-variété.

Si maintenant on a une D-variété(X, Y, D), avec $Y = \{Y_\ell\}$ et p la projection $Y_0 \to X$, alors on a les propriétés suivantes

4.2. — On a $J(Y_0)_0 = Y_0$.

4.3. — On a un plongement fermé canonique $(X, Y, D) \to J(Y_0)$. [En particulier $J(Y_0)$ est objet final dans la catégorie des D-variétés « au-dessus de (X, Y_0, p) ».]

Ceci se voit dans un modèle local de Y : avec les notations de 2.1, si Y est défini par un idéal $\mathcal{I}$, filtré par les $\mathcal{I}_\ell = \mathcal{I} \cap \mathcal{A}_\ell$, alors $J(Y_0)$ est défini par l'idéal $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ engendré par les $D^\alpha \mathcal{I}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Les assertions ci-dessus résultent immédiatement de là.

***Le théorème de finitude** 4.4*. — Ce théorème est le suivant :

***Théorème** 4.5*. — *Soit (X, Y, D) une D-variété, et soit $\mathcal{I}^\ell$ une suite croissante d'idéaux pseudo-cohérents, différentiels et réduits de $\mathcal{O}_Y$. Alors la suite $\mathcal{I}^\ell$ est stationnaire sur tout ouvert relativement compact de Y_0.*

Soit en particulier Y une D-variété réduite (je sous-entends ici X et D) ; posons $Z = J(Y_0)$, $Z_\ell = J(Y_0)_\ell$, et soit $\mathcal{I}$ l'idéal définissant Y comme sous-variété fermée de Z ; posant $\mathcal{I}_\ell = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{Z_\ell}$, on trouve ceci : sur tout ouvert relativement compact de Y_0, pour ℓ assez grand $\mathcal{I}$ est engendré par $\mathcal{I}_\ell$ en tant qu'idéal différentiel réduit (on ne peut omettre aucun des deux mots « différentiel » et « réduit »). D'une façon un peu vague « sur tout compact de Y_0, Y est engendré par Y_ℓ pour ℓ assez grand ».

Si l'on omet le mot « réduit », le théorème est faux : contre-exemple classique [**Ri1**] ; on prend $X = \mathbb{C}$, $Y_0 = \mathbb{C}^2$, et on considère la suite des idéaux différentiels engendrés par (y^2), (y^2, y'^2), (y^2, y'^2, y''^2), *etc.* , suite qui est strictement croissante.

Dans le cas algébrique (*i.e.* X, Y_0, *etc.* sont algébriques), ce théorème est dû à Ritt et Raudenbush [**Ri1**]. Dans le cas analytique, ce théorème a été démontré par Ritt lorsque Y_0 est un germe analytique ponctuel ; sa démonstration est une combinaison de la méthode qu'il utilise dans le cas algébrique avec le théorème de préparation [**Ri2**]. Je, n'ai pas cherché à voir si cette méthode s'applique au cas plus général considéré ici ; dans le prochain chapitre, je donnerai une démonstration, par une autre méthode qui donne simultanément ce résultat et le théorème d'involutivité générique, dont il va être maintenant question.

D-variétés involutives 4.6. — Cette section adapte aux D-variétés, la notion d'involutivité, définie au Chapitre II. Les ingrédients sont les suivants ; soit, comme en 4.1, $p : Z \to X$ un morphisme de variétés analytiques et soit Z_ℓ une sous-variété fermée de $J_\ell(Z)$, d'idéal $\mathcal{I}_\ell$.

Par définition, on appelle « prolongement d'ordre 1 » de Z_ℓ et on note $pr_1 Z_\ell$ la sous-variété fermée de $J_{\ell+1}(Z)$ dont l'idéal est engendré par $\mathcal{I}_\ell$ et les $D_i \mathcal{I}_\ell$ (en coordonnées locales sur X ; il est immédiat que cela n'en dépend pas). Par récurrence, on définit de même $p_k Z_\ell \hookrightarrow J_{\ell+k}(Z)$.

Dans un modèle local (X, V, Z), avec $Z \hookrightarrow V$ comme en 4.1, le plongement fermé $J_\ell(Z) \hookrightarrow J_\ell(V)$ donne un plongement fermé $Z_\ell \hookrightarrow J_\ell(V)$, d'idéal $\mathcal{K}_\ell$; alors le plongement $pr_1 Z_\ell \hookrightarrow J_{\ell+1}(V)$ est défini par l'idéal $\{\mathcal{K}_\ell, D_i \mathcal{K}_\ell\}$; à noter que ceci ne dépend pas de Z, mais seulement de (X, V, Z_ℓ). Dans le cas où $Z = V$, cette notion coïncide avec celle qui a été vue en II.1.

4.7. — Dans la situation précédente, le module caractéristique M de Z_ℓ se définit par le même procédé qu'en II.2 et 4.6 ; on choisit un modèle local comme ci-dessus, on appelle $N \subset \oplus\, \mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi_1, \ldots, \xi_n]\delta y_i$, le sous-module engendré par les symboles d'ordre ℓ des éléments de $\mathcal{K}_\ell$, et on pose $M = \oplus[\mathcal{O}_{Z_\ell}[\xi_1, \ldots, \xi_n]\delta y_i / N$. On voit par les mêmes raisonnements qu'en 3.1 que M (mais non N) ne dépend pas du modèle local choisi (en interprétant bien sûr les ξ_i comme des coordonnées dans T^*X). En particulier, en notant M_ℓ la composante de degré ℓ par rapport à ξ de M, on a $M_\ell = \Omega^1_{Z_\ell / J_{\ell-1}(Z)}$.

Supposant alors Z réduit, on dira que « M est ℓ-régulier » s'il possède les propriétés suivantes :

i) Posons $M^{\mathrm{an}} = M \underset{\mathcal{O}_{Z_\ell}}{\otimes} \mathcal{O}_{Z_\ell^{\mathrm{an}}}$; alors M_ℓ^{an} et $M_{\ell+1}^{\mathrm{an}}$ sont localement libres sur $\mathcal{O}_{Z_\ell^{\mathrm{an}}}$.

ii) Pour tout point $a \in |Z^\ell|$, $M(a) = M \underset{\mathcal{O}_{Z_\ell}}{\otimes} \mathbb{C}_a$ est ℓ-involutif. (Pour la notation $M(a)$, voir aussi chap. II.)

La première propriété peut aussi s'énoncer en disant que M, localement sur $|Z|$, est un $\mathcal{O}_{Z_\ell}$-module projectif. Par ailleurs, les remarques faites en II.2, en particulier les propositions II.2.4 et II.2.5 restent encore vraies ici ; voir un peu plus loin un énoncé précis.

4.8. — Toujours dans la même situation, on dira que $Z_\ell \hookrightarrow J_\ell(Z)$ est *involutif* s'il possède les propriétés suivantes :

i) Z_ℓ et $pr_1 Z_\ell$ sont lisses, et la projection $pr_1 Z_\ell \to Z_\ell$ est surjective. Par définition, ceci veut dire que les énoncés analogues sont vraie pour Z_ℓ^{an} et $(pr_1 Z_\ell)^{\mathrm{an}}$.

ii) Le module caractéristique M de Z_ℓ est ℓ-régulier.

Cette notion se lit dans les modèles locaux : si Z_ℓ est involutif, la restriction à un modèle local de Z_ℓ^{an} est involutive au sens du Chapitre II. Inversement, si cette condition est satisfaite pour une famille de modèles locaux recouvrant Z_ℓ, alors il est involutif. Plus généralement, en un sens évident, elle est locale sur Z_ℓ^{an}.

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 4.9. — Soit (X, Y, D) avec $Y = \{Y_\ell\}$ une D-variété (nécessairement réduite). On dit qu'elle est ℓ-involutive si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) Y_ℓ est involutif en tant que sous-variété de $J_\ell(Y_0)$.

ii) Pour tout $k \geq 0$, on a $Y_{\ell+k} = pr_k Y_\ell$.

Les résultats du Chapitre II entraînent alors que, pour tout $k \geq 0$, (X, Y, D) est encore $(\ell + k)$-involutif. Remarquons aussi que, dans cette situation, si M (resp. M') est la variété caractéristique de Y (resp. Y_ℓ), on a, pour $k \geq \ell$, $M_k = \mathcal{O}_Y \underset{\mathcal{O}_\ell}{\otimes} M'_k$ [pour $k < \ell$, on a une application surjective $\mathcal{O}_Y \underset{\mathcal{O}_\ell}{\otimes} M'_k \to M_k$, parce que dans M_k on a tenu compte des relations entre symboles d'ordre $< \ell$, mais pas dans M'_k].

Le théorème de l'involutivité générique 4.10. —Avant de l'énoncer, j'aurai encore besoin d'un point de terminologie. D'une façon générale, soit Z une variété analytique complexe et soit $Z' \to Z$ une variété affine au-dessus de Z ; pour ce qui suit, on peut sans inconvénient les supposer toutes deux réduites.

i) Quand je parle de fermés, d'ouverts, d'ensembles denses, *etc.* de Z', il s'agit de la topologie transcendante usuelle de $|Z'| = |Z'^{\mathrm{an}}|$.

ii) Les sous-ensembles analytiques de Z' (sous-entendus fermés; je ne considère que ceux-là) sont ceux de Z'^{an} ; de même la « topologie de Zariski » de Z' se réfère à ces ensembles.

iii) Les sous-ensembles analytiques stricts de Z' et sa topologie de Zariski stricte sont définis comme ci-dessus, mais se restreignant à l'utilisation des sections de $\mathcal{O}_{Z'}$; par exemple, un sous-ensemble analytique strict de Z' est un sous-ensemble fermé de Z' qui localement sur Z (et pas seulement sur Z') est l'ensemble des zéros d'une famille de sections de $\mathcal{O}_{Z'}$.

On définit de même les « ensembles constructibles » et « constructibles stricts » de Z' ; les premiers sont, localement sur Z' réunions finies d'ensembles de la forme $S_i - T_i$, avec $T_i \subset S_i$ analytiques; de même les seconds sont, localement sur Z, réunions finies d'ensembles $S_i - T_i$, avec $T_i \subset S_i$ analytiques stricts.

J'aurai besoin ci-dessous de quelques propriétés des ensembles analytiques stricts et des ensembles constructibles stricts qui généralisent des résultats connus dans le cas usuel (pour ce cas, voir notamment [**Kas**] et [**Ve**]). Je renvoie leur démonstration en appendice.

Cela étant, le théorème s'énonce de la manière suivante :

Théorème 4.11. — *Soit (X, Y, D) une D-variété réduite, avec $Y = \{Y_\ell\}$, $\ell \geq 0$, et soit U un ouvert relativement compact de Y_0 ; désignons par Y' la restriction de Y à U. Il existe un $\ell \geq 0$ et un sous-ensemble analytique strict S_ℓ de $|Y'_\ell|$ tel que, en désignant par S_k (*resp. *S) l'image réciproque de S_ℓ dans $|Y'_k|$ (*resp. *$|Y|$), on ait les propriétés suivantes*

i) Y' est ℓ-involutif hors de S.

ii) Pour tout $k \geq \ell$, $|Y'_k| - S_k$ est dense dans $|Y'_k|$.

La seconde propriété signifie aussi ceci : pour tout point $a \in |Y'_k|$, aucune composante de Y'^{an} en a n'est contenue dans S_k ($k \geq \ell$). Ceci est une équivalence classique en géométrie analytique locale (voir par exemple [**Na**]). Quant à la première, elle se comprend de soi en remarquant que la définition de la ℓ-involutivité s'exprime par des propriétés locales au-dessus de Y_ℓ^{an}.

Corollaire 4.12. — *Soit (X, Y, D) une D-variété réduite. Pour tout $k \geq 0$ l'ensemble des points de $|Y_k|$ au-dessus desquels il existe une solution convergente est dense dans $|Y_k|$.*

Si l'on se place dans un ouvert $U \subset Y_0$ relativement compact, le résultat précédent joint au théorème de Cartan-Kähler (cf. chap. III) nous donne le résultat pour $k \geq \ell$, ℓ étant l'entier de l'énoncé. Pour $k < \ell$, ceci résulte du fait suivant : comme $Y_\ell \to Y_k$ est dominant, l'image de $|Y_\ell|$ dans $|Y_k|$ contient un ouvert dense, et même un ouvert de Zariski dense ; cf. Appendice A.

Ce corollaire est une variante pour les D-variétés du Nullstellensatz. Dans le cas algébrique, il est déjà démontré par Ritt [**Ri1**], en utilisant la théorie des « systèmes orthonormes passifs » de Riquier, au lieu des systèmes involutifs de Cartan. Dans le cas algébrique, le théorème 4.11 lui-même, ou au moins sa version locale, est dû à Pommaret [**Po2**].

Remarque 4.13. — On prendra garde d'autre part au fait suivant : dans la situation du théorème 4.11 il est faux en général que Y' soit la D-variété engendré par Y'_ℓ, ou même la D-variété réduite qu'elle engendre [*i.e.* l'idéal $\mathcal{I}$ de Y' dans $\mathcal{O}_{J(U)}$ n'est pas le plus petit idéal, ni même le plus petit idéal réduit engendré par l'idéal $\mathcal{I}_\ell$ de Y'_ℓ dans $\mathcal{O}_{J_\ell(U)}$]. En effet, il se pourrait que la D-variété engendrée admette des composantes au-dessus de S_ℓ. ; un cas particulier important est celui des intégrales singulières, longuement étudiées dans [**Ri1**]. Un exemple typique particulièrement simple est l'équation de Clairaut : $y - xy' = y'^2/2$. La D-variété engendrée par cette équation a deux composantes : « l'intégrale générale » d'idéal engendré par $y - xy' - y'^2/2$ et y'', qui est 1-involutive hors de $x + y' = 0$, et d'autre part « l'intégrale singulière » $y + x^2/2 = 0$.

Le théorème 4.11 et le théorème 4.5 seront démontrés simultanément au prochain chapitre. Ici je vais me contenter de montrer qu'il suffit de les établir localement, *i.e.* au voisinage de chaque point de Y_0. Par Borel-Lebesgue, ceci est évident pour 4.5. Pour 4.11, on utilise la proposition suivante où, comme en 4.6, $Z \to X$ désigne un morphisme de variétés analytiques complexes avec X lisse.

Proposition 4.14. — *Soit Z_ℓ une sous-variété fermée réduite de $J_\ell(Z)$, affine au-dessus de Z, et soit V l'ouvert de $|Z_\ell|$ formé des points au voisinage desquels Z_ℓ (i.e. Z_ℓ^{an}) est involutif. Alors $|Z_\ell| - V$ est un sous-ensemble analytique strict de Z_ℓ.*

Montrons que la proposition entraîne le théorème 4.11, une fois établie sa version locale ; avec les notations de 4.11, on prend un recouvrement fini de U par des $U^i \subset |Y_0|$ où le résultat est vrai ; on note Y'^i la restriction de Y' à U^i et on choisit un ℓ et un $S'^i_\ell \subset |Y'^i_\ell|$ tel que les (S'^i_ℓ, Y'^i) satisfassent les conditions du théorème. Appliquant la proposition précédente à Y'_ℓ, on obtient un sous-ensemble analytique strict S_ℓ de Y'_ℓ tel que $|Y'_\ell| - S_\ell$ soit l'ouvert des points involutifs de Y'_ℓ ; la restriction S^i_ℓ de S_ℓ à U^i est évidemment contenue dans S'^i_ℓ ; et l'on vérifie immédiatement que le théorème est encore vrai sur U_i avec S'^i_ℓ remplacé par S^i_ℓ ; d'où le résultat.

Reste à démontrer la proposition. On peut pour cela se placer dans un modèle local, et supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, Z un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, de projection contenue dans X. La proposition résulte alors des faits suivants (les résultats admis ici sont démontrés en appendice) :

i) L'ensemble V_1 des points où Z_ℓ (*i.e.* Z^{an}_ℓ) est lisse est un ouvert de Zariski strict de $|Z^\ell|$ (*i.e.* son complémentaire est un ensemble analytique strict).

ii) L'image de $|pr_1 Z_\ell|$ dans Z_ℓ est un ensemble constructible strict ; donc son intérieur est un ouvert de Zariski strict de Z_ℓ, qu'on notera V_2.

iii) Soit M le module caractéristique de Z_ℓ, et soit $\{M_k\}$, $k \geq 0$ sa graduation. Alors M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont $\mathcal{O}_{Z_\ell}$-cohérents, et l'ensemble V_3 des points où ils sont localement libres est un ouvert de Zariski strict de Z_ℓ (ceci se voit immédiatement en prenant localement des présentations de M_ℓ et $M_{\ell+1}$).

D'autre part, $pr_1 Z_\ell$ est un fibré affine au-dessus de son image, de fibré vectoriel associé le fibré défini par $M_{\ell+1}$ (je prends ici la correspondance contravariante faisceaux $\longleftrightarrow$ fibrés de **[Gr]**) ; alors, au-dessus de $V_1 \cap V_2 \cap V_3$, $pr_1 Z_\ell$ est lisse, de projection surjective et lisse sur Z_ℓ.

iv) Reste à montrer que le sous-ensemble V des points $a \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$ où $M(a)$ est ℓ-involutif est un ouvert de Zariski strict de Z_ℓ.

