La connexion et la courbure de Chern du fibré tangent d'une variété presque-complexe

Nefton PALI

2 fevrier 2004
Prépublication de l'Institut Fourier n° 635 (2004)
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé.-Nous généralisons, dans le contexte des variétés presque-complexes, la notion classique de connexion de Chern du fibré tangent. Nous donnons une définition intrinsèque et purement différentielle de cette connexion dont la partie de type $(0,1)$ est indépendante du choix de la métrique hermitienne. La connexion qu'on introduit est une généralisation naturelle de la connexion de Chern du fibré tangent dans le cas analytique complexe, son expression locale par rapport à un repère local complexe du fibré des $(1,0)$-vecteurs tangents étant formellement la même que celle dans le cas intégrable. L'utilité du point de vue intrinsèque dérive du fait qu'il permet de relier les opérateurs de la géométrie presque-complexe avec les opérateurs de la géométrie Riemannienne à l'aide des obstructions géométriques dérivantes de la torsion de la structure presque-complexe et du défaut de la métrique à être symplectique. En particulier ce point de vue permet de relier la torsion de la connexion de Chern du fibré tangent avec les obstructions précédentes. Ensuite nous généralisons, à l'aide de la connexion de Chern du fibré tangent, la notion de connexion de Chern relativement aux puissances de Schur du fibré tangent et on introduit la notion de courbure de Chern pour ces fibrés. En fin nous donnons une interprétation géométrique de la notion de courbure de Chern du fibré tangent. On estime que les techniques introduites dans ce travail constituent des outils de base pour l'étude des fonctions plurisousharmoniques et la régularisation des courants positifs de type $(1,1)$ sur les variétés presque-complexes (voir [Pal]).

Abstract.-We give a generalization, in the context of almost complex manifolds, of the classical concept of Chern connection of the tangent bundle. We give an intrinsic and purely differential definition of this connection, in such a way that the $(0,1)$ part is independent from the choice of the hermitian metric. Our definition is a natural generalisation of the Chern connection of the tangent bundle in the integrable case. In fact its local expression relative to a local complex frame of the bundle of $(1,0)$ tangent vectors is formally the same as in the integrable case. The intrinsic point of view is usefull because he relise the operators of almost complex geometry with the operators of Riemannian geometry by the geometric obstructions derived by the torsion of the almost complex structure and the default of the metric to be symplectic. In particular this point of view relise the torsion of the Chern connection of the tangent bundle with the previous obstructions. We generalise, by the means of the Chern connection of the tangent bundle, the concept of Chern connection of all Schur powers of the tangent bundle and we introduce the notion of Chern curvature for this vector bundles. We give also a geometric interpretation of the Chern curvature of the tangent bundle. The techniques developed here seems to be basic tools for the studi of plurisubharmonic functions and the regularisation of positive currents of type $(1,1)$ over almost complex manifolds, (see [Pal]).

Mots-clés : Connexions de Chern, Courbure de Chern, Variétés presque-complexes, Coordonnées presque-complexes
Classification AMS : 32C35.

0 Connexions sur les variétés presque-complexes

Soit (X, J) une variété presque-complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension réelle $2n$. On désigne par $\mathcal{E}_X \equiv \mathcal{E}_X(\mathbb{R})$ le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs réelles, par $\pi^{1,0}_J : T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow T^{1,0}_{X,J}$ la projection sur le fibré des $(1,0)$-vecteurs tangents et par $\pi^{0,1}_J$ celle sur le fibré des $(0,1)$-vecteurs tangents. On désigne par $T_{X,J}$ le fibré tangent dont les fibres sont munies de la structure complexe donneé par J et par $\mathcal{E}^{p,q}_{X,J} \equiv \mathcal{E}(\Lambda^{p,q}_J T^*_X)$, $\Lambda^{p,q}_J T^*_X := \Lambda^p_{\mathbb{C}}(T^{1,0}_{X,J})^* \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q_{\mathbb{C}}(T^{0,1}_{X,J})^*$ le faisceau des (p,q)-formes par rapport à la structure presque-complexe J. On rappelle que sur une variété presque-complexe la différentielle se décompose sous la forme