J'utiliserai pour cela le critère de Cartan et les raisonnements de II.2. Soit $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ une base de $T^*\mathbb{C}^n \supset T^*X$ déduite par un changement linéaire de coordonnées de la base canonique (on peut se contenter de ceux-là) ; si V_η est le sous-ensemble de $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ formé des points où η vérifie le critère de Cartan, V_η est un ouvert dans Z_ℓ et l'on a $V = \bigcup\limits_\eta V_\eta$. Mais il est facile de vérifier que V_η est strictement constructible dans Z_ℓ ; et une réunion d'ouverts strictement constructibles est localement finie (raisonner sur les complémentaires). Ceci termine la démonstration.

On peut aussi utiliser un autre argument que je me contente d'esquisser : sur tout compact K de $|Z_\ell|$, les $M(a)$, $a \in K$ forment une famille limitée en un sens convenable, qui entraîne qu'on a $H_{p,k}M(a) = 0$ pour tout p et $k \geq k_0$, $a \in K$. Alors, il reste un nombre fini de conditions à vérifier $H_{p,k}M(a) = 0$, $\ell \leq k < k_0$, et ces conditions déterminent des ensembles strictement constructibles.

CHAPITRE V

INVOLUTIVITÉ GÉNÉRIQUE (SUITE)

1. Préliminaires

Dans la suite de ce chapitre, j'aurai besoin de quelques propriétés des faisceaux de fonctions holomorphes sur des polydisques fermés. Ces propriétés devraient normalement figurer en appendice ; je les donne ici pour la commodité du lecteur.

Dans $\mathbb{C}^n$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ on désigne par K le polydisque $\{|x_i| \leq r_i\}$, $r_i \geq 0$; on note $\mathcal{A}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, et on pose $A = \Gamma(K, \mathcal{A})$.

On pose aussi $\mathcal{B} = \mathcal{A}[t_1, \ldots, t_q]$, $B = \Gamma(K, \mathcal{B})$ $(= A[t_1, \ldots, t_q])$; je rappelle d'abord un résultat qui jouera un rôle essentiel dans la suite.

Théorème 1.1. — *La $\mathbb{C}$-algèbre B est noethérienne.*

D'après Hilbert, il suffit de traiter le cas $q = 0$, c'est-à-dire de démontrer le résultat pour A. Dans ce cas, le théorème est dû à Frisch **[Fr]** ; en fait, le théorème de Frisch est plus général, et s'applique aux polyèdres semi-analytiques de Stein. Dans le cas des polydisques, une démonstration rapide se trouve dans **[La]**.

On emploie la terminologie suivante : un module (= un faisceau de modules) $\mathcal{B}$-cohérent sur K est un $\mathcal{B}$-module sur K localement de présentation finie ; les morphismes entre $\mathcal{B}$-modules cohérents sont les morphismes en tant que $\mathcal{B}$-modules. Il est classique que les $\mathcal{B}$-modules cohérents s'étendent à un voisinage ouvert de K ; les morphismes s'étendent, et ceci de manière essentiellement unique (*i.e.* deux extensions du même morphisme coïncident sur un voisinage de K). On a le résultat suivant :

Théorème 1.2. — *i) Soit $\mathcal{F}$ un sous-module cohérent de $\mathcal{B}^p$ sur K ; on a $H^i(K,\mathcal{F}) = 0$, $i \geq 1$.*

ii) Les applications $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(K,\mathcal{F})$ et $F \mapsto \mathcal{A} \underset{A}{\otimes} \mathcal{F}$ sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre « sous-modules cohérents de $\mathcal{B}^p$ » $\leftrightarrow$ « sous-modules de B^p ».

1) Traitons d'abord le cas $q = 0$; soit $\mathcal{F}$ un sous-module cohérent de $\mathcal{A}^p$; alors la première assertion est le « théorème B » de H. Cartan.

Pour démontrer la seconde, on prend une présentation $\mathcal{A}^r \to \mathcal{A}^q \to \mathcal{F} \to 0$ de $\mathcal{F}$ sur K [Pour établir son existence, on utilise d'abord le « théorème A » de Cartan, qui donne une surjection $\mathcal{A}^q \to \mathcal{F} \to 0$ au voisinage de K ; on applique ensuite le même argument au noyau de cette application, qui est cohérent par le théorème d'Oka].

Par le « théorème B », la suite $\Gamma(K,\mathcal{A}^r) \to \Gamma(K,\mathcal{A}^q) \to \Gamma(K,\mathcal{F}) \to 0$ est exacte ; alors l'exactitude à droite du produit tensoriel nous montre qu'on a $\mathcal{A} \underset{A}{\otimes} \Gamma(K,\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Dans l'autre sens, soit F un sous-module de A^p. Comme A est noethérien, F admet une présentation finie $A^r \to A^q \to F \to 0$; on renverse alors le raisonnement précédent.

2) Dans le cas général, notons $\mathcal{B}^p$ le sous-faisceau de $\mathcal{B}$ formé des polynômes en $(t_1,\ldots,t_q)$ de degré $\leq r$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-module cohérent de $\mathcal{B}^p$; posons $F = \Gamma(K,\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_r = \mathcal{F} \cap \mathcal{B}^p_r$, $F_r = F \cap B^p_r$. Le faisceau $\mathcal{F}_r$ est cohérent sur $\mathcal{A}$; soit en effet V un voisinage ouvert de K où $\mathcal{F}$ est défini, et soit $a \in V$; dans un voisinage W de a, $\mathcal{F}$ est engendré par un nombre fini de polynômes $p_1,\ldots,p_\ell$; il est donc l'image dans $\mathcal{B}^p$ de $\mathcal{B}^\ell$ par $u : (q_1,\ldots,q_\ell) \mapsto \sum q_i p_i$; alors, sur W, $\mathcal{F}_r$ est limite inductive des $u(\mathcal{B}^\ell_s) \cap \mathcal{B}^p_r$, sous-faisceaux de $\mathcal{B}^p_r$ de type fini sur $\mathcal{A}$, donc cohérents sur $\mathcal{A}$; donc $\mathcal{F}_r$ est cohérent.

Alors on a $H^i(K,\mathcal{F}_r) = 0$, $i \geq 1$, et d'autre part $\mathcal{A} \underset{A}{\otimes} \Gamma(K,\mathcal{F}_r) = F_r$; par passage à la limite inductive, ces propriétés sont encore vraies avec $\mathcal{F}_r$ remplacé par $\mathcal{F}$. La dernière assertion : $\Gamma(K, \mathcal{A} \underset{A}{\otimes} F) = F$ se voit immédiatement, encore par limite inductive.

Remarque 1.3. — Pour $a \in K$, $\mathcal{B}_a$ est plat sur B. Soit en effet I un idéal de B et $\mathcal{I}$ le faisceau correspondant ; on a $\mathcal{I}_a = \mathcal{A}_a \underset{A}{\otimes} I = \mathcal{B}_a \underset{B}{\otimes} I$; donc l'application $\mathcal{B}_a \underset{B}{\otimes} I \to \mathcal{B}_a$ est injective.

Soit d'autre part b un point de $K \times \mathbb{C}^q$ au-dessus de a, et soit $\mathcal{O}_b$ l'espace des germes en b de fonctions holomorphes en $(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_q)$; alors $\mathcal{O}_b$

est plat sur $\mathcal{B}_a$ (le localisé de $\mathcal{B}_a$ en b a même complété que $\mathcal{O}_b$). Donc $\mathcal{O}_b$ est plat sur B.
(Pour ce qui concerne la platitude voir par exemple [**Bo2**].)

2. Énoncés

Dans ce chapitre, on veut démontrer les théorèmes IV.4.5 et IV.4.11. On a vu qu'il suffit de les démontrer localement ; pour cela je vais reprendre en les détaillant les arguments de [**Mal3**].

Soient n et p deux entiers fixés. Dans l'espace $\mathbb{C}^{n+p}$, de coordonnées (x_i, y_i), avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, on considère un polycylindre fermé Z défini par $|x_i| \leq r_i$, $|y_j| \leq \rho_j$ $(r_i \geq 0,\ \rho_j \geq 0)$. On note A_0 l'espace des fonctions holomorphes sur Z ; pour $k \geq 1$, on pose $A_k = A_0[y_j^d]$, $1 \leq |\alpha| \leq k$ (on pose aussi $y_j^0 = y_j$), et on pose $A = \cup A_k$ [*Attention* : les notations diffèrent de celle du §1].

L'anneau A est un anneau différentiel, les dérivées partielles D_i étant encore définies comme en II.1 ; comme précédemment, on appelle « différentiel » un idéal I de A stable par les D_i.

La donnée d'un tel I définit un « germe de D-variété au voisinage de Z » (on dira aussi « au-dessus de Z »), de la manière suivante : soient $\mathcal{A}_0$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^{n+p}$, et $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_0[y_j^\alpha]$, $1 \leq |\alpha| \leq k$; posons $I_k = I \cap \mathcal{A}_k$, et soient $\mathcal{I}_k$ les faisceautisés des I_k, comme en 1.2. Posons aussi $B_k = A_k/I_k$, $\mathcal{B}_k = \mathcal{A}_k/\mathcal{I}_k$; les $\mathcal{B}_k$ sont les faisceaux structuraux de variétés affines Y_k, définies sur des voisinages de Z qui dépendent *a priori* de k (c'est seulement après la démonstration du théorème de finitude 2.1 ci-dessous qu'on pourrait choisir un voisinage indépendant de k). On fait les identifications habituelles, *i.e.* on identifie Y_k à sa restriction à un autre voisinage plus petit de Z ; on posera encore $\mathcal{B}_k = \mathcal{O}_{Y_k}$.

Au détail près concernant les voisinages de Z, on est dans la situation des D-variétés comme en IV.2. Les notions définies au Chapitre IV, module caractéristique, involutivité, *etc.* , gardent un sens ici et je les utiliserai sans autre commentaire.

Remarquons aussi ceci : si l'on suppose I réduit, alors les $\mathcal{I}_k$ (et les Y_k) sont réduits ; soit en effet $\mathcal{I}_k^{\mathrm{red}}$ la racine de $\mathcal{I}_k$; on a $\Gamma(Z, \mathcal{I}_k^{\mathrm{red}}) = \Gamma(Z, \mathcal{I}_k)^{\mathrm{red}} = I_k^{\mathrm{red}} = I_k$; d'après 1.2 ceci entraîne $\mathcal{I}_k^{\mathrm{red}} = \mathcal{I}_k$.

Cela posé, les théorèmes sont les suivants :

Théorème 2.1. — *Dans A, toute suite croissante d'idéaux différentiels réduits est stationnaire.*

Théorème 2.2. — *Soit I un idéal différentiel réduit de A, avec $I_k = I \cap \mathcal{A}_k$, et soit $Y = \{Y_k\}$ la D-variété sur Z qu'il définit. Il existe un $\ell \geq 0$ et un $f \in A_\ell - I_\ell$ possédant les propriétés suivantes :*

*i) Hors de $f = 0$, Y est ℓ-involutif (*cf.* Définition IV.4.9).*

ii) Pour $k \geq \ell$, f n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à A_k/I_k ; autrement dit la multiplication par f est injective dans A_k/I_k.

Pour voir que les théorèmes précédents entraînent la version locale de IV.4.5 et IV.4.11, on prend un ouvert $V \subset \mathbb{C}^{n+p}$, et on considère les D-variétés réduites définies par un modèle local au-dessus de V. On prend alors pour Z un polycylindre fermé contenu dans V ; l'application à Z des théorèmes ci-dessus donne les résultats cherchés, par exemple sur l'intérieur $\overset{\circ}{Z}$ de Z.

Le seul point qui demande une explication est IV.4.11, *ii)* : avec les notations ci-dessus, soit a un point de $|Y_k|$ au-dessus de $\overset{\circ}{Z}$; alors la condition 2.2, *ii)*, jointe à la platitude de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}_{k,a}$ sur A_k (remarque 1.3) montre que la multiplication par f est injective dans $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}_{k,a}/\mathcal{I}^{\mathrm{an}}_{k,\ell} = \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}_k,a}$; mais ceci signifie justement qu'aucune composante de Y^{an}_k n'est contenue dans $f = 0$, ce qui est le résultat cherché (je rappelle que, Y_k étant réduit, Y^{an}_k l'est aussi, cf. IV.1.1).

3. Le cas des idéaux premiers

3.1. — Dans ce paragraphe, on garde les notations du paragraphe précédent. On prend un idéal différentiel premier I, et on veut démontrer le théorème 2.2 pour I.

On désigne $pr_1 I_k \subset I_{k+1}$ le prolongement de I_k à l'ordre un, *i.e.* l'idéal de A_{k+1} engendré par I_k et les $D_i I_k$; le faisceau $pr_1\mathcal{I}_k$ se définit de la même manière ; c'est aussi le faisceautisé de $pr_1 I_k$.

D'autre part, on appelle « prolongement faible de I_k » l'idéal $\widetilde{pr}_1 I_k$ de A_{k+1} formé des f qui vérifient, pour un $g \in A_k - I_k$: $gf \in pr_1 I_k$. Comme I_{k+1} est premier, on a $\widetilde{pr}_1 I_k \subset I_{k+1}$.

Lemme 3.2. — *L'idéal $\widetilde{pr}_1 I_k$ est premier.*

Il suffit de démontrer que son image dans $A_{k+1}/I_k A_{k+1} = A_{k+1} \underset{A_k}{\otimes} B_k$ est un idéal premier ; soit K_k le corps des fractions de B_k ; il suffit même de prouver que son image dans $A_{k+1} \underset{A_k}{\otimes} K_k = K_k[y_j^\alpha]$, $|\alpha| = \ell + 1$, est un idéal premier. Mais, par définition des prolongements, cet idéal est engendré par des équations linéaires affines en les y_j^α, $|\alpha| = k+1$. Et il est élémentaire de démontrer qu'un tel idéal est premier.

Le résultat-clef est maintenant le suivant :

Proposition 3.3. — *Il existe ℓ tel que, pour $k \geq \ell$ on ait $\widetilde{pr}_1 I_k = I_{k+1}$.*

Pour démontrer ce résultat, l'idée essentielle consiste à utiliser le module caractéristique de Y, qui joue ici le rôle de version non-linéaire du gradué associé à un module filtré. Pour sa définition, je renvoie à IV.3.1, et je me contente de fixer les notations, qui sont un peu différentes de celles de *loc. cit.*

On désigne respectivement par $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{O}_{Y_k}[\xi]^p$ et $\mathcal{M}_k = \mathcal{O}_{Y_k}[\xi]^p/\mathcal{N}_k$ le module des symboles et le module caractéristique de $\mathcal{I}_k$; on pose $N_k = \Gamma(Z, \mathcal{N}_k)$, $M_k = \Gamma(Z, \mathcal{M}_k) = B_k[\xi]^p/N_k$; si $\{\mathcal{N}_k^p\}, \{\mathcal{M}_k^p\}$, *etc.* désignent les graduations de ces modules, on a en particulier $\mathcal{M}_k^k = \Omega^1_{Y_k/Y_{k-1}}$. On pose enfin $N = \varinjlim N_k$, $M = \varinjlim M_k = B[\xi]^p/N$; on a $M^k = B \underset{B_k}{\otimes} M_k^k$.

Notons K_k (resp. K) le corps des fractions de B_k (resp. B) ; alors $K \underset{B}{\otimes} N$ est un sous-module gradué de $K[\xi_1, \ldots, \xi_n]^p$; d'après Hilbert, il existe un $\ell \geq 0$ tel que $K \underset{B}{\otimes} N$ soit engendré par les $K \underset{B}{\otimes} N^k$, $k \leq \ell$; en particulier, pour $k \geq \ell$, on a $K \underset{B}{\otimes} N^{k+1} = \sum \xi_i (K \underset{B}{\otimes} N^k)$.

Nous allons voir que la proposition est vraie avec cette valeur de ℓ.

Prenons en effet un $k \geq \ell$ et considérons l'application

$$B_{k+1} \cdot (\textstyle\sum \xi_i N_k^k) \longrightarrow N_{k+1}^{k+1} \ ; \tag{3.4}$$

cette application est une bijection après la tensorisation $K \underset{B_{k+1}}{\otimes} \cdot$; donc elle est encore une bijection après la tensorisation $K_{k+1} \underset{B_{k+1}}{\otimes} \cdot$. Par suite, il existe $f \in A_{k+1} - I_{k+1}$ tel que (3.4) soit bijectif après localisation en f^{-1}.