$$d = \partial_J + \bar{\partial}_J - \theta_J - \bar{\theta}_J,$$

où pour toute k-forme complexe $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^k_{\mathbb{C}}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^*)(U)$ au dessus d'un ouvert U et tout champ de vecteurs complexes $\xi_0, ..., \xi_k \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ on a les expressions suivantes :

$$\partial_J \omega\,(\xi_0, ..., \xi_k) := \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \xi^{1,0}_j .\, \omega(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k) +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{1,0}_j, \xi^{1,0}_l]^{1,0} + [\xi^{0,1}_j, \xi^{1,0}_l]^{0,1} + [\xi^{1,0}_j, \xi^{0,1}_l]^{0,1}, \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k)$$

$$\bar{\partial}_J \omega\,(\xi_0, ..., \xi_k) := \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \xi^{0,1}_j .\, \omega(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k) +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{0,1}_j, \xi^{0,1}_l]^{0,1} + [\xi^{0,1}_j, \xi^{1,0}_l]^{1,0} + [\xi^{1,0}_j, \xi^{0,1}_l]^{1,0}, \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k)$$

$$\theta_J \omega\,(\xi_0, ..., \xi_k) := - \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{1,0}_j, \xi^{1,0}_l]^{0,1}, \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k)$$

$$\bar{\theta}_J \omega\,(\xi_0, ..., \xi_k) := - \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{0,1}_j, \xi^{0,1}_l]^{1,0}, \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k)$$

avec $\xi^{1,0} := \pi^{1,0}_J(\xi)$, $[\cdot,\cdot]^{1,0} := \pi^{1,0}_J[\cdot,\cdot]$ et de façon analogue pour les indices $(0,1)$. Les bidegrés des opérateurs ∂_J, $\bar{\partial}_J$, θ_J et $\bar{\theta}_J$ sont respectivement $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,-1)$ et $(-1,2)$. En effet si $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}_{X,J}(U)$ est une (p,q)-forme alors les $(p+q+1)$-formes $\partial_J \omega$, $\bar{\partial}_J \omega$, $\theta_J \omega$, $\bar{\theta}_J \omega$ sont nulles en restriction aux fibrés $\Lambda^{r,s}_J T_X$, $r+s = p+q+1$ respectivement aux bidegrés $(r,s) \neq (p+1,q)$, $(r,s) \neq (p,q+1)$, $(r,s) \neq (p+2,q-1)$, $(r,s) \neq (p-1,p+2)$. On déduit alors que l'opérateur $T = \partial_J$, $\bar{\partial}_J$, θ_J où $\bar{\theta}_J$ vérifie la règle de Leibnitz $T(u \wedge v) = Tu \wedge v + (-1)^{\deg u} \wedge Tv$. On a aussi les formules $\overline{(\partial_J\, u)} = \bar{\partial}_J\, \bar{u}$, $\overline{(\theta_J\, u)} = \bar{\theta}_J\, \bar{u}$.

Définition 0.1 *On désigne par $\tau_J \in \mathcal{E}(\Lambda^{2,0}_J T^*_X \otimes_{\mathbb{C}} T^{0,1}_{X,J})(X)$ le tenseur de la torsion de la structure presque-complexe définie par la formule $\tau_J(\xi, \eta) := [\xi^{1,0}, \eta^{1,0}]^{0,1}$ pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ désigne un ouvert quelconque.*

Définition 0.2 *Le tenseur de la structure presque complexe est dit intégrable si $\tau_J = 0$.*

On remarque que $\tau_J = 0$ si et seulement si $\theta_J = 0$, si et seulement si $d = \partial_J + \bar{\partial}_J$. On définit le tenseur de Nijenhuis

$$N_J \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{0,2} T_X^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

par la formule $N_J := \tau_J + \bar{\tau}_J$, (remarquer que les éléments de l'espace vectoriel $\Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}$ s'identifient naturellement avec les éléments $u + \bar{u}$, $u \in \Lambda_J^{p,q} T_{X,x}^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J,x}^{1,0}$). Bien évidemment $N_J = 0$ si et seulement si $\tau_J = 0$. Il est élémentaire de vérifier l'identité :

$$4N_J(\xi, \eta) = [\xi, \eta] + J[\xi, J\eta] + J[J\xi, \eta] - [J\xi, J\eta]$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. On rappelle le fameux théorème de Newlander-Nirenberg (voir [We], , [Hör], cf aussi [Dem]).