Cette propriété s'exprime encore ainsi : soit Y'_{k+1} la variété définie par $\mathcal{I}'_{k+1} = \widetilde{pr}_1 \mathcal{I}_k$, le faisceautisé de $\widetilde{pr}_1 I_k$. Posons

$$I'_{k+1} = \widetilde{pr}_1 I_k,$$
$$B'_{k+1} = \Gamma(Z, \mathcal{O}_{Y'_{k+1}}) = A_{k+1}/I'_{k+1}.$$

Quitte à remplacer f par un multiple convenable, on peut supposer que Y'_{k+1} est, hors de $f = 0$ (*i.e.* après localisation en f^{-1}) la variété définie par $pr_1 \mathcal{I}_k$. Alors la propriété précédente s'écrit aussi ainsi

3.5. — L'application naturelle $\Gamma(Z, \Omega^1_{Y'_{k+1}/Y_k}) \underset{B'_{k+1}}{\otimes} B_{k+1} \longrightarrow \Gamma(Z, \Omega^1_{Y_{k+1}/Y_k})$ *est bijective après localisation en* f^{-1}.

[En termes imagés : au point générique a de Y_{k+1}, on a $\Omega^1_{Y'_{k+1}/Y_{k+1}}(a) = \Omega^1_{Y_{k+1}/Y_k}(a)$.] Il s'agit d'en déduire qu'on a $Y'_{k+1} = Y_{k+1}$, ce qui est une variante du théorème des fonctions implicites.

Les assertions qui suivent sont relatives à un voisinage ouvert de Z, qu'on rétrécit si nécessaire ; elles ont déjà été utilisées en IV.4 et sont démontrées en appendice.

On peut trouver $g \in A_k - I_k$ tel que, hors de $g = 0$, Y_k soit lisse, et $Y'_{k+1} \to Y_k$ soit un fibré affine (= surjectif, et localement de rang constant). On peut aussi supposer que $Y_{k+1} \to Y_k$ est surjectif.

Soit a un point de Y_{k+1}, avec $f(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$, et où Y_{k+1} est lisse ; en a, le morphisme de restriction $\Omega^1_{Y'_{k+1}/Y_k,a} \to \Omega^1_{Y_{k+1}/Y_k,a}$ est bijectif ; par le théorème des fonctions implicites, on aura $Y'_{k+1} = Y_{k+1}$ au voisinage de a ; par connexité de la fibre de Y'_{k+1} , on aura $Y_{k+1} = Y'_{k+1}$ au voisinage de la projection de a dans Y_k. Par densité, on aura finalement $Y'_{k+1} = Y_{k+1}$. Par le « Nullstellensatz », on conclut qu'on a $I'_{k+1} = I_{k+1}$; ceci termine la démonstration.

Notons pour un instant ℓ' l'entier noté ℓ ci-dessus, et considérons encore le module caractéristique $K \underset{B}{\otimes} M$. Soit ℓ un entier tel que ce module soit ℓ-involutif en tant que K-module gradué.

Proposition 3.6. — *Avec cette valeur de* ℓ, *le théorème 2.2 est vrai pour* I.

i) Remarquons d'abord que la condition $H_{k,1}(K \underset{B}{\otimes} M) = 0$ est équivalente au fait que $K \underset{B}{\otimes} N$ est engendré par ses éléments de degré $\leq \ell$ (voir Chapitre I). Donc en particulier, on aura $\ell \geq \ell'$, et la proposition 3.3 sera vraie pour ℓ.

ii) On peut trouver $f \in A_\ell - I_\ell$ tel que, hors de $f = 0$, Y_ℓ est involutif. En effet, en raisonnant comme dans la démonstration de 3.3, on peut supposer que Y_ℓ est lisse, et que $pr_1 Y_\ell \to Y_\ell$ est un fibré affine (= surjectif et de rang constant, en particulier $pr_1 Y_\ell$ est lisse). Reste à vérifier que l'on peut supposer le module caractéristique $\mathcal{M}_\ell$ de Y_ℓ ℓ-régulier.

Quitte à remplacer f par un multiple convenable, on peut déjà supposer $\mathcal{M}^\ell_\ell$ et $\mathcal{M}^{\ell+1}_\ell$ localement libres. D'autre part, l'ensemble de bases $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$, $A \in G\ell(n, K)$ qui vérifient le critère de Cartan I.3.3 est un ouvert de Zariski non vide de $G\ell(n, K)$; donc on peut choisir, par exemple, A dans

$G\ell(n,\mathbb{Q})$ [et même $G\ell(n,\mathbb{Z})$; utiliser le fait suivant ; soit $f \in K[t_1,\ldots,t_m]$, K un corps de caractéristique 0 ; il existe $(q_1,\ldots,q_m) \in \mathbb{Z}^m$ vérifiant $f(q_1,\ldots,q_m) \neq 0$].

Soit $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ la base ainsi obtenue ; alors on peut trouver $g \in A_k - I_k$ tel que, pour un voisinage V de Z convenable, en tout point $a \in V - \{g = 0\}$, $\mathcal{M}_\ell(a)$ vérifie le critère de Cartan pour la base $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ (utiliser le fait élémentaire suivant : si E est un module de type fini sur un anneau intègre A, alors il existe $f \in A - \{0\}$ tel que $E[f^{-1}]$ soit libre sur $A[f^{-1}]$).

iii) Pour terminer, il suffit de voir ceci : désignons par Y'_k ($k \geq \ell$) les prolongements successifs de Y_ℓ. Alors, hors de $f = 0$, on a $Y'_k = Y_k$ (donc Y_k est l'adhérence de Zariski de Y'_k restreint à $f \neq 0$) ; ceci démontrera la proposition.

Par récurrence, il suffit de traiter le cas $k = \ell+1$; par 3.3, on a déjà $Y_{\ell+1} = \widetilde{pr}_1 Y_\ell$; il suffit donc de voir que, hors de $f = 0$, on a $(Y'_{\ell+1} =)\ pr_1 Y_\ell = \widetilde{pr}_1 Y_\ell$; mais cela résulte immédiatement de la définition de $\widetilde{pr}_1$, et de la lissité de $pr_1 Y_\ell$.

4. Le cas général : première démonstration

4.1. — On va démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2 dans le cas général, en utilisant le cas particulier qui vient d'être établi. Je garde les notations des paragraphes précédents ; j'utiliserai les notations suivantes : pour $S \subset A$, $\{S\}$ désigne l'idéal différentiel réduit engendré par S ; d'autre part, pour $S \subset A$, $T \subset A$, on pose $ST =$ (l'ensemble des st, $s \in S$, $t \in T$.)

Le lemme suivant est classique (cf. [**Ri1**] ou [**Kap**]) :

Lemme 4.2. — *Pour $S \subset A$, $T \subset A$, on a $\{S\} \cap \{T\} = \{ST\}$.*

L'inclusion $\supset$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit de voir qu'on a $\{S\}\ \{T\} \subset \{ST\}$: en effet, si $f \in \{S\} \cap \{T\}$, alors $f^2 \in \{S\}\ \{T\}$.

Pour établir cette dernière inclusion, il suffit de voir que, pour $s \in S$, $t \in T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a $(D^\alpha s)(D^\beta t) \in \{ST\}$; par récurrence, il suffit de voir qu'on a $(D_i s)t \in \{ST\}$. On a $(D_i s)t^2 = D_i(st)t - st D_i t \in \{ST\}$; d'où $[(D_i s)t]^2 \in \{ST\}$ et $(D_i s)t \in \{ST\}$.

4.3. — Démontrons maintenant le théorème 2.1. On va utiliser ici une méthode due à Kaplansky [**Kap**] ; voir aussi [**Ko**] pour une méthode voisine.

Il est équivalent de démontrer que tout idéal différentiel réduit est de la forme $\{S\}$, avec S fini ; je dirai pour un instant « est de type fini ». Supposons que ce ne soit pas le cas, et soit I un idéal différentiel réduit maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini (existence par le lemme de Zorn). On va voir que chacune des hypothèses « I n'est pas premier » et « I est premier » conduit à une contradiction.

i) Supposons que I ne soit pas premier ; alors il existe $g = g_1 g_2 \in I$, $g_1 \notin I$, $g_2 \notin I$. Chacun des idéaux $\{I, g_1\}$ et $\{I, g_2\}$ est de type fini ; par 4.2 leur intersection est égale à I, et est de type fini, d'où une contradiction.

ii) Supposons que I soit premier ; d'après les résultats du §3, il existe $f \notin I$ et ℓ tels que $I[f^{-1}]$ est engendré dans $A[f^{-1}]$ par $I_\ell = I \cap A_\ell$; soient $g_1, \dots, g_q$ des générateurs de I_ℓ, et soit $J \subset I$ l'idéal $\{g_1, \dots, g_q\}$.

Soit d'autre part K l'idéal $\{f, I\}$; par hypothèse, K est de type fini, donc de la forme $\{f, h_1, \dots, h_r\}$; il est immédiat de vérifier qu'on peut supposer qu'on a $h_1, \dots, h_r \in I$. Posons $L = \{J, h_1, \dots, h_r\}$; on va voir qu'on a $I = L$, ce qui montrera que I est de type fini et donnera la contradiction cherchée.

Soit en effet $a \in I$; on a $a \in K$, donc il existe p tel qu'on ait $a^p = b + \Sigma c_\alpha \partial^\alpha f$, avec $b \in L$, $c_\alpha \in A$; donc, on a $a^{p+1} = ba + \Sigma c_\alpha (\partial^\alpha f) a$.

Il existe q tel qu'on ait $f^q a \in J \subset L$, donc $(fa)^q \in L$ et $fa \in L$; alors 4.2 montre qu'on a $(\partial^\alpha f) a \in L$ pour tout α. Donc $a^{p+1} \in L$, et $a \in L$, ce qui est le résultat cherché.

Le théorème 2.1 admet le corollaire suivant :

Corollaire 4.4. — *Tout idéal différentiel réduit est intersection finie d'idéaux différentiels premiers.*

Soit I réduit ; si I n'est pas premier, il existe $f = f_1 f_2 \in I$, $f_1 \notin I$, $f_2 \notin I$. On a $I = \{I, f_1\} \cap \{I, f_2\}$; si I n'est pas intersection finie d'idéaux premiers, $\{I, f_1\}$ ou $\{I, f_2\}$ a la même propriété ; en itérant, on trouve une suite croissante infinie d'idéaux réduits, ce qui contredit le théorème 2.1.

La démonstration du théorème 2.2 est maintenant immédiate : soit I un idéal réduit de A, avec $I_\ell = I \cap A_\ell$, et soit $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$ une décomposition de I en idéaux différentiels premiers ; on peut supposer la décomposition minimale, *i.e.* $P_i \not\subset P_j$, $j \neq i$; il est connu qu'alors, on a $P_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} P_j$. Choisissons ℓ et $f_i \in B_\ell - P_{i,\ell}$ tels que le théorème soit vrai pour (f_i, P_i, ℓ), $(P_{i,\ell} = P_i \cap A_\ell)$. On peut aussi supposer que pour tout i, on a $P_{i,\ell} \not\subset \bigcup_{j \neq i} P_{j,\ell}$ (remplacer ℓ par $\ell' > \ell$ si nécessaire).

Si, pour chaque i, on a $f_i \notin \cup P_j$, il suffit de prendre $f = f_1 \cdots f_r$. Si, pour un i on a $f_i \in P_j$, $j \neq i$, choisissons $g_i \in P_{i,\ell} - \bigcup_{j \neq i} P_{j,\ell}$; pour k fixé, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $f_i + \lambda g_i \in P_{k,\ell}$; donc on peut trouver un λ tel qu'on ait $f_i + \lambda g_i \notin \cup P_j$; le théorème 2.2 est encore vrai pour $(f_i + \lambda g_i, P_i, \ell)$ et il suffit de remplacer f_i par $f_i + \lambda g_i$. D'où le résultat.

5. Le cas général : deuxième démonstration

La méthode précédente, très rapide, a divers inconvénients ; entre autres, celui d'utiliser l'axiome de choix. La variante qui suit, un peu plus compliquée, me semble avoir les avantages suivants :

i) Elle est plus éclairante ; ceci est évidemment une appréciation subjective.

ii) Elle utilise seulement l'axiome de choix dénombrable.

À noter que dans le cas algébrique (p. ex. $A = \mathbb{C}[x_i, y_i^\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$), la méthode de Ritt [**Ri1**] qui utilise un ordre sur les monômes différentiels permettrait d'éliminer toute référence à un quelconque axiome de choix. Malheureusement, ceci ne rend pas pour autant effectif la fabrication d'un système de générateurs d'un idéal réduit ; pour cette question, et ses relations avec le « problème de Ritt » (= décision de l'inclusion d'un idéal premier dans un autre), voir notamment [**B-L-O-P**] et [**Pe**].

Je garde les notations des paragraphes précédents ; en particulier, $pr_k I_\ell \subset A_{\ell+k}$ désigne le prolongement d'ordre k d'un idéal $I_\ell \subset A_\ell$. Comme au §4, j'appelle « de type fini » un idéal différentiel réduit de la forme $\{S\}$, S étant fini.

Définition 5.1. — Soit I un idéal de A_ℓ ; on dira que « I est saturé » si, pour tout $k \geq 1$, on a $pr_k I \cap A_\ell = I$.

Lemme 5.2. — *Soit I un idéal réduit de A_ℓ, et soit $I = \cap P_i$ $(1 \leq i \leq s)$ sa décomposition minimale (i.e. $P_i \not\subset P_j$, $i \neq j$). Si I est saturé, les P_i le sont aussi.*

Ceci se voit par localisation ; par exemple, soit $f \notin P_1$, $f \in P_2 \cap \cdots \cap P_s$; comme le prolongement commute à la localisation, on voit immédiatement que $I[f^{-1}] = P_1[f^{-1}]$ est saturé dans $A_\ell[f^{-1}]$; on en déduit que P_1 est saturé.

Lemme 5.3. — *Soit $P_k \subset A_k$, $k \geq \ell$, une famille d'idéaux premiers saturés ; on suppose qu'on a $P_k \subset P_{k+1}$, $k \geq \ell$; soit $P = \cup P_k$; alors, on a $P_{k+1} \supset pr_1 P_k$; de plus, pour k assez grand, on a $P \cap A_k = P_k$.*

La première assertion est immédiate : en effet, on a $P_{k+1} = pr_1 P_{k+1} \cap A_{k+1} \supset pr_1 P_k \cap A_{k+1} = pr_1 P_k$. Pour démontrer la seconde, on utilise les résultats du §3. Soit $P'_k = P \cap A_k$; il existe un $m \geq \ell$ et un $f \in A_m - P'_m$ tel que, pour $k \geq m$, on ait, hors de $f = 0$ (*i.e.* après localisation en f^{-1}) $pr_1 P'_k = P'_{k+1}$. D'autre part, comme A_m est noethérien, on a, pour un certain k_0 : $P'_m = P_{m+k_0} \cap A_m$. A fortiori, pour $k \geq k_0$, on a $P'_m = P_{m+k} \cap A_m$. On va voir ceci : hors de $f = 0$, pour $k \geq k_0$, on a $P'_{m+k} = P_{m+k}$; ce résultat sera alors encore vrai partout puisque les deux idéaux sont premiers, et f ne leur appartient pas. On a évidemment $P_{m+k} \subset P'_{m+k}$; d'autre part, hors de $f = 0$, on a

$$P'_{m+k} = pr_k P'_m \subset pr_k P_{m+k} \cap A_{m+k} = P_{m+k} \ .$$

d'où le résultat.

Corollaire 5.4. — *Une suite croissante $P^1 \subset \cdots \subset P^k \subset \cdots$ d'idéaux différentiels premiers de A est stationnaire.*

On applique le lemme précédent à la suite $P_k = P^k \cap A_k$; on conclut en utilisant 3.3.
(*Attention* : cette propriété n'est pas équivalente au fait que les idéaux différentiels premiers soient de type fini, contrairement à l'énoncé analogue pour les idéaux différentiels réduits.)

Lemme 5.5. — *Considérons dans A les assertions suivantes :*

i) Tout idéal différentiel premier est de type fini (en tant qu'idéal différentiel réduit).

ii) Tout idéal différentiel réduit est intersection finie d'idéaux différentiels premiers.

iii) Tout idéal différentiel réduit est de type fini.

Alors *i)* entraîne *ii)* et *iii)*.

Montrons d'abord *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Soit I un idéal différentiel réduit ; pour tout $k \geq 0$, posons $I \cap A_k = I_k$, et notons $P_{k,1} \cap \cdots \cap P_{k,\mu(k)}$ sa décomposition minimale en idéaux premiers. D'après 5.2, les $P_{k,i}$ sont saturés.

Les $P_{k+1,i} \cap A_k$ constituent une décomposition en idéaux premiers de I_k, non nécessairement minimale ; par suite, pour tout i, $P_{k+1,i} \cap A_k$ contient un $P_{k,j}$, et tous les $P_{k,j}$ sont obtenus ainsi. Je dirai que « $P_{k,i}$ est une bifurcation » s'il existe au moins deux $P_{k+1,j}$ distincts vérifiant $P_{k+1,j} \cap A_k \supset P_{k,i}$.

Pour démontrer *ii)*, il suffit de voir que $\mu(k)$ est borné quand k tend vers l'infini. Pour cela, il suffit de prouver l'assertion suivante :
(*) *Soit $Q_0 \subset \cdots \subset Q_k \subset \cdots$ une suite croissante, Q_k étant l'un des $P_{k,i}$; alors cette suite ne contient qu'un nombre fini de bifurcations.*

En effet, si $\mu(k)$ n'était pas borné, on pourrait trouver un P_{0,i_0} tel que le nombre des $P_{k,j}$ le contenant pour k fixé ne soit pas borné quand $k \to \infty$. De même, on trouverait un $P_{1,i_1} \supset P_{0,i_0}$ ayant la même propriété, et ainsi de suite. La suite P_{k,i_k} ainsi fabriquée contiendrait une infinité de bifurcations.

Pour démontrer (*), on raisonne par l'absurde ; soit Q l'idéal $\cup Q_k$; d'après 5.3, on a $Q \cap A_k = Q_k$, pour k assez grand, disons $k \geq \ell$. D'autre part, l'hypothèse *i)* entraîne qu'on a $Q = \{Q_k\}$ pour $k \geq m$; on peut supposer $m \geq \ell$.

Je dis qu'aucun des Q_r, $r \geq m$, n'est une bifurcation ; sinon, on pourrait fabriquer une autre suite de $P_{k,j}$ à partir de Q_r, disons $Q_r \subset Q'_{r+1} \subset Q'_{r+2} \cdots$, avec $Q_{r+1} \neq Q'_{r+1}$. Soit $Q' = \cup Q'_{r+k}$; comme $Q = \{Q_r\}$, on a $Q' \supset Q$; donc en utilisant 5.3, on a $Q'_k \supset Q_k$ pour k assez grand ; comme la décomposition de I_k est minimale, ceci entraîne $Q'_k = Q_k$, d'où $Q' = Q$; comme on a $Q \cap A_{r+1} = Q_{r+1}$, on en tire $Q'_{r+1} \subset Q_{r+1}$, ce qui contredit la minimalité de la décomposition de I_{r+1}.

Montrons maintenant que *i)* et *ii)* entraînent *iii)*. Soit I un idéal différentiel réduit, et soit $I = P_1 \cap \cdots \cap P_r$ une décomposition en idéaux premiers. Par hypothèse, on a $P_i = \{S_i\}$, avec S_i fini ; d'après 4.2, on a $I = \{S_1 \cdots S_r\}$; donc I est de type fini.

J'aurai encore besoin d'une remarque :

5.6. — Si l'on se restreint à la famille des idéaux différentiels (premiers, ou réduits) contenant strictement un idéal donné I, le même énoncé qu'en 5.5 est encore vrai ; la démonstration est la même.

5.7. — On termine maintenant la démonstration de 2.1 et 2.2 par une variante de la méthode utilisée en 4.3.

i) Montrons d'abord que tous les idéaux différentiels premiers sont de type fini. Si ce n'est pas le cas, le corollaire 5.4 nous montre l'existence d'un I maximal parmi ceux qui n'ont pas de type fini. D'après les résultats du paragraphe 3, il existe $f \notin I$ et $\ell \geq 0$ tels que $I[f^{-1}]$ soit engendré dans $A[f^{-1}]$ par $I_\ell = I \cap A_\ell$ (ici on a même « engendré en tant qu'idéal différentiel », et pas seulement idéal différentiel réduit).

Comme I est maximal parmi les idéaux différentiels premiers non de type fini, l'idéal $\{f, I\}$ est de type fini par la remarque 5.6.

En utilisant, comme en 4.3, le lemme 4.2, on conclut que I est de type fini, ce qui est contradictoire.

ii) On peut maintenant conclure en utilisant 5.5. L'assertion *iii)* donne le théorème 2.1 ; d'autre part, l'assertion *ii)* dit que tout idéal réduit est intersection finie d'idéaux premiers. On en déduit le théorème 2.2 comme en 4.4.

6. Variante

Ce qui suit est sans doute une curiosité ; cependant, les solutions formelles des équations analytiques se rencontrent naturellement dans la théorie des points singuliers des équations différentielles ordinaires. Les considérations ci-dessous sont peut-être aussi une réponse à une phrase mystérieuse de Ritt, relative à la nécessité de développer l'algèbre différentielle dans le cadre analytique :

« In the analytic case, the procedure will depend on whether one works in the neighborhood of a point in the space of the independent variables, or in the neighborhood of a set of functions constituing a point of a manifold » ([**Ri1**], Appendix).

Soient $Y_1, \dots, Y_p \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ des séries formelles ; on pose $Y_j = \sum a_j^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour k entier ≥ 0, soit A_k l'espace $\mathbb{C}\{x_i, y_j^\alpha - a_j^\alpha\}$, $|\alpha| \leq k$, *i.e.* l'espace des séries convergentes en (x_i, y_j^α), $-|\alpha| \leq k)$ au voisinage de $x = 0$, $y_j^\alpha = a_j^\alpha$. On pose $A = \cup A_k$; c'est un anneau différentiel pour les dérivations D_i habituelles. L'anneau A admet un idéal différentiel maximal M, qui est évidemment premier, formé des f qui vérifient $f(x_i, \partial^\alpha Y_j(x)) = 0$; en effet, ces f forment évidemment un idéal différentiel. D'autre part, l'idéal maximal est formé des f qui vérifient, pour tout (α, i) : $D_i^\alpha f(0, a_j^\beta) = 0$. Alors, la formule de Taylor $f(x_i, \partial^\alpha Y_j(x)) = \sum \frac{x^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(0, a_j^\beta)$ montre que ces deux conditions sont équivalentes.

Il est possible de démontrer, dans A, des théorèmes analogues à 2.1 et 2.2 ; ceci se fait comme dans le cas traité ci-dessus (le point clef est le cas des idéaux premiers qui se traite comme au §3).

Je vais me contenter de regarder le cas de l'idéal maximal M. En raisonnant comme au §3, on montre qu'il existe un $\ell \geq 0$ et un $f \in A_\ell - M_\ell$ ($M_\ell = A_\ell \cap M$) tels que, dans $A[f^{-1}$, $M[f^{-1}]$ soit engendré par M_ℓ (en tant qu'idéal différentiel tout court ; on a aussi une propriété « d'involutivité hors de $f = 0$ » que je laisse le lecteur énoncer). Soient $g_1, \dots, g_r$ des générateurs de M_ℓ en tant qu'idéal de A_ℓ. On a ici le résultat suivant :

Proposition 6.1. — *Les éléments $g_1, \dots, g_2$ engendrent M en tant qu'idéal différentiel réduit de A.*

Autrement dit, avec les notations du §5, on a $M = \{g_1, \dots, g_r\}$.

Pour le voir, on reprend le raisonnement de 4.3, qui se simplifie ici. Soit $L = \{g_1, \dots, g_r\}$, et soit $a \in M$; il existe q tel qu'on ait $f^q a \in L$, d'où

$(fa)^q \in L$ et $fa \in L$; d'après 4.2, on aura donc pour tout α $(\partial^\alpha f)a \in L$; mais il existe un α tel que $\partial^\alpha f$ soit inversible ; d'où $a \in L$.

Par contre, je ne suis pas parvenu à voir si M n'admet qu'un nombre fini de générateurs en tant qu'idéal différentiel tout court.

Il résulte de la proposition précédente qu'il existe un idéal différentiel I de $A_\ell[y_j^\alpha]$, $|\alpha| \geq r+1$ dont l'extension à A ait M pour racine ; moyennant une réduction à l'ordre 0 (cf. IV.2.3), cela nous ramène à la situation considérée antérieurement. Appelons solutions de M les solutions formelles ou convergentes de I (on peut aussi prendre les solutions d'un système de générateurs quelconque de M en tant qu'idéal réduit ; au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, cela ne dépend pas du système de générateurs choisi). Alors IV.4.12 nous montre que $(Y_1, \ldots, Y_p)$ est limite de solutions convergentes de M pour la topologie de la convergence dans les espaces de jets.

Dans le cas des équations différentielles ordinaires, *i.e.* $n = 1$ on a même un résultat plus fort : pour toute direction θ en $0 \in \mathbb{C}$, il existe un secteur ouvert Σ centré sur la direction θ et une solution convergente de M dans Σ admettant $(Y_1, \ldots, Y_p)$ pour développement asymptotique en 0 ; cf. **[Mal6]**.

APPENDICE A

VARIÉTÉS AFFINES

1. Cohérence

Dans cet appendice, je démontre les propriétés des variétés affines au-dessus d'une variété analytique qui sont utilisées à partir du Chapitre IV. Ces propriétés sont bien connues aussi bien dans le cas analytique que dans le cas algébrique ; mais, dans le cas mixte considéré ici , je n'en ai pas de référence.

Soient, comme en IV.1, une variété $\mathbb{C}$-analytique Y et une variété affine Z au-dessus de Y, définie par une $\mathcal{O}_Y$-algèbre $\mathcal{A}$ de présentation finie. On a les résultats suivants :

Proposition 1.1. — *$\mathcal{A}$ est cohérent, i.e. tout idéal (= tout faisceau d'idéaux) localement de type fini est localement de présentation finie.*

Appelons cohérents de tels idéaux ; plus généralement, appelons cohérents les $\mathcal{A}$-modules localement de présentation finie ; on a alors le résultat suivant :

Proposition 1.2. — *Toute suite croissante d'idéaux cohérents (et plus généralement de sous-modules cohérents d'un $\mathcal{A}$-module cohérent fixe) est localement stationnaire.*

Il suffit de démontrer ces résultats lorsque X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[t_1, \ldots, t_m]$. Pour cela, il suffit même de démontrer les résultats analogues pour un polycylindre fermé $K \subset X$. Mais alors, ils sont conséquence immédiate des théorèmes V.1.1 et V.1.2.

2. De l'affine au projectif

Pour établir les autres propriétés, que j'ai en vue, je vais me ramener à une situation projective relative, de la manière suivante :

Soit $\mathbb{P}_m$ l'espace projectif complexe, considéré comme variété analytique complexe ; il est muni des coordonnées homogènes habituelles $(s_0, \dots, s_m)$; l'espace affine $\mathbb{C}^m$ (ou $\mathbb{A}^m$, pour les pédants) est muni des coordonnées $t_1, \dots, t_m$ et plongé dans $\mathbb{P}_m$ par $t_i = s_i/s_0$; on note $\{\infty\}$ son complémentaire $\{s_0 = 0\}$.

Soit X une variété analytique-complexe ; on considère la variété $Z = X \times \mathbb{P}_m$, munie du diviseur $D = X \times \{\infty\}$; on note comme d'habitude $\mathcal{O}_X(\ell)$ le faisceau des sections méromorphes f de $\mathcal{O}_Z$ vérifiant $\operatorname{div} f \geq (-\ell D)$. Pour F, $\mathcal{O}_Z$-module cohérent, on pose $F(\ell) = F \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{O}_Z(\ell)$.

On pose aussi $\mathcal{O}_Z(*D) = \varinjlim \mathcal{O}_Z(\ell)$; c'est le faisceau des fonctions méromorphes sur Z avec pôles sur D ; c'est un faisceau cohérent d'anneaux (résulte immédiatement, par localisation, du fait que $\mathcal{O}_Z$ est cohérent).

Posons $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_m]$ et soit M un $\mathcal{A}$-module cohérent ; on en déduit un $\mathcal{O}_Z(*D)$-module cohérent de la manière suivante : soit p la projection $Z \to X$; on a $p_*\mathcal{O}_Z(*D) = \mathcal{A}$, d'où une flèche $p^{-1}\mathcal{A} \to \mathcal{O}_Z(*D)$, et l'on pose $p^{\#}M = p^{-1}M \underset{p^{-1}\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{O}_Z(*D)$.

Avant d'énoncer le résultat que j'ai en vue, encore une définition : si F est un $\mathcal{O}_Z(*D)$-module cohérent, on appelle *réseau* de F un sous $\mathcal{O}_Z$-module cohérent G qui engendre F sur $\mathcal{O}_Z(*D)$.

Si F est de la forme $p^{\#}M$, avec M un $\mathcal{A}$-module cohérent, il admet localement sur X un réseau : soit en effet a un point de X, et soit U un ouvert de X contenant a au-dessus duquel M est un quotient de $\mathcal{A}^p$. Il est clair que l'image de $\mathcal{O}_Z^p$ [ou de n'importe quel $\mathcal{O}_Z^p(\ell)$] dans $p^{\#}M$ est un réseau au-dessus de U.

Par contre, il est faux que tout $\mathcal{O}_Z(*D)$-module cohérent admette un réseau, même localement sur X ; c'est déjà faux lorsque X est un point (voir dans **[Mal7]** un contre-exemple dû à Deligne, dans une situation voisine, *i.e.* sur $\mathbb{P}_2$ moins une courbe elliptique ; en plongeant cette situation dans $\mathbb{P}_m$ moins un hyperplan, on obtient un contre-exemple dans la situation considérée ici).

Pour abréger, j'appellerai dans la suite « spéciaux » les $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules cohérents admettant localement sur X un réseau. Cela dit, et avec les notations qui précèdent, le premier résultat, du type GAGA, est le suivant :

Théorème 2.1. — *Le foncteur $p^{\#}$: « $\mathcal{A}$-modules cohérents » $\to$ « $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules spéciaux » est exact et c'est une équivalence.*

La première assertion est immédiate : soit en effet $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ une suite exacte ; de la platitude des séries convergentes sur les polynômes on déduit que la suite $p^{\#}M \xrightarrow{\tilde{u}} p^{\#}N \xrightarrow{\tilde{v}} p^{\#}P$ est exacte hors de D ; par suite $\ker \tilde{v} / \operatorname{Im} \tilde{u}$ est à support dans D ; comme c'est un $\mathcal{O}_Z(*D)$-module cohérent, le Nullstellensatz montre qu'il est nul ; donc la suite précédente est exacte.

La démonstration de la seconde assertion fait appel au théorème des images directes de Grauert-Remmert [**Gr-R**], dont je rappelle l'énoncé.

Théorème 2.2. — *Soit G un $\mathcal{O}_Z$-module cohérent, et soit U un ouvert relativement compact de X. Notons encore p la projection $Z \to X$. Alors il existe $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ tel que, au-dessus de U, pour $\ell \geq \ell_0$, on ait les propriétés suivantes :*

i) L'application $p^*p_*G(\ell) \to G(\ell)$ est surjective ($p^*\bullet = \mathcal{O}_Z \underset{p^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p^{-1}\bullet$).

ii) Pour $i \geq 1$, on a $R^ip_*G(\ell) = 0$.

Ceci étant, la démonstration de 2.1 va reposer sur les remarques suivantes :

a) Soient $F \subset G$ deux $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules cohérents, avec G spécial ; alors F est aussi spécial. Plus précisément, si H est un réseau de G, $F \cap H$ est un réseau de F (ceci résulte facilement du fait suivant : soit $a \in D$, et soit $\{f = 0\}$ une équation locale de D au voisinage de 0 ; alors, pour tout germe $g \in G_a$, il existe $k > 0$ tel qu'on ait $f^{-k}g \in H_a$.

b) De la propriété précédente résulte facilement ceci : les $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules spéciaux forment une catégorie abélienne ; plus précisément, si $F \xrightarrow{u} G$ est un morphisme de modules spéciaux alors $\ker u$, $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{coker} u$ sont spéciaux.

c) Le foncteur p_* : « $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules spéciaux » $\to$ « $\mathcal{A}$-modules » est exact.

En vertu de *b)*, il suffit de montrer ceci : si $0 \to F \to G \to H \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_Z(*D)$-modules spéciaux, la suite $0 \to p_*F \to p_*G \to p_*H \to 0$ est exacte.

Par la suite exacte de cohomologie, il suffit d'établir le résultat suivant :

Lemme 2.3. — *Si F est un $\mathcal{O}_Z(*D)$-module spécial, on a $R^1p_*F = 0$.*

Quitte à restreindre X, on peut supposer que F admet un réseau G ; montrons d'abord ceci : pour $\ell \geq 0$ l'application naturelle $G(\ell) = G \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{O}_Z(\ell) \to F$ est injective ; pour le voir, on vérifie que cette application peut aussi se définir ainsi ; on considère l'application $G(\ell) \to F \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{O}_Z(\ell)$ obtenue en tensorisant $G \to F$ par $\mathcal{O}_Z(\ell)$; d'une part, cette application est injective car $\mathcal{O}_Z(\ell)$ est plat sur $\mathcal{O}_Z$; d'autre part, l'application $F \to F \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{O}_Z(\ell)$ déduite de $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z(\ell)$ est bijective : en effet, son noyau et son conoyau sont $\mathcal{O}_Z(*D)$-cohérents et à support dans D, donc nuls.

Ce résultat montre qu'on a $F = \varinjlim G(\ell)$; d'autre part, comme p est propre, les $R^i p_*$ commutent aux limites inductives ; on a donc, par 2.2, *ii)* $R^1 p_* F = \varinjlim R^1 p_* G(\ell) = 0$; d'où le lemme.