Théorème 0.3 *Soit (X, J) une variété presque-complexe. L'existence d'une structure holomorphe $\mathcal{O}_X$ sur la variété X telle que la structure presque-complexe associée $J_{\mathcal{O}_X}$ soit égale à J est équivalente à supposer que la structure presque-complexe J soit intégrable.*

On aura besoin de la définition suivante.

Définition 0.4 *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-modules sur X. Une connexion sur le faisceau $\mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\nabla_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(T_X^*) \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ tel que $\nabla_{\mathcal{G}}(g \cdot f) = \nabla_{\mathcal{G}} g \cdot f + g \otimes df$ pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ est un ouvert quelconque.*

La donné d'une connexion $\nabla_{\mathcal{G}}$ sur le faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-modules $\mathcal{G}$ détermine de façon univoque une dérivation sur le complexe $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))_{k \geq 0}$. En effet on peut définir l'extension

$$\nabla_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*) \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^{k+1} T_X^*)$$

par la formule classique

$$\nabla_{\mathcal{G}} \omega\,(\xi_0, ..., \xi_k) := \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k))(\xi_j) +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi_j, \xi_l], \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k)$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*))(U)$ et tout champ de vecteurs complexes $\xi_0, ..., \xi_k \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ L'extension ainsi définie vérifie la règle de Leibnitz $\nabla_{\mathcal{G}}(g \otimes f) = \nabla_{\mathcal{G}}\, g \wedge f + g \otimes df$ pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda_{\mathbb{R}}^k T_X^*)(U)$. En effet

$$\nabla_{\mathcal{G}}(g \otimes f)\,(\xi_0, ..., \xi_k) := \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(g \cdot f(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k))(\xi_j) +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} g \cdot f([\xi_j, \xi_l], \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k) =$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j \Big[\nabla_{\mathcal{G}} g(\xi_j) \cdot f(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k) + g \cdot (\xi_j\, .f(\xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \xi_k))\Big] +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < l \leq k} (-1)^{j+l} g \cdot f([\xi_j, \xi_l], \xi_0, ..., \widehat{\xi_j}, ..., \widehat{\xi_l}, ..., \xi_k) =$$

$$= (\nabla_{\mathcal{G}}\, g \wedge f + g \otimes df)(\xi_0, ..., \xi_k).$$

Le fait que $d^2=0$ implique l'existence du tenseur de courbure de $\nabla_{\mathcal{G}}$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) \in \Big(\mathcal{E}nd_{\mathcal{E}(\mathbb{C})}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}(\Lambda^2_{\mathbb{R}} T^*_X)\Big)(X)$$

définie par la formule $\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})(\xi,\eta)\cdot g := (\nabla^2_{\mathcal{G}}\, g)(\xi,\eta)$ pour tout $\xi,\eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ et $g \in \mathcal{G}(U)$. On note de plus $\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}}$. La définition de l'extension de la connexion $\nabla_{\mathcal{G}}$ implique de façon immédiate la formule

$$\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\eta_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) - \eta_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\xi_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) = [\xi,\eta]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})(\xi,\eta)\cdot g.$$

Le tenseur de courbure $\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})$ de la connexion $\nabla_{\mathcal{G}}$ exprime donc le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de $\mathcal{G}$. Il est aussi élémentaire de vérifier l'identité

$$\nabla^2_{\mathcal{G}}\, \omega = \Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) \wedge \omega \tag{1}$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda^{\bullet}_{\mathbb{R}} T^*_X))(U)$. Le fait que les opérateurs θ_J et $\bar{\theta}_J$ vérifient la règle de Leibnitz implique que

$$\theta_J \in \mathcal{H}om_{\mathcal{E}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}^{p,q}_{X,J}, \mathcal{E}^{p+2,q-1}_{X,J})(X) \quad \text{et} \quad \bar{\theta}_J \in \mathcal{H}om_{\mathcal{E}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}^{p,q}_{X,J}, \mathcal{E}^{p-1,q+2}_{X,J})(X)$$