Pour démontrer le théorème, on va montrer que p_* est un quasi-inverse de $p^\#$.

d) Tout d'abord, soit M un $\mathcal{A}$-module cohérent ; on a un morphisme fonctoriel $M \to p_* p^\# M$ qui provient de la flèche canonique $M \to p_* p^{-1} M$ et de la flèche évidente $p^{-1} M \to p^\# M$.

Montrons que c'est un isomorphisme ; comme p_* et $p^\#$ sont exacts, en prenant localement sur X une présentation de M, il suffit d'établir le résultat pour $M = \mathcal{A}$; mais, dans ce cas, c'est évident.

e) Soit maintenant F un $\mathcal{O}_Z(*D)$-module spécial. On a de même un morphisme fonctoriel en F : $p^\# p_* F \to F$. Il suffit de voir que $p_* F$ est cohérent sur $\mathcal{A}$, et que cette flèche est un isomorphisme.

Pour cela, quitte à restreindre X, prenons un réseau G de F. En appliquant deux fois l'assertion 2.2, *ii)*, on trouve une présentation $\mathcal{O}_Z(k)^q \to \mathcal{O}_Z(\ell)^p \to G$; d'où une présentation $\mathcal{O}_Z(*D)^q \to \mathcal{O}_Z(*D)^p \to F \to 0$; on conclut alors comme en *d)*

Corollaire 2.4. — *Le foncteur $p^\#$ établit une bijection « idéaux cohérents de $\mathcal{A}$ » $\to$ « idéaux cohérents de $\mathcal{O}_Z(*D)$ ». La bijection inverse est donnée par p_*.*

En effet, comme on l'a remarqué plus haut, un idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Z(*D)$ admet toujours un réseau, par exemple $\mathcal{I} \cap \mathcal{O}_Z$.

Corollaire 2.5. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\mathcal{A}$; soit U un ouvert de X, et soit $f \in \Gamma(U, \mathcal{A})$; pour qu'on ait $f \in \Gamma(U, \mathcal{I})$, il faut et il suffit qu'en tout point de $p^{-1}U - D$, on ait $f \in p^\# \mathcal{I}$.*

En effet, l'idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_U(*D)$ engendré par f et $p^\# \mathcal{I}$ coïncide avec $p^\# \mathcal{I}$ hors de D ; par le Nullstellensatz, ces deux idéaux coïncident partout ; donc on a $f \in \Gamma(U, p_* p^\# \mathcal{I}) = \Gamma(U, \mathcal{I})$.

Par récurrence sur p, le même résultat est vrai pour un sous-module cohérent de $\mathcal{A}^p$. Aux notations près, ceci est le résultat énoncé en IV.1.1, *ii)* (le cas considéré dans cet énoncé est en apparence plus général, car il concerne une variété affine quelconque Y au-dessus de X ; mais, localement sur X, on se ramène immédiatement par plongement au cas considéré ici. La même remarque vaut pour la suite de l'appendice).

3. Ensembles analytiques stricts

Je garde les notations précédentes. Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\mathcal{A}$; l'idéal $p^{\#}\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Z(*D)$ admet un réseau canonique, à savoir $p^{\#}\mathcal{I} \cap \mathcal{O}_Z$; on notera $\overline{\mathcal{I}}$ cet idéal qui est en un certain sens la « clôture de Zariski » de $\mathcal{I}$ dans Z (noter aussi que la restriction de $\overline{\mathcal{I}}$ à $Z - D$ n'est autre que l'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{an}}$ considéré au chapitre IV).

Il est facile de caractériser les idéaux cohérents $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_Z$ qui sont de la forme $\overline{\mathcal{I}}$: ce sont ceux qui sont « étrangers à D » en ce sens qu'aucune section locale $\neq 0$ de $\mathcal{O}_Z/\mathcal{K}$ n'a son support dans D ; je laisse la vérification au lecteur.

Théorème 3.1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{I}$ est réduit ;

ii) $\mathcal{I}^{\mathrm{an}}$ est réduit ;

iii) $\overline{\mathcal{I}}$ est réduit.

Que *iii)* entraîne *ii)* est trivial, et *ii)* entraîne *i)* par 2.5. Pour prouver que *i)* entraîne *iii)*, on va passer par l'intermédiaire des idéaux homogènes de $Y = X \times \mathbb{C}^{m+1}$; pour cela, on considère l'idéal homogène $\mathcal{K}$ de $\mathcal{O}_X[s_0, \dots, s_m]$ engendré par les f homogènes en $(s_0, \dots, s_m)$ et vérifiant $f(1, t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{I}$; on note $\mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_Y$ qu'il engendre. Supposons $\mathcal{I}$ réduit ; sur $X \times \{0\}$, $\mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ est réduit ; prenons en effet $a \in S$; posons $b = (a, 0) \in Y$ et soit $f \in \mathcal{O}_{Y,b}$ tel qu'on ait $f^k \in \mathcal{K}^{\mathrm{an}}_b$ pour un certain k ; en écrivant $f = \sum_{\ell \geq \ell_0} f_\ell$, les f_ℓ homogènes, on trouve par récurrence que, pour tout ℓ, on a $f_\ell \in \mathcal{K}^{\mathrm{an}}_b$. D'après la propriété de fermeture des idéaux analytiques dans les topologies $\mathfrak{m}$-adiques, on aura $f \in \mathcal{K}^{\mathrm{an}}_b$; d'où l'assertion.

D'après un théorème classique de H. Cartan, il en résulte que $\mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ est réduit au voisinage de $X \times \{0\}$; par homogénéité, il est réduit sur tout Y. Mais sur $Y - X \times \{0\}$, $\mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ est l'image réciproque de $\overline{\mathcal{I}}$ pour la projection $Y - X \times \{0\} \to Z$; donc $\overline{\mathcal{I}}$ est aussi réduit.

En fait, la démonstration précédente donne un résultat plus fort : supposons $\mathcal{I}_a$ réduit : alors $\mathcal{K}^{\mathrm{an}}$ est réduit en b, donc au voisinage de b et il existe un ouvert $U \subset X$ contenant a tel que $\overline{\mathcal{I}}$ soit réduit sur $p^{-1}U$, et donc que $\mathcal{I}$ soit réduit sur U.

Soit maintenant $\mathcal{I}$ un idéal cohérent quelconque de $\mathcal{A}$; il est immédiat que la collection des $\operatorname{rac} \mathcal{I}_a$ (« rac » = racine) définit un faisceau d'idéaux de $\mathcal{A}$, qu'on notera $\operatorname{rac} \mathcal{I}$. Définissant de même $\operatorname{rac} \overline{\mathcal{I}}$, on sait que c'est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_Z$ (c'est une conséquence standard du théorème de H. Cartan).

Proposition 3.2. — *i)* $\operatorname{rac}\mathcal{I}$ *est cohérent ;*

ii) On a $\operatorname{rac}\overline{\mathcal{I}} = \overline{\operatorname{rac}\mathcal{I}}$ *; en particulier* $\operatorname{rac}(\mathcal{I}^{\mathrm{an}}) = (\operatorname{rac}\mathcal{I})^{\mathrm{an}}$.

Démonstration de i). — Soit $a \in X$ et soit $\mathcal{J}$, idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$, défini au voisinage de a, avec $\mathcal{J}_a = \operatorname{rac}(\mathcal{I}_a)$. D'après la remarque précédente, $\mathcal{J}$ est réduit au voisinage de a. D'autre part, on a des inclusions $\mathcal{I}_a \subset \mathcal{J}_a$ et $\mathcal{J}_a^k \subset \mathcal{I}_a$; comme $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont cohérents, ces inclusions se prolongent au voisinage de a en des inclusions $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^k \subset \mathcal{I}$; donc, pour b voisin de a, $\mathcal{J}_b = \operatorname{rac}\mathcal{I}_b$; au voisinage de a, on a donc $\mathcal{J} = \operatorname{rac}\mathcal{I}$. □

Démonstration de ii). — Localement sur X, on a, pour un k, $(\operatorname{rac}\mathcal{I})^k \subset \mathcal{I} \subset \operatorname{rac}\mathcal{I}$; d'où $(\overline{\operatorname{rac}\mathcal{I}})^k \subset \overline{\mathcal{I}} \subset \overline{\operatorname{rac}\mathcal{I}}$; mais $\overline{\operatorname{rac}\mathcal{I}}$ est réduit ; il est donc égal à $\operatorname{rac}\overline{\mathcal{I}}$. □

En se localisant sur X, comme indiqué à la fin du paragraphe 2, on déduit de la proposition précédente les assertions de IV.1.1, *iii)*.

Montrons rapidement comme en en déduit également l'assertion de IV.1.1, *iv)* relative à la commutation de la racine et de l'analytisation partielle. On se ramène à démontrer le résultat suivant : soient $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[t_1, \ldots, t_m; s_1, \ldots, s_n]$, et $\mathcal{A}' = \mathcal{O}_X[t_1, \ldots, t_m]$; désignons par Y l'espace analytique $X \times \mathbb{C}^m$, et par p la projection $Y \to X$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\mathcal{A}$, et désignons par $\widetilde{\mathcal{I}}$ son « analytisé partiel » $p^{-1}\mathcal{I} \underset{p^{-1}\mathcal{A}'}{\otimes} \mathcal{O}_Y$; alors on a $\widetilde{\operatorname{rac}\mathcal{I}} = \operatorname{rac}\widetilde{\mathcal{I}}$.

En raisonnant, comme en 3.2, *ii)*, on se ramène à montrer que $\widetilde{\operatorname{rac}\mathcal{I}}$ est réduit ; en appliquant 3.1, il suffit de démontrer que l'idéal obtenu à partir de $\widetilde{\operatorname{rac}\mathcal{I}}$ en analytisant aussi par rapport aux variables $s_1, \ldots, s_n$, est réduit ; mais c'est simplement l'idéal $(\operatorname{rac}\mathcal{I})^{\mathrm{an}}$, obtenu en analytisant par rapport à toutes les variables ; on conclut alors en appliquant 3.2, *i)* et 3.1.

Je rappelle maintenant qu'un sous-ensemble analytique strict de $X \times \mathbb{C}^m$ (sous-entendu : pour la structure de variété affine définie par $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[t_1, \ldots, t_m]$) est un sous-ensemble fermé qui localement sur X est l'ensemble des zéros d'une famille de sections de $\mathcal{A}$ (cf. IV.4.10). De ce qui précède, et des résultats connus en géométrie analytique, on déduit entre autres les résultats suivants :

3.3. — *i) Les sous-ensembles-analytiques stricts de* $X \times \mathbb{C}^m$ *sont exactement les restrictions des ensembles analytiques (tout court) de* $Z = X \times \mathbb{P}_m$.

ii) (« Nullstellensatz ») L'application qui à un idéal cohérent de $\mathcal{A}$ *fait correspondre l'ensemble de ses zéros est une bijection « idéaux cohérents réduits de* $\mathcal{A}$ *»* $\leftrightarrow$ *« sous-ensembles analytiques stricts de* $X \times \mathbb{C}^m$ *».*

iii) Soit $\mathcal{I}$ *un idéal réduit de* $\mathcal{A}$ *; notons* Y *la variété affine sur* X *définie par* $\mathcal{O}_Y = \mathcal{A}/\mathcal{I}$*, et soit* $|Y|$ *son support, i.e. l'ensemble des zéros de* $\mathcal{I}$*.*

L'ensemble des points singuliers de Y (= ceux de Y^{an}) est un sous-ensemble analytique strict, nulle part dense de $|Y|$.

Les démonstrations sont immédiates, modulo les résultats analogues en géométrie analytique ; je les laisse au lecteur.

4. Ensembles constructibles et constructibles stricts

Soit X une variété analytique-complexe, qu'on peut supposer réduite sans inconvénient. Je rappelle qu'un sous-ensemble constructible de X est un sous-ensemble S qui, au voisinage de chaque point de X est réunion finie d'ensembles de la forme $T_1 - T_2$, avec T_i analytiques. On a les propriétés suivantes :

i) Toute réunion ou intersection localement finie d'ensembles constructibles est constructible ; le complémentaire d'un ensemble constructible est constructible (évident).

ii) Un ensemble constructible fermé (pour la topologie usuelle « transcendante » de $|X|$) est un sous-ensemble analytique.

Appelons « ouvert de Zariski » de X le complémentaire d'un fermé analytique ; alors un ouvert constructible est un ouvert de Zariski. Par ailleurs, les composants connexes d'un ouvert de Zariski sont des ouverts de Zariski, et elles forment un ensemble localement fini.

iii) Un ensemble constructible S est susceptible d'une définition globale, par exemple la suivante : on peut trouver une suite $X_0 = X \supset X_1 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de sous-ensembles analytiques, avec $X_i - X_{i+1}$ dense dans X_i, telle que S soit réunion de composantes connexes de $X_i - X_{i+1}$ (à noter qu'une telle réunion est localement finie).

Les résultats *ii)* et *iii)* peuvent par exemple se déduire de Verdier [**Ve**, §2.2], (voir aussi des raisonnements analogues dans [**Kas**]).

Les énoncés de Verdier sont relatifs aux faisceaux constructibles ; on peut les utiliser pour le faisceau F égal à $\mathbb{C}$ sur Y et 0 ailleurs ; ce faisceau est localement constructible au sens de Verdier, donc constructible d'après [**Ve**, 2.2.7].

D'après [**Ve**, 2.2.1], le plus grand ouvert U où F est localement constant, *i.e.* $\overset{\circ}{Y} \cup (\complement Y)^\circ$ est un ouvert de Zariski ; donc $\overset{\circ}{Y}$ est un ouvert de Zariski ([**Ve**, lemme 2.2.3]. Ceci démontre *ii)*.

Pour démontrer *iii)*, on considère ensuite la restriction de S à $X_1 = \complement U$; on décrit de même son intérieur dans X_1, et ainsi de suite par récurrence.

Soit maintenant Y une variété affine au-dessus de X, que l'on peut supposer réduite. Un sous-ensemble S strictement constructible (ou « constructible strict ») est, localement sur X, réunion finie d'ensembles de la forme $T_1 - T_2$, T_i analytiques stricts (cf. IV.4.10) ; on appellera aussi « ouvert de Zariski strict » le complémentaire d'un fermé analytique strict.

Alors, les propriétés *i)*, *ii)*, *iii)* sont encore vraie ici lorsqu'on ajoute « strict » après « constructible », « ensemble analytique », ou « ouvert de Zariski », et lorsqu'on interprète « localement fini » comme « localement fini au-dessus de X ». Pour les distinguer des précédentes assertions, on les notera *i)' ii)' iii)'*. L'énoncé *i)'* est évident. Pour démontrer *ii)'*, on voit facilement qu'il suffit de le démontrer localement sur X ; on peut donc supposer Y plongé dans $X \times \mathbb{C}^m$, (muni du faisceau $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X[t_1, \ldots, t_m]$) ; soient $\mathcal{I}$ l'idéal de Y dans $\mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{I}}$ l'idéal qu'il définit dans $\mathcal{O}_Z$ ($Z = X \times \mathbb{P}_m$), et $\overline{Y}$ le sous-espace analytique fermé de Z défini par $\overline{\mathcal{I}}$; on a alors le résultat suivant :

Lemme 4.1. — *Les sous-ensembles constructibles stricts de Y sont les sous-ensembles de Y qui sont constructibles (tout court) en tant que sous-ensembles de $\overline{Y}$.*

L'assertion « constructible strict de Y » $\Rightarrow$ « constructible de $\overline{Y}$ » est évidente. L'assertion opposée résulte de l'assertion *iii)* ci-dessus, appliquée aux ensembles constructibles de Z, et de 3.3, *i)*.

La propriété *ii)'* se déduite facilement de là et de *ii)*. Enfin, le raisonnement qui donne *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* donne de la même manière *ii)'* $\Rightarrow$ *iii)'*.

Je termine par un théorème de projection.

Théorème 4.2. — *Soit X analytique complexe, et soit Y affine au-dessus de X ; notons p la projection $Y \to X$.*

i) Si S est un sous-ensemble constructible strict de Y, pS est constructible dans X. En particulier, $p|Y|$ est constructible.

ii) Si Z est dominant (i.e. $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ injectif), $p|Y|$ contient un ouvert de Zariski dense de X.

On pourrait démontrer ce théorème en se ramenant à un théorème sur les images directes propres d'ensembles constructibles (voir p. ex. dans **[Ve]** un énoncé sur les faisceaux constructibles, qui pourrait être utilisé ici). Mais il est bien plus élémentaire de se ramener au cas algébrique, de la manière suivante : quitte à restreindre X, on se ramène au cas où $Y = X \times \mathbb{C}^m$, et où $S = T_1 - T_2$, T_i défini par des équations $P_{i,j} = \sum a^{\alpha}_{i,j} t^{\alpha}$, $j = 1, \ldots, q$, $i = 1, 2$, avec $a^{\alpha}_{i,j}$ sections de $\mathcal{O}_X$.

Considérons les indéterminées $A_{i,j}^{\alpha}$ et les polynômes $\widetilde{P}_{i,j} = \sum A_{i,j}^{\alpha} t^{\alpha}$ définissant respectivement des ensembles $\widetilde{T}_i$ dans $\mathbb{C}^{N+m}$, $N = \#\{(i,j,\alpha) \ ; A_{i,j}^{\alpha} \neq 0\}$; soit $\widetilde{S} = \widetilde{T}_1 - \widetilde{T}_2$; d'après un résultat classique (théorie élémentaire de l'élimination), l'image de $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{C}^N$ est constructible au sens algébrique ; donc son image réciproque dans X par l'application $(a_{i,j}^{\alpha})$ est (analytiquement) constructible ; d'où *i)*.

Démontrons maintenant *ii)* : si c'est faux, l'adhérence de $p|Y|$ vérifie $\overline{p|Y|} \neq X$; mais $\overline{p|Y|}$ est un sous-ensemble analytique de X d'après *ii)* ; soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal correspondant ; d'après le Nullstellensatz, son image dans $\mathcal{O}_Z$ est nilpotente, ce qui contredit le fait que le morphisme $Z \to X$ est dominant.

Le théorème précédent s'étend, avec essentiellement la même démonstration au cas « relatif » ; j'omets les détails.

Théorème 4.2'. — *Soit X analytique-complexe ; soient Y et Y' des variétés affines au-dessus de X, et soit $q : Y' \to Y$ un morphisme affine au-dessus de X.*

i) Si S est un sous-ensemble constructible strict de Y', qS est un sous-ensemble constructible strict de Z.

ii) Si q est dominant (i.e. $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y'}$ injectif), $q|Y'|$ contient un ouvert de Zariski strict de Z, dense au sens usuel dans $|Z|$.

On trouvera une application de ce théorème dans [**Mal4**, Proposition 3.2.1] (une partie du raisonnement est incorrecte ; voir erratum dans [**Mal4bis**]).

APPENDICE B

INVOLUTIVITÉ À LA CARTAN

1. Systèmes différentiels « intrinsèques »

Il s'agit ici de systèmes différentiels où l'on ne fixe pas *a priori* les variables ; comme indiqué dans l'introduction, je me limite à l'ordre un.

Soit Y une variété $\mathbb{C}$-analytique lisse, de dimension q, et soit $n < q$ un entier fixé. On note $V^n(Y)$ [ou V^n, ou même V si aucune confusion n'est à craindre] le fibré en grassmanniennes des sous-espaces vectoriels de dimension n de TY ; je le considère comme variété $\mathbb{C}$-analytique, munie de la projection $p : V \to Y$.

Le faisceau Ω^1_V est muni des deux sous-faisceaux de $\mathcal{O}_V$-modules $\mathcal{C}_V \subset \mathcal{B}_V$ suivants :

i) $\mathcal{B}_V$ (pour « basique ») est l'image dans Ω^1_V de $\mathcal{O}_V \underset{p^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} p^{-1}\Omega^1_Y$ par l'application cotangente p^T.

ii) $\mathcal{C}_V$ est le sous-faisceau de $\mathcal{B}_V$ formé des formes de contact ; il est classiquement caractérisé ainsi : pour un germe quelconque S de sous-variété lisse de dimension n de Y, notons j_1 l'application $S \to V$ qui associe à tout point de S l'image dans TY de son plan tangent. Alors l'image de l'application cotangente $\mathcal{O}_S \underset{j^{-1}\mathcal{O}_V}{\otimes} j^{-1}\mathcal{C}_V \to \Omega^1_S$ est nulle.

Cela étant, j'appellerai « système différentiel intrinsèque d'ordre 1er de rang n sur Y » une sous-variété analytique Z de V (plus précisément : une sous-variété analytique fermée Z d'un ouvert de V). Je ferai l'hypothèse suivante :

1.1. — *Z est lisse, et la projection $Z \to Y$ est une submersion* (*i.e.* elle est partout de rang q).

[À noter que la seconde hypothèse pourrait être affaiblie, et remplacée par « $Z \to Y$ est de rang constant » ; il faudrait alors remplacer localement Y par l'image de Z.]

En restriction à Z, $\mathcal{C}_V$ et $\mathcal{B}_V$ donnent deux sous-faisceaux $\mathcal{C}_Z \subset \mathcal{B}_Z$ de Ω^1_Z ; dans la suite, sauf s'il y a un risque de confusion, j'écrirai simplement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

Les faisceaux $\Omega^1_Z/\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}/\mathcal{C}$ sont localement libres, et $\mathcal{B}/\mathcal{C}$ est de rang n ; de plus $\mathcal{B}$ vérifie la condition de Frobenius $d\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \wedge \Omega^1_Z$. Le système $(Z, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est donc un cas particulier de ce que [**B-C-G**] appelle « système de Pfaff linéaire avec condition d'indépendance ».

La donnée de $(Z, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ permet, localement sur Z, de reconstruire les données (Y, V, Z) de la manière suivante : $\mathcal{B}$ donne un feuilletage de Z ; d'où localement une submersion de Z sur l'espace des feuilles Y ; alors $\mathcal{C}$ donne le morphisme $Z \to V = V^n(Y)$ cherché [cependant, si l'on se donne *a priori* un système $(Z, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ avec seulement les conditions sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ indiquées ci-dessus, on reconstitue bien Y et un morphisme $Z \to V^n(Y)$; mais ce morphisme n'a aucune raison d'être une immersion].

Localement, sur Y, le choix d'une submersion $Y \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$ permet de réduire le système (Y, V, Z) à un système différentiel d'ordre un ordinaire ; soit en effet $V(\pi)$ l'ouvert de V formé des n-plans en y qui se projettent bijectivement sur $T_{\pi(y)}\mathbb{C}^n$; alors $V(\pi)$ s'identifie à $J_1(\pi)$ et $Z \cap V(\pi)$ à une sous-variété de $J_1(\pi)$. Si l'on prend des coordonnées locales sur Y, $(x_1, \ldots, x_n\,; y_1, \ldots, y_r)$, $r = q - n$, telles que π soit la projection sur les variables x, soient $(x_i, y_j, \ldots, y^i_j)$ les coordonnées correspondantes sur $V(\pi)$; le système différentiel s'écrit alors de la manière usuelle $f_k(x_i, y_j, \ldots, y^i_j) = 0$, f_k des générateurs locaux de l'idéal $\mathcal{I}_Z$ de Z dans V ; par ailleurs, $\mathcal{B}$ est engendré par les dx_i et les dy_j, et $\mathcal{C}$ par les $\theta_j = dy_j - \sum y^i_j\, dx_i$.

Les solutions de (Y, V, Z) sont les germes de sous-variétés S de dimension n de Y telles qu'on ait $j_1 S \subset Z$; par j_1, il revient au même de considérer les germes de sous-variétés T de Z de dimension n telles que $\mathcal{C}|T = 0$ et $\mathcal{B}|T = T^*$; dans la carte $V(\pi)$, en coordonnées, ceci s'écrit aussi $f(x_i, y_j, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}) = 0$, $f \in \mathcal{I}_Z$.

Dans une carte $V(\pi)$, l'involutivité du système (Y, V, Z) est définie par II.3. Le but principal de ce paragraphe est de montrer que ceci ne dépend pas de π ; plus précisément de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.2. — *Avec les notations précédentes, soit (Y, V, Z) un système différentiel intrinsèque, et soient π et π' deux submersions $Y \to \mathbb{C}^n$; notons Z_π (resp. $Z_{\pi'}$) le système différentiel défini par (Z, π) [resp. (Z, π')] ; alors, au-dessus de $V(\pi) \cap V(\pi')$, l'involutivité de Z_π équivaut à celle de $Z_{\pi'}$.*

Pour établir ce résultat, il suffit d'établir, au-dessus de $V(\pi) \cap V(\pi')$, les assertions suivantes :

1.3. — *Les modules caractéristiques de Z_π et $Z_{\pi'}$ sont isomorphes.*

1.4. — *Les prolongements d'ordre un de Z_π et $Z_{\pi'}$ sont isomorphes.*

Pour démontrer ces deux assertions, je vais reprendre des arguments de [**B-C-G**].

1.5. — Avec les mêmes notations, et en désignant par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^n$, le module caractéristique $M = \{M_\ell\}$, $(\ell \geq 0)$ de Z_π est défini en II.2 ; cette définition équivaut à la suivante : on a $M_0 = \mathcal{O}_Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^1_{Y/X}$ (j'omets ici les p^{-1} et π^{-1}), et $M_1 = \Omega^1_{Z/Y}$; on note ξ_i les flèches de $\mathcal{O}_Z$-module $M_0 \to M_1$ définies par $\xi_i d_{Y/X} f = d_{Z/Y} D_i f$, D_i les dérivations définies en II.1. Notons encore N_1 le noyau de l'application surjective $M_0^n \to M_1$: $(m_1, \ldots, m_n) \to \sum \xi_i m_i$. Alors M est le $\mathcal{O}_Z[\xi_1, \ldots, \xi_n]$-module gradué engendré par M_0, les relations N étant engendrés par N_1 (donc par des relations homogènes de degré un).

Posons $\overline{D} = \sum dx_i \otimes \xi_i$; pour établir 1.3, il suffit de donner de M_0, M_1 et $\overline{D}$ des définitions indépendantes de π. Pour $M_1 = \Omega^1_{Z/Y}$, il n'y a pas de problème. On prend alors $M_0 = \mathcal{C}$, en remarquant que le composé $\mathcal{C} \to \mathcal{O}_Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^1_Y \to \mathcal{O}_Z \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^1_{Y/X}$ est bijectif.

Enfin, $\overline{D}$ s'obtient par passage au quotient à partir de la différentielle d : $\mathcal{C} \to \Omega^2_Z$. On a en effet $d\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \wedge \Omega^1_Z$, donc *a fortiori* $d\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \wedge \Omega^1_Z$. Passant au quotient modulo ($\mathcal{C} \wedge \Omega^1_Z$ et $\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$) on trouve la flèche cherchée. En effet, en coordonnées, on a, avec $f_j \in \mathcal{O}_Z$, θ_j définis comme ci-dessus

$$\begin{aligned} d \sum f_j \theta_j &= \sum df_j \wedge \theta_j + \sum f_j \, d\theta_j \\ &= \sum f_j \, d\theta_j \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{C} \wedge \Omega^1_Z) \end{aligned}$$

et

$$d\theta_j = \sum dx_i \wedge dy_i^j \ ;$$

à comparer avec l'expression dans Z_π (cf. II.2) $\overline{D} y_j = \sum dx_i \otimes \delta y^i_j$. Ceci démontre 1.3.

1.6. — Pour établir 1.4, on va suivre la même stratégie, et donner une définition du prolongement indépendante de π. Pour cela, soit $V_2^n(Y)$, en abrégé $V_2(Y)$ ou V_2, l'ensemble des jets d'ordre 2 de sous-variété lisse de Y, *i.e.* l'espace des sous-variétés fermés de Y de support ponctuel et d'anneau local $\mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal. Cet espace est muni naturellement d'une structure de variété affine au-dessus de V. Il est aussi muni de deux sous-faisceaux $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{O}_{V_2}$-sous-modules de $\Omega^1_{V_2}$ définis ainsi, avec q la projection $V_2 \to V$

i) $\mathcal{B}_{V_2}$ est l'image de $\mathcal{O}_{V_2} \underset{q^{-1}\Omega^1_V}{\otimes} q^{-1}\Omega^1_V \to \Omega^1_{V_2}$ par l'application cotangente q^T.

ii) $\mathcal{C}_{V_2}$ est le sous-faisceau de contact de $\Omega^1_{V_2}$, défini de façon analogue à $\mathcal{C}_V$. Le choix d'une projection $Y \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$ identifie $q^{-1}V(\pi)$ à $J_2(\pi)$; en coordonnées, $\mathcal{C}$ est alors engendré par les formes $dy^\alpha_j - \sum y^{\alpha+\varepsilon_i}_j \, dx_i$, $|\alpha| = 0, 1$.

Pour donner une définition « intrinsèque » (*i.e.* indépendante de π) du prolongement de Z, il suffit, compte tenu de la définition II.1.5, de donner une définition intrinsèque du faisceau des $(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{V_2})$ champs de vecteurs engendré par $D_1, \ldots, D_n$; or ceci est immédiat : il suffit de prendre le sous-faisceau de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{V_2}}(\mathcal{B}_{V_2}, \mathcal{O}_{V_2})$ orthogonal à $\mathcal{C}_{V_2}$; le résultat s'ensuit.

1.7. — Le prolongement d'ordre un $pr_1 Z$ de Z peut être défini d'une autre manière ; pour cela, on remarque d'abord que l'application j_1 (utilisée plus haut pour définir $\mathcal{C}_V$) induit une application $V_2(Y) \to V(V(Y))$; cette application identifie $V_2(Y)$ au sous-espace de $V(V(Y))$ formé des n-plans P qui vérifient $\mathcal{C}_V|P = 0$; $d\mathcal{C}_V|P = 0$; $\mathcal{B}_V|P \to P^*$ est surjectif, donc bijectif (P^*, le dual de P). En effet, p étant la projection $V(Y) \to Y$, prenons une submersion $\pi : Y \to \mathbb{C}^n$, et soient (x_i, y_j, y^i_j) comme ci-dessus des coordonnées adaptée à π. Alors, si $(\delta x_i, \delta y_j, \delta y^i_j)$ désigne un vecteur tangent à $V(Y)$, un n-plan P de la carte adaptée à la projection $\pi \circ p$ est donné par des équations $\delta y_j = \sum \bar{y}^i_j \delta x_i$; $\delta y^i_j = \sum y^{i,k}_j \delta x_k$; la condition $\mathcal{C}_V|P = 0$ donne $\bar{y}^i_j = y^i_j$; la condition $d\mathcal{C}_V|P = 0$ donne $y^{i,k}_j = y^{k,i}_j$; donc l'ensemble des n-plans tangents à $V(Y)$ qui satisfont les conditions ci-dessus contient $V(Y)$; qu'il lui soit égal résulte alors de la condition $\mathcal{B}_V|P \xrightarrow{\sim} P^*$, qui entraîne que tous ces plans sont obtenus par une carte provenant d'une projection π.

Il résulte de là que $pr_1 Z$, considéré comme variété $\mathbb{C}$-analytique (on oublie ici la structure affine) peut être identifié à la variété suivante, éventuellement singulière ou même non réduite : on prend dans $V(Z)$ la sous-variété définie par les équations représentant les conditions $\mathcal{C}|P = 0$; $d\mathcal{C}|P = 0$, et on se restreint à l'ouvert défini par $\mathcal{B}|P \xrightarrow{\sim} P^*$. (Ces équations sont définies localement au moyen d'une projection du type précédent ; on vérifie que l'idéal ainsi défini n'en dépend pas).

Avec cette définition, la torsion qui donne le prolongement de Z à $pr_1 Z$ (cf. II.3) s'exprime de la manière qui suit : cf. **[Ca2]**, **[B-C-G]**. Il suffit de se placer dans une carte locale (x_i, y_j, y^i_j), l'idéal définissant Z étant engendré par des fonctions $f_k(x_i, y_j, y^i_j)$. On fera, pour pouvoir comparer à II.3, les hypothèses suivantes :

i) (Hypothèse 1.1) Z est lisse, et $Z \to Y$ est une submersion.

ii) Soit M le module caractéristique de Z ; alors M_2 est localement libre (noter que M_0 et M_1 le sont déjà à cause de *i)*.

Comme en I.4, on note N le « module des relations » $\ker u$, u la surjection $\mathcal{O}_Z[\xi_1, \ldots, \xi_n] \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} M_0 \to M$. Pour éviter les confusions avec la différentielle de Ω^1_Z, notée ici d, on notera ∂ la différentielle du complexe de Koszul $K.(\xi_1, \ldots, \xi_n; M) = \Lambda^{\cdot} T \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} M$, $T = \oplus \mathcal{O}_Z \xi_i$, et de même avec N au lieu de M. En un point $a = (\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{y}^i_j)$ de Z, la torsion a été définie comme un élément $\tau(a)$ de $Z(T \otimes N_1(a))^* = H_{1,1,}(N(a))^*$; avec les hypothèses précédentes, par la suite exacte de cohomologie, cet espace est isomorphe à $H_{2,0}(M(a))^*$.

On récupère d'autre part un élément $\bar{\tau}(a) \in H_{2,0}(N(a))^*$ de la manière suivante : au voisinage de a, complétons le système (dx_i, θ_j) en $(dx_i, \theta_j, \pi_\ell)$ de façon à avoir une base de $\Omega^1_{Z,a}$; la condition $d\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \wedge \Omega^1_Z$ entraîne *a fortiori* $d\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \wedge \Omega^1_Z$, d'où des relations $d\theta_j = \sum c^{i,k}_j dx_i \wedge dx_k + \sum d^{i,\ell}_j dx_i \wedge \pi_\ell$ modulo $\mathcal{C} \wedge \Omega^1_Z$, avec $c^{i,k}_j$, $d^{i,\ell}_j \in \mathcal{O}_{Z,a}$.