On définit alors les opérateurs de torsion sur $\mathcal{G}$

$$\theta_{\mathcal{G},J} := \mathbb{I}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \theta_J : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p,q}_{X,J} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p+2,q-1}_{X,J}$$

$$\bar{\theta}_{\mathcal{G},J} := \mathbb{I}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \bar{\theta}_J : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p,q}_{X,J} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p-1,q+2}_{X,J}.$$

De façon explicite ces opérateurs sont définis de façon analogue aux opérateurs θ_J et $\bar{\theta}_J$. Ils sont des dérivations, autrement dit on a les formules

$$\theta_{\mathcal{G},J}(\omega \wedge f) = \theta_{\mathcal{G},J}\, \omega \wedge f + (-1)^{\deg \omega}\, \omega \wedge \theta_J f$$

$$\bar{\theta}_{\mathcal{G},J}(\omega \wedge f) = \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}\, \omega \wedge f + (-1)^{\deg \omega}\, \omega \wedge \bar{\theta}_J f$$

pour tout $\omega \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda^{\bullet}_{\mathbb{R}} T^*_X)(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda^{\bullet}_{\mathbb{R}} T^*_X)(U)$. On définit de plus les opérateurs

$$\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p,q}_{X,J} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p+1,q}_{X,J}$$

$$\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J} : \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p,q}_{X,J} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{p,q+1}_{X,J}$$

par les formules

$$\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}\, \omega\,(\xi_0,...,\xi_k) := \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0,...,\widehat{\xi_j},...,\xi_k))(\xi^{1,0}_j) +$$

$$+ \sum_{0\leq j<l\leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{1,0}_j, \xi^{1,0}_l]^{1,0} + [\xi^{0,1}_j, \xi^{1,0}_l]^{0,1} + [\xi^{1,0}_j, \xi^{0,1}_l]^{0,1}, \xi_0,...,\widehat{\xi_j},...,\widehat{\xi_l},...,\xi_k) \tag{2}$$

et

$$\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}\, \omega\,(\xi_0,...,\xi_k) := \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j \nabla_{\mathcal{G}}(\omega(\xi_0,...,\widehat{\xi_j},...,\xi_k))(\xi^{0,1}_j) +$$

$$+ \sum_{0\leq j<l\leq k} (-1)^{j+l} \omega([\xi^{0,1}_j, \xi^{0,1}_l]^{0,1} + [\xi^{0,1}_j, \xi^{1,0}_l]^{1,0} + [\xi^{1,0}_j, \xi^{0,1}_l]^{1,0}, \xi_0,...,\widehat{\xi_j},...,\widehat{\xi_l},...,\xi_k) \tag{3}$$

Comme dans le cas de la différentielle extérieure on a la décomposition

$$\nabla_{\mathcal{G}} = \nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J} + \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J} - \theta_{\mathcal{G},J} - \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}$$

Le fait que $\nabla_{\mathcal{G}}$ vérifie la règle de Leibnitz implique les formules

$$\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}(g \otimes f) = \nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}\, g \wedge f + g \otimes \partial_J f$$

$$\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}(g \otimes f) = \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}\, g \wedge f + g \otimes \bar{\partial}_J f$$

pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\Lambda^{\bullet}_{\mathbb{R}} T^*_X)(U)$. En degré zéro on a les formules

$$\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}\, g = \frac{1}{2}\Big(\nabla_{\mathcal{G}}\, g - i(\nabla_{\mathcal{G}}\, g) \circ J\Big) \quad \text{et} \quad \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}\, g = \frac{1}{2}\Big(\nabla_{\mathcal{G}}\, g + i(\nabla_{\mathcal{G}}\, g) \circ J\Big)$$

pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$. En général on a la définition suivante.