Prenons les évaluations en a : avec l'identification $M_0(a) = \mathcal{C}(a)$, les $c^{i,k}_j(a)$ sont les coordonnées d'un vecteur de $\Lambda^2 T(a) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} M^*_0(a)$; notons $\bar{\tau}(a)$ sa classe dans $H_{2,0}(M(a))^*$; on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. — *Pour que a se prolonge à $pr_1 Z$, il faut et il suffit qu'on ait $\bar{\tau}(a) = 0$.*

En effet, un tel prolongement P est donné par les formules $\pi_\ell(a) = \sum \pi^j_\ell dx_j$, $\pi^j_\ell \in \mathbb{C}$; alors la condition $d\theta_j(a)|P = 0$ signifie exactement que $\{c^{i,k}_j(a)\}$ est un ∂^*-cobord (∂^*, la différentielle de Spencer, duale de la différentielle de Koszul) ; mais ceci signifie exactement que $\bar{\tau}(a) = 0$.

Reste à comparer $\bar{\tau}$ avec la classe τ considérée en II.3 ; il est un peu plus simple de la comparer avec la classe σ définie dans II.4, classe qui vérifie $\sigma = -\tau$ d'après II.4.9. Pour cela reprenons les calculs de II.4, dans le cas $\ell = 1$. Soient $f_\ell(x_i, y_j, y^i_j)$ des générateurs de l'idéal de définition de Z au voisinage de a ; la classe $\sigma(a) = H_{1,1}(N(a))^*$ s'obtient ainsi : on choisit des $\bar{y}^{k,i}_j$ tels qu'on ait, pour tout ℓ, $\frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(a) + \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y_j}(a)\bar{y}^i_j + \sum \frac{\partial f_\ell}{\partial y^k_j}(a)\bar{y}^{k,i}_j = 0$; alors $\sigma(a)$ est la classe de $\sum \bar{y}^{k,i}_j dx_i$ modulo $T^* \otimes N_1(a)^\perp$; au signe près, qui dépend de la convention de signe pour l'homomorphisme de liaison, la classe correspondante dans $H_{2,0}(M(a))^*$ est donnée par $\sum (y^{i,k}_j - \bar{y}^{k,i}_j) dx_i \wedge dx_k$; identifions ces classes, avec la convention de signe précédente ; le résultat est alors le suivant :

Proposition 1.9. — *On a $\bar{\tau}(a) = \sigma(a)$.*

Complétons en a le système $(dx_i, \theta_j, df_\ell)$ par des π_α pour obtenir une base de $\Omega^1_{V(Y),a}$; en restriction à Z, les dx_i, θ_j et π_α forment donc une base de $\Omega^1_{Z,a}$. On obtient les relèvements P à $V(Z)$ vérifiant $\mathcal{C}|P = 0$ en prenant les relèvement à $V(V(Y))$ vérifiant $\mathcal{C}|P = 0$; $df_\ell|P = 0$; explicitement, ceci donne une famille $\delta y^k_j = \sum \bar{y}^{k,i}_j \delta x_i$, les $\bar{y}^{k,i}_j$ vérifiant les équations ci-dessus.

Prenons en particulier le relèvement P défini par $\pi_\alpha|P = 0$ (et, bien sûr $\mathcal{C}|P = 0$, $df_\ell|P = 0$), et notons $\bar{y}^{k_i}_j$ les coordonnées de ce relèvement. On a alors, en restriction à P, $d\theta_j = -\sum dy^k_j \wedge dx_k = \sum (\bar{y}^{i,k}_j - \bar{y}^{k,i}_j) dx_i \wedge dx_k$. D'où le résultat.

2. Systèmes différentiels extérieurs

2.1. — Soit encore Y une variété $\mathbb{C}$-analytique lisse de dimension q, et soit $\Omega^{\cdot}_Y = \oplus \Omega^p_Y$ le faisceau des formes différentielles sur Y ; par définition *un système différentiel extérieur sur Y* est un sous-$\mathcal{O}_Y$-module cohérent gradué $\mathcal{I}^{\cdot} = \{\mathcal{I}^p\}$ de $\Omega^{\cdot}_Y$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) $\mathcal{I}^{\cdot}$ est un idéal de Ω^p_Y, *i.e.* $\Omega^p_Y \wedge \mathcal{I}^q \subset \mathcal{I}^{p+q}$.

ii) On a $d\mathcal{I}^{\cdot} \subset \mathcal{I}^{\cdot}$.

Sauf mention expresse du contraire, on supposera dans la suite $\mathcal{I}^0 = \{0\}$ (si ce n'est pas le cas, on se placera au voisinage d'un point $a \in Y$ où $\mathcal{I}$ définit une sous-variété lisse Y', et on remplacera Y par Y').

Pour chaque n, $0 \leq n \leq q$, $\mathcal{I}$ définit une sous-variété fermée de $V^n(\mathcal{I})$ de $V^n(Y)$, non nécessairement lisse ni même réduite, définie ensemblistement ainsi : soit $E \in V^n(Y)_a$, défini par n vecteurs linéairement indépendants $\xi_1, \ldots, \xi_n \in T_eY$; on écrit alors $\xi_i \perp \mathcal{I}^1_a$; $\xi_i \wedge \xi_j \perp \mathcal{I}^2_a, \ldots, \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \perp \mathcal{I}^n_a$. Des équations précises s'obtiennent localement dans $V^n(Y)$ par le même procédé qu'au §1 : on choisit au voisinage de a une submersion $Y \to \mathbb{C}^n$; d'où une surjection $T_aY \to \mathbb{C}^n$; on considère alors la carte formée des E qui sont projetés bijectivement sur $\mathbb{C}^n$ par cette surjection ; on vérifie que les équations obtenues ainsi pour $V^n(\mathcal{I})$ sont compatibles avec le changement de cartes.

Soit $V^{n,m-1}(Y)$ la variété des paires $E_{n-1} \in V^{n-1}(Y)$, $E_n \in V^n(Y)$, avec $E_{n-1} \subset E_n$; la construction ci-dessus définit de même une sous-variété fermée $V^{n-1,n}(\mathcal{I})$ de $V^{n,n-1}(Y)$; on définit de même la sous-variété $\mathrm{Drap}^n(\mathcal{I})$ de $\mathrm{Drap}^n(Y)$, cette dernière étant formée des drapeaux $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset T_aY$, avec $\dim E_i = i$; si $E \in V^n(\mathcal{I})$, la fibre de la projection $V^{n,n-1}(\mathcal{I})$ au-dessus de E est formé de tous les hyperplans de E, *i.e.* est un projectif de dimension $n-1$; on en déduit facilement que la projection $V^{n,n-1}(\mathcal{I}) \to V^n(\mathcal{I})$ est *lisse*, *i.e.* localement produit de la base par un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$. De même la projection $\mathrm{Drap}^n(\mathcal{I}) \to V^n(\mathcal{I})$ est lisse ; la fibre est l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{C}^n$, qui est de dimension $n(n-1)/2$.

2.2. — Avant d'aller plus loin, je rappelle rapidement la notion de fibré vectoriel (à fibre variable) sur une variété analytique Z, au sens de **[Gr]** ; soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_Z$; prenons localement une présentation $\mathcal{O}_Z^q \xrightarrow{A} \mathcal{O}_2^p \to \mathcal{F} \to 0$, en faisant agir $A = (a_{ij})$ par $(f_1, \dots, f_q) \mapsto (f_1, \dots, f_q)A$; alors le fibré $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ est l'espace affine au-dessus de Z (au sens de IV.1) défini par $\mathcal{O}_Z[t_1, \dots, t_p]/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par les $\sum a_{ij}t_j$ (il est facile de voir que cet espace ne dépend pas de la présentation choisie, et que la structure vectorielle des fibres n'en dépend pas non plus).

Je considérerai aussi l'espace analytique $P(\mathcal{F})$ des droites de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$; sa structure analytique, définie dans *loc. cit.*, peut s'obtenir facilement au moyen de cartes locales analogues à celles employées au no précédent. Un tel espace sera appelé « fibré en projectifs au-dessus de Z ». Soit $P \xrightarrow{\pi} Z$ un tel projectif ; pour $a \in |Z|$, soient Z_a le germe de Z en a, P_a le germe de P au-dessus de Z_a, et $P(a)$ la fibre $(\pi^{-1}(a), \mathcal{O}_P \underset{\mathcal{O}_{Z,a}}{\otimes} \mathbb{C}_a)$; j'aurai besoin de la proposition classique suivante :

Proposition 2.3. — *i) On a* $\dim P_a \leq \dim Z_a + \dim P(a)$ *(« dim » = dimension).*

ii) Si Z_a est réduit et irréductible, et si l'on a $\dim P_a = \dim Z_a + \dim P(a)$*, alors P_a est isomorphe au produit $Z_a \times P(a)$.*

Si $P = P(\mathcal{F})$, on se ramène immédiatement à l'énoncé analogue pour $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$; ici, la fibre est duale sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}_a \underset{\mathcal{O}_{Z,a}}{\otimes} \mathbb{C}_a$.

Si $\mathcal{F}(a)$ est de dimension p, le lemme de Nakayama donne une surjection $\mathcal{O}_{Z,a}^p \to \mathcal{F}_a$; alors $(\mathrm{Vect}\,\mathcal{F})_a$ est défini par un quotient de $\mathcal{O}_{Z,a}[t_1, \dots, t_p]$; donc, en tant que variété analytique, c'est une sous-variété fermée de $Z_a \times \mathbb{C}^p$; les deux assertions s'ensuivent aussitôt.

2.4. — Revenons à la situation considérée en 2.1, et soit $E \in |V^{n-1}(\mathcal{I})_a|$; un $F \in |V^n(\mathcal{I})_a|$, avec $F \supset E$ peut être défini ainsi. On prend $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, base de E, et on prend $\eta \in T_aY - E$; alors le sous-espace F engendré par E et η doit vérifier les équations $\eta \perp \mathcal{I}_a^1$, $\eta \wedge \xi_i \perp \mathcal{I}_a^2, \eta \wedge \xi_i \wedge \xi_j \perp \mathcal{I}_a^3, \dots, \eta \wedge \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{n-1} \perp \mathcal{I}_a^n$; on remarque que ces équations sont *linéaires* en η. Partant de cette remarque, on montre facilement ceci : $V^{n,n-1}(\mathcal{I})$ est un fibré en projectifs au-dessus de $V^{n-1}(\mathcal{I})$.

Soit $\mathcal{H}$ le faisceau correspondant, et posons $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{H})$; sa fibre $H(E)$ en E est un sous-espace vectoriel de T_aY/E ; il est usuel d'appeler « polaire de E » son relevé dans T_aY. Je noterai d'autre part $\gamma^n(E)$ la dimension du projectif $PH(E)$ $(= \dim H(E) - 1)$.

Définition 2.5. — Pour $n \geq 1$, un point (ou « élément de contact ») $E \in |V^{n-1}(\mathcal{I})|$ est dit « régulier » (ou « Kähler-régulier ») si, au voisinage de E, $V^{n-1}(\mathcal{I})$ est lisse et $\mathcal{H}$ localement libre.

Compte tenu de la première hypothèse, la seconde équivaut au fait que la dimension $F \mapsto \gamma^n(F)$ est constante sur $V^{n-1}(\mathcal{I})$ sur un voisinage ouvert U de E. Considérons alors les deux projections

$$\begin{array}{ccc} V^{n,n-1}(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\pi_1} & V^{n-1}(\mathcal{I}) \\ {\scriptstyle \pi_2}\big\downarrow & & \\ V^n(\mathcal{I}). & & \end{array}$$

Les hypothèses montrent que $\pi_1^{-1}(U)$ est lisse ; on en déduit que $\pi_2\pi_1^{-1}(U)$ est aussi lisse.

Définition 2.6. — Un drapeau $\{E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n\}$ est dit « ordinaire » (ou « involutif au sens de Cartan ») si $E_0, \ldots, E_{n-1}$ sont réguliers.

L'intérêt de ces notions tient à leur intervention dans les théorèmes de Cartan-Kähler.

i) Le « premier théorème de Cartan-Kähler », ou « théorème de C-K proprement dit » est une remarquable version surdéterminée du théorème de Cauchy-Kovalevsky, relative aux éléments réguliers (en gros : si l'on a un germe de solution de dimension $n-1$ centrée en un élément régulier, on peut l'étendre en un germe de solution de dimension n). Pour l'énoncé précis et la démonstration, je renvoie à la littérature et notamment [**Ca2**], [**B-C-G**], [**Kah**], [**Ya**].

ii) Le « deuxième théorème de Cartan-Kähler », ou « théorème de C-K usuel » est un corollaire du précédent, appliqué à un drapeau ordinaire ; cf. *loc. cit.* Modulo les théorèmes du §3, ce dernier résultat est équivalent à ce qui a été appelé « théorème de Cartan-Kähler » en III.3.

Je termine ce paragraphe par un résultat important pour les applications. Il servira au prochain paragraphe à faire le lien entre la notion d'involutivité utilisée tout au long de cet article, et celle de Cartan.

Théorème 2.7 **(« Critère de Cartan »).** — *Soit* $D = \{E_0 \subset \cdots \subset E_n\} \in |\operatorname{Drap}^n(\mathcal{I})|$, *et posons* $\gamma^i = \gamma^i(E_{i-1})$. *Alors*

i) La dimension d *de* $\operatorname{Drap}^n(\mathcal{I})$ *en* D *vérifie* $d \leq \dim Y + \sum_i^n \gamma^i$.

ii) On a égalité si, et seulement si, D *est ordinaire.*

En effet, en appliquant 2.3, on trouve les inégalités suivantes, avec $D_i = \{E_0 \subset \cdots \subset E_i\}$

$$(*_i) \qquad \dim \operatorname{Drap}^i(\mathcal{I})_{D_i} \leq \dim \operatorname{Drap}^{i-1}(\mathcal{I})_{D_{i-1}} + \gamma^i, \quad (i \geq 1)$$

En ajoutant, et tenant compte de $\operatorname{Drap}^0(\mathcal{I}) = Y$, on trouve

$$(**) \qquad d \leq \dim Y + \sum_1^n \gamma^i.$$

Si D est ordinaire, on a l'égalité dans les $(*_i)$, donc dans $(**)$. Réciproquement, si on a l'égalité dans $(**)$, on aura l'égalité dans tous les $(*_i)$; alors, par récurrence sur i, 2.3, *ii)* montre que D_i est ordinaire ; d'où le théorème.

Comme $\operatorname{Drap}^n(\mathcal{I})$ est un fibré lisse sur $V^n(\mathcal{I})$, de fibre les drapeaux complets de $\mathbb{C}^n$, l'énoncé précédent peut aussi se dire en terme de dimension de $V^n(\mathcal{I})$.

On remarquera par ailleurs que l'hypothèse « $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ » n'est pas invervenue ici (par contre, elle intervient de façon essentielle dans les théorèmes de Cartan-Kähler ; cf. *loc. cit.*).

Il est d'usage d'appeler « critère de Cartan » le théorème précédent ; l'énoncé qui a été appelé ainsi en I.3.3 en est une variante. Leur relation sera vue au prochain paragraphe.

3. Comparaison

3.1. — La correspondance entre les notions introduites aux §1 et §2 se fait ainsi :

i) Soient Y une variété analytique complexe de dimension q, n un entier $\leq q$, et Z une sous-variété analytique de $V^n(Y)$ [*i.e.* une sous-variété fermée d'un ouvert de $V^n(Y)$] ; on supposera que Z vérifie 1.1. On lui associe alors le système différentiel intrinsèque de rang n $(Z, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est l'idéal gradué de $\Omega^{\cdot}_Z$ engendré par $\mathcal{C}_Z$ et $d\mathcal{C}_Z$ (cf. notations du §1). Il faut cependant ajouter la « condition d'indépendance » suivante : on considère seulement les « éléments de contact » $E \in |V^k(\mathcal{I})|$, $k \leq n$ tels que $\mathcal{B}_Z|E \to E^*$ est surjectif. Moyennant quoi on a une bijection « solutions de (Y, Z) » (au sens du §1) $\leftrightarrow$ « solutions de $(Z, \mathcal{I})$ vérifiant la condition d'indépendance » (*i.e.* germes de sous-variétés de dimension n de Z annulant $\mathcal{I}$, et dont les espaces tangents vérifient la condition d'indépendance).

ii) Soient comme ci-dessus, n un entier, et $\mathcal{I}$ un idéal gradué de $\Omega^{\cdot}_{Y}$, vérifiant $\mathcal{I}^0 = \{0\}$; soit Z un ouvert de $|V^n(\mathcal{I})|$, sur lequel $V^n(\mathcal{I})$ est lisse ; supposons en outre $Z \to Y$ submersif ; alors (Y, Z) définit un système différentiel intrinsèque de rang n ; ici encore on a correspondance des solutions, en un sens évident.

Si l'on a une restriction du type « condition d'indépendance » sur le système différentiel extérieur, cela se traduit simplement par une restriction sur les ouverts Z admissibles.