Définition 0.5 *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-modules sur X. Une connexion de type $(0,1)$ sur le faisceau $\mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de groupes additifs $\nabla''_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{0,1}_{X,J}$ tel que $\nabla''_{\mathcal{G}}(g \cdot f) = \nabla''_{\mathcal{G}}\, g \cdot f + g \otimes \bar{\partial}_J f$ pour tout $g \in \mathcal{G}(U)$ et $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})(U)$, où $U \subset X$ est un ouvert quelconque.*

On a bien sûr une définition analogue pour les connexions de type $(1,0)$. Comme précédemment une connexion de type $(0,1)$, (resp. $(1,0)$) peut être étendue grâce à la formule 3, (resp. 2) ou grâce à la règle de Leibnitz. On rappelle maintenant que si A et B sont deux endomorphismes du faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-modules $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda^{\bullet}_{\mathbb{R}} T^*_X)$, leur crochet de commutation est défini par la formule $[A,B] := AB - (-1)^{\deg A \cdot \deg B} BA$. La décomposition précédente de $\nabla_{\mathcal{G}}$ implique la décomposition suivante au niveau des opérateurs,

$$\nabla^2_{\mathcal{G}} = (\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J} + \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J} - \theta_{\mathcal{G},J} - \bar{\theta}_{\mathcal{G},J})^2 =$$

$$= \underbrace{(\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J})^2 - [\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}, \theta_{\mathcal{G},J}]}_{2,0} + \underbrace{(\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J})^2 - [\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{0,2} + \underbrace{\theta^2_{\mathcal{G},J}}_{4,-2} + \underbrace{\bar{\theta}^2_{\mathcal{G},J}}_{-2,4} +$$

$$+ \underbrace{[\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}] + [\theta_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{1,1} - \underbrace{[\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \theta_{\mathcal{G},J}]}_{3,-1} - \underbrace{[\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]}_{-1,3}.$$

D'autre part en considérant la décomposition de la forme de courbure

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) = \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{2,0}_J + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{1,1}_J + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{0,2}_J$$

en ses composantes de type $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ et la formule (1) on déduit les identités suivantes au sens des opérateurs

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{2,0}_J \wedge \cdot = (\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J})^2 - [\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}, \theta_{\mathcal{G},J}] \qquad \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{0,2}_J \wedge \cdot = (\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J})^2 - [\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}]$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})^{1,1}_J \wedge \cdot = [\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}] + [\theta_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}] \qquad \theta^2_{\mathcal{G},J} = 0, \quad \bar{\theta}^2_{\mathcal{G},J} = 0$$

$$[\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}, \theta_{\mathcal{G},J}] = 0 \qquad [\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}, \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}] = 0.$$

En particulier si $\mathcal{G} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$ et $\nabla_{\mathcal{G}} = d$ on a les identités supplémentaires

$$\partial_J^2 = [\bar{\partial}_J, \theta_J], \qquad \bar{\partial}_J^2 = [\partial_J, \bar{\theta}_J] \quad \text{et} \quad [\partial_J, \bar{\partial}_J] = -[\theta_J, \bar{\theta}_J].$$

En degré zéro on a les formules

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0} = (\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0})^2 - \theta_{\mathcal{G},J}\, \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1} \tag{4}$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2} = (\nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1})^2 - \bar{\theta}_{\mathcal{G},J}\, \nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0} \tag{5}$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1} = [\nabla_{\mathcal{G},J}^{1,0}, \nabla_{\mathcal{G},J}^{0,1}] \tag{6}$$

lesquelles sont équivalentes aux identités évidentes

$$\xi^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\eta^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) - \eta^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\xi^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) = [\xi^{1,0}, \eta^{1,0}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0}(\xi^{1,0}, \eta^{1,0}) \cdot g$$

$$\xi^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\eta^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) - \eta^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\xi^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) = [\xi^{0,1}, \eta^{0,1}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2}(\xi^{0,1}, \eta^{0,1}) \cdot g$$

$$\xi^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\eta^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) - \eta^{0,1}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot (\xi^{1,0}_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g) = [\xi^{1,0}, \eta^{0,1}]_{\nabla_{\mathcal{G}}} \cdot g + \Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1}(\xi^{1,0}, \eta^{0,1}) \cdot g$$