Les correspondances précédentes ne sont pas inverses l'une de l'autre (ni même inverses à isomorphisme près). Par exemple, si l'on fait les opérations, « système intrinsèque » $\longrightarrow$ « système extérieur » $\longrightarrow$ « système intrinsèque », on ne retrouve pas le système initial, mais son prolongement à l'ordre un (je laisse le lecteur donner un énoncé précis). De même, si l'on part d'un système différentiel extérieur $(Y, \mathcal{I})$, on trouvera un autre système extérieur, celui-là avec condition d'indépendance. Il est seulement défini sur la partie lisse de $V^n(\mathcal{I})$; à cette restriction près, il apparaît naturellement comme le prolongement d'ordre un de $(Y, \mathcal{I})$.

3.2. — *Soit* (Y, Z, n), *Z sous-variété de* $V^n(Y)$ un système différentiel intrinsèque ; soit $a \in |Z|$; on dira que ce système est involutif en a (ou : au voisinage de a) s'il existe une projection $\pi \colon Y \to \mathbb{C}^n$ telle qu'on ait $a \in V(\pi)$ (cf. §1), et telle que Z_π soit involutif en a ; d'après 1.2, cette dernière propriété ne dépend pas de π.

D'autre part, soit $(Y, \mathcal{I})$ un système différentiel extérieur, avec $\mathcal{I}^0 = \{0\}$, et soit n un entier > 0 ; un élément de contact $E \in |V^n(\mathcal{I})|$ sera dit « involutif au sens de Cartan » s'il contient un drapeau $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$, qui soit ordinaire au sens de 2.6. Avec cette définition, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3. — *Si E est involutif au sens de Cartan, le système intrinsèque* $(Y, V^n(\mathcal{I}), n)$ *est involutif en E.*

Je ne démontrerai pas ce théorème ; on trouvera, par exemple, une démonstration dans **[B-C-G]** [voir chap. IV, th. 4.4 ; le résultat est démontré sous la forme suivante, équivalente vu 3.4 : si E est involutif au sens de Cartan, le système différentiel extérieur défini par $(Y, V^n(\mathcal{I}), n)$ est involutif au sens de Cartan au-dessus de E].

L'autre « théorème de comparaison » est le suivant :

Théorème 3.4. — *Soit (Y, Z, n) un système différentiel intrinsèque, et soit $a \in |Z|$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Le système est involutif en a.

ii) Le système différentiel extérieur (avec condition d'indépendance) correspondant est involutif au sens de Cartan au-dessus de a, i.e. en tout élément de contact d'origine a.

En particulier, ce résultat donne une autre démonstration de 1.2. Aux notations près, je suis ici Kuranishi [**Ku3**].

Le théorème étant local, on peut se ramener à un système différentiel d'ordre un ordinaire, et se placer dans la situation suivante : Y est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n+p}$, de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_p)$; V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{np}$, de coordonnées $y^i = (y^i_j)$ $(1 \leq i \leq n\,;\ 1 \leq j \leq p)$; enfin Z est une sous-variété lisse de $Y_1 = Y \times V$, la projection $Z \to Y$ étant submersive ; on suppose qu'on a $0 \in Z$, et on se restreint au voisinage de 0. Soit q la codimension de Z dans Y_1 ; on peut alors écrire le système (cf. III.3).

$$\sum A_i y^i = B(x,y) + \sum C_i(x,y) y^i + D(x,y,y^i) \tag{3.5}$$

avec A_i constants $\in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$, $B(0,0) = C_i(0,0) = 0$, D ne contenant que des termes de degré ≥ 2 par rapport aux y^i dans son développement en série au voisinage de 0.

Montrons d'abord *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Supposons donc le système (3.5) involutif en 0 ; son module caractéristique en 0 est le $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$-module $M(0)$ défini par les équations $\sum A_i \xi_i \underline{e} = 0$, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)^T$. Quitte à faire un changement linéaire sur les x_i, on peut supposer le drapeau $F_0 \subset \dots \subset F_n$ 1-régulier, avec $F_i = \mathbb{C}\xi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\xi_i$.

Considérons alors, sur Z, le système différentiel extérieur $\mathcal{I}$ correspondant à (3.5) ; les éléments de contact à considérer sont donc les sous-espaces E de dimension $\leq n$ de $T_0 Z$ dont la projection dans $T_0 \mathbb{C}^n$ est injective (« condition d'indépendance ») et qui vérifient en outre $dy - \sum y^i dx_i | E = 0$ et $\sum dy^i \wedge dx_i | E = 0$. Il revient au même de prendre les sous-espaces vectoriels de $T_0 Y_1$ vérifiant, outre les équations précédentes, les équations $\sum A_i \, dy^i = 0$.

On va montrer ceci : tous les drapeaux d'éléments de contact situés au-dessus de $\{F_0 \subset \dots \subset F_n\}$ sont ordinaires ; par définition de l'involutivité au sens de Cartan, cela impliquera le résultat. Pour cela, on va utiliser le critère de Cartan 2.7.

D'une part, la dimension de $V^n(\mathcal{I})$ est égale à celle du prolongement $pr_1 Z$; comme $pr_1 Z \to Z$ est par hypothèse surjectif et lisse, on a $\dim V^n(\mathcal{I}) = \dim Z + \dim M_2(0)$. D'autre part, d'après I.3.3, on a $\dim M_2(0) = \sum \beta_1^k$,

$\beta_1^k = \dim M_1(0)/(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})M_0(0)$. Enfin, la dimension de $\mathrm{Drap}^n(\mathcal{I})$ est égale à $\dim V^n(\mathcal{I}) + \frac{n(n-1)}{2}$ (cf. 2.1). Finalement, on a

$$\dim \mathrm{Drap}^n(\mathcal{I}) = \dim Z + \frac{n(n-1)}{2} + \sum \beta_1^k \ .$$

Le résultat suit alors du critère de Cartan et du lemme suivant :

Lemme 3.6. — *Soit $E_{k-1} \in V^{k-1}(\mathcal{I})$ un élément de contact de $V^{k-1}(\mathcal{I})$ se projetant dans $T_0\mathbb{C}^n$ sur F_{k-1} ; on a alors $\gamma^k(E_{k-1}) = \beta_1^k + (k-1)$.*

Il suffit de vérifier ceci : le sous-espace des éléments de contact $\in V^k(\mathcal{I})$ qui contiennent E_{k-1} et se projettent sur un sous-espace fixé de dimension k, $G \supset F_{k-1}$ est de dimension β_1^k. Ceci se voit en écrivant les équations de l'espace polaire $H(E_{k-1})$. Soit en effet, $\lambda^1, \dots, \lambda^{k-1}$ une base de E_{k-1}, les composantes en x, y, y^i de λ^ℓ étant respectivement $(\delta_i^\ell, \eta^\ell, \eta^{i,\ell})$. Avec l'abus usuel de notation qui consiste à écrire (dx, dy, dy^i) un vecteur de $H(E_{k-1})$, on aura

$$\begin{aligned} dy - \sum y^i \ dx_i &= 0 \\ \sum A_i \ dy^i &= 0 \\ \sum_i \delta_i^\ell \ dy^i - \eta^{i,\ell} \ dx_i &= 0 \quad (1 \le \ell \le k-1). \end{aligned}$$

Les dx_i étant donnés, la dimension de cet espace est celle du système linéaire homogène associé, *i.e.* $\{\sum A_i \ dy^i = 0 \ ; dy^1 = \cdots = dy^{k-1} = 0\}$. Le résultat suit immédiatement.

Reste à montrer *ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Il suffit ici de supposer qu'on a un drapeau ordinaire $\{E_0 \subset \cdots \subset E_n\} \in V^n(\mathcal{I})$ au-dessus de $x = y = y^i = 0$; alors $V^n(\mathcal{I}) \to Z$ est lisse et surjectif au voisinage de ce point ; comme on a $V^n(\mathcal{I}) = pr_1 Z$, et que $pr_1 Z \to Z$ est linéaire affine, toutes les conditions de régularité sont satisfaites, et il reste à vérifier que $M(0)$ est 1-involutif [en effet, la même propriété sera encore vraie aux points voisins, par exemple en utilisant II.2.5].

Quitte à faire un changement linéaire de variables sur les x_i, on peut supposer que $\{E_0 \subset \cdots \subset E_n\}$ se projette sur le drapeau $\{F_0 \subset \cdots \subset F_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ considéré ci-dessus. Alors, pour achever la démonstration, il suffit de démontrer qu'on a $\dim M_2(0) = \sum \beta_1^k$; ceci se fait en renversant les arguments ci-dessus. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[B-C-G] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, *Exterior differential systems*, Springer, 1991.

[B-G] R.L. Bryant, P.A. Griffiths, *Characteristic cohomology of differential systems I; general theory*, J. Amer. Math. Soc., **8** (1995), 507–596.

[B-L-O-P] F. Boulier, D. Lazard, F. Ollivier, M. Petitot, *Representation for the radical of a finitely generated differential ideal*, in ISSAC'95, A.H.M. Levelt editor, ACM Press, New-York (1995), 158–166.

[B-M] D. Bayer, D. Mumford, *What can be computed in algebraic geometry ?* Comp. alg. geometry and commutative algebra, Symposia Math., **39**, Cambridge University Press (1993), 1–43.

[Bo1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 10, Masson, Paris (1980).

[Bo2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 1–4, Hermann, Paris (1961) .

[B-S] D. Bayer, M. Stilman, *A criterion for detecting m-regularity*, Inv. Math., **87** (1987), 1–11.

[Bu] A. Buium, *Differential algebra and diophantine geometry*, Hermann, Paris (1994).

[Ca1] E. Cartan, *Sur l'intégration des systèmes aux différentielles totales*, Annales École Normale, **18-3** (1901), 241–311.

[Ca2] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris (1945).

[F-L-M-R] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of non-linear systems*, I.E.E.E. transactions on automatic control, **44-5** (1999), 922–937.

[Fr] J. FRISCH, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, Inventiones Math. **4** (1967), 118–138.

[Gar] R.B. GARDNER, *Differential methods interfacing control theory*, Brackett-Millmann-Sussmann ed. Progress in Math., **27**, Birkhäuser (1983), 117–180.

[Gas] J. GASQUI, *Formal integrability of systems of partial differential equations*, in Non-linear equations in classical and quantum field theory, N. Sanchez ed., Lecture Notes in Physics, **226** Springer (1985), 21–36.

[Go] H. GOLDSCHMIDT, *Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations*, J. Differential Geom., **1** (1967), 246–270.

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie analytique*, Séminaire H. Cartan, **13** (1960/61), exposés 7–17, Benjamin (1967).

[Gr-R] H. GRAUERT, R. REMMERT, *Bilder und Urbilder analytischen Garben*, Ann. of Math., **68-2** (1958), 393–443.

[G-S] V. GUILLEMIN, S. STERNBERG, *An algebraic model for transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 16–47.

[Gu-R] R. GUNNING, H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall series in modern analysis (1965).

[Ha] M. HAKIM, *Topos annelés et schémas relatifs*, Springer (1972).

[Ho] C. HOUZEL, *Géométrie analytique locale*, Séminaire H. Cartan, **13** (1960/61), exposés 18–21, Benjamin (1967).

[Ja1] M. JANET, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, J. Math. Pures et appliquées, **3** (1920), 65–151.

[Ja2] M. JANET, *Les modules des formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels*, Ann. Sc. E.N.S., **41** (1924), 27–65.

[Kah] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig (1934) et Chelsea, New-York (1949).

[Kap] I. KAPLANSKY, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris (1957).

[Kas] M. KASHIWARA, *On the maximally over determined systems of linear differential equations I*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **10** (1975), 563–579.

[Ko] E.R. KOLCHIN, *Differential Algebra and Algebraic groups*, Pure and Appl. Math., **54**, Academic Press (1973)..

[Ku1] M. Kuranishi, *On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems*, Amer. J. of Math., **79** (1957), 1–47.

[Ku2] M. Kuranishi, *On the local theory of continuous infinite pseudogroups, I*, Nagoya Math. Jour., **15** (1959), 225–260, *II*, Nagoya Math. Jour., **19** (1961), 55–91.

[Ku3] M. Kuranishi, *Lecture on involutive systems of partial differential equations*, São Paulo (1967).

[La] K. Langmann, *Zum Satz von Frisch*, Math. Ann., **229** (1977), 141–142.

[Mal1] B. Malgrange, *Cohomologie de Spencer (d'après Quillen)*, Secrétariat Mathématique d'Orsay (1966).

[Mal2] B. Malgrange, *Équations de Lie, II*, J. Differential Geom., **7** (1972), 117–141.

[Mal3] B. Malgrange, *L'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **326** (1998), 863–866.

[Mal4] B. Malgrange, *La variété caractéristique d'un système différentiel analytique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) , **50-2** (2000), 491–518.

[Mal4bis] B. Malgrange, *Erratum*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) , **52-5** (2002), 1591–1592.

[Mal5] B. Malgrange, *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, Monographie de l'Enseignement Mathématique*, **38** (2001), 465–501.

[Mal6] B. Malgrange, *On sectorial solutions of differential equations*, Sing. Symposium Łojasiewicz, **70**, Banach Center Publ. **44**, Warszawa (1998), 173–174.

[Mal7] B. Malgrange, *Connexions méromorphes, 2. Le réseau canonique*, Inv. Math., **124** (1996), 367–387.

[Mat1] Y. Matsushima, *On a theorem concerning the prolongation of a differential system*, Nagoya Math. J., **6** (1953), 1–16.

[Mat2] Y. Matsushima, *Sur les algèbres de Lie semi-linéaires involutives*, in « Colloque de Topologie », Université de Strasbourg, **55** (1954), 17pp.

[Mo1] T. Morimoto, *Sur les problèmes d'équivalence des structures géométriques*, Jap. J. Math., **9-2** (1983), 293–372.

[Mo2] T. Morimoto, *Théorème d'existence de solutions analytiques pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec singularités*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **321-I** (1995), 1491–1495.

[Mo3] T. MORIMOTO, *Lie algebras, Geometric structures, and differential equations on filtered manifolds*, in Lie groups, geometric structures and differential equations, T. Morimoto, H. Sato, K. Yamaguchi, ed., Advances Studies in Pure Mathematics, **37**, Math. Soc. of Japan (2002).

[Mu] D. MUMFORD, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton University Press, Princeton (1966).

[Na] R. NARASIMHAN, *Introduction to the theory of analytic spaces*, Springer Lect. Notes, **25** (1966).

[Ol] P.J. OLVER, *Equivalences invariants, and symmetry*, Cambridge University Press (1993).

[Pe] A. PÉLADAN, *Tests effectifs de nullité dans les extensions d'anneaux différentiels*, Thèse, École Polytechnique (1997).

[Po1] J.F. POMMARET, *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Gordon and Breach (1978).

[Po2] J.F. POMMARET, *Differential Galois theory*, Gordon and Breach (1983).

[Qu] D. QUILLEN, *Formal properties of overdetermined systems of linear differential equations*, Ph. Thesis, Harvard University (1964).

[Ri1] J.F. RITT, *Differential algebra*, Amer. Math. Soc., Coll. publications,**33** (1950) and Dover (1965).

[Ri2] J.F. RITT, *Systems of differential equations, I : Theory of ideals*, Amer. J. of Math., **60** (1938), 535–548.

[Riq] C. RIQUIER, *La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Mém. Sc. Math. **22** (1928).

[Ro] A. ROSENFELD, *Specializations in differential algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., **90** (1959), 394–407.

[Se] J.P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*, Lect. Notes in Math., **11**, Springer (1955).

[Sei] W.M. SEILER, *Analysis and application of the formal theory of partial differential equations*, Ph. Thesis of the School of Physics and Material, Lancaster Univ., and Institut für Algorithmen und Kognitive Systems, Univ. Karlsruhe (1994).

[Spe1] D.C. SPENCER, *A type of formal exterior differentiation associated with pseudogroups*, Scripta Math., **26** (1961), 101–106.

[Spe2] D.C. SPENCER, *Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups, I, II*, Ann. of Math., **76** (1962), 306–445.

[S-S] M. SINGER, S. STERNBERG, *The infinite groups of Lie and Cartan. Part I : The transitive groups*, J. Analysis Math., **15** (1965), 1–114.

[Ts] T. TSUJISHITA, *On variational bicomplexes associated to differential equations*, Osaka J. of Math., **19** (1982), 311–363.

[Tu] W.M. TULCZYJEW, *The Euler-Lagrange resolution, in Lect. Notes in Math.*, **836**, Springer (1986), 22–48.

[Ve] J.L. VERDIER, *Classe d'homologie associée à un cycle*, Séminaire de géométrie analytique, exposé 6, A. Douady et J.L. Verdier ed., Astérisque, **36-37**, Soc. Math. Fr (1976).

[Vi] A.M. VINOGRADOV, *The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrange formalism and conservation laws, I, II*, J. Math. An. Appl., **100** (1984), 1–129.

[Ya] K. YANG, *Exterior differential systems and equivalence problems*, Kluwer (1992).

[Zh] V.V. ZHARINOV, Lecture notes on geometrical aspects of p.d.e., World Scientific (1992).