On a donc en particulier que la composante de type $(2,0)$, (resp. $(0,2)$) du tenseur de courbure exprime le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de $\mathcal{G}$ le long des champs de vecteurs de type $(1,0)$, (resp. $(0,1)$). La composante de type $(1,1)$ du tenseur de courbure exprime le défaut de commutation des dérivées covariantes secondes des sections de $\mathcal{G}$ le long des champs de vecteurs de type $(1,0)$ et $(0,1)$. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-modules localement de type fini, soit $\psi \equiv (\psi_1, ..., \psi_r) \in \mathcal{G}^{\oplus r}(U)$ un système de générateurs locaux et $\omega = \psi \cdot f \in (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(\Lambda^k_{\mathbb{R}} T^*_X))(U)$, $f \in M_{r,1}(\mathcal{E}(\Lambda^k_{\mathbb{R}} T^*_X)(U))$. Soient de plus $A \in M_{r,r}(\mathcal{E}(T^*_X)(U))$, $A'_J \in M_{r,r}(\mathcal{E}^{1,0}_{X,J}(U))$, $A''_J \in M_{r,r}(\mathcal{E}^{0,1}_{X,J}(U))$ telles que $\nabla_{\mathcal{G}}\, \psi = \psi \cdot A$ et $A = A'_J + A''_J$. La règle de Leibnitz implique alors les égalités

$$\nabla_{\mathcal{G}}\, \omega = \psi \cdot (df + A \wedge f) \quad \text{et} \quad \Theta(\nabla_{\mathcal{G}}) \wedge \omega = \psi \cdot (dA + A \wedge A) \wedge f,$$

de plus on a les identités $\nabla^{1,0}_{\mathcal{G},J}\, \omega = \psi \cdot (\partial_J f + A'_J \wedge f)$, $\nabla^{0,1}_{\mathcal{G},J}\, \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J f + A''_J \wedge f)$, $\theta_{\mathcal{G},J}\, \omega = \psi \cdot \theta_J\, f$ et $\bar{\theta}_{\mathcal{G},J}\, \omega = \psi \cdot \bar{\theta}_J\, f$. En décomposant la 2-forme $dA + A \wedge A$ où en explicitant les identités (4), (5) et (6) on obtient les expressions locales suivantes.

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{2,0} \wedge \omega = \psi \cdot (\partial_J A'_J + A'_J \wedge A'_J - \theta_J\, A''_J) \wedge f$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{0,2} \wedge \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J A''_J + A''_J \wedge A''_J - \bar{\theta}_J\, A'_J) \wedge f$$

$$\Theta(\nabla_{\mathcal{G}})_J^{1,1} \wedge \omega = \psi \cdot (\bar{\partial}_J A'_J + \partial_J A''_J + A'_J \wedge A''_J + A''_J \wedge A'_J) \wedge f,$$

Nous considérons à partir de maintenant un fibré vectoriel complexe $\mathcal{C}^\infty$, $F \longrightarrow X$ et $\mathcal{G} = \mathcal{E}(F)$:=faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ de F. Soit $h \in \mathcal{E}(F^* \otimes_{\mathbb{C}} \overline{F}^*)(X)$ une métrique hermitienne sur F. On rappelle qu'une connexion $\nabla_F : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(T^*_X) \simeq \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}(T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ sur F est dite h-hermitienne si pour tout champ de vecteurs complexes $\xi \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ et toute sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F)(U)$, ($U \subseteq X$ est un ouvert quelconque) on a la formule

$$\xi.h(\sigma,\tau) = h(\xi_\nabla.\sigma, \tau) + h(\sigma, \bar{\xi}_\nabla.\tau).$$

Il est bien sûr équivalent de restreindre l'identité précédente aux seuls champs de vecteurs $\xi \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U)$. On a alors que la donnée d'une connexion $\nabla''_F : \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F) \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{C})} \mathcal{E}^{0,1}_{X,J}$ de type $(0,1)$ implique l'existence d'une unique connexion h-hermitienne ∇_F sur le fibré F telle que $\nabla^{0,1}_F = \nabla''_F$. En effet la partie de type $(1,0)$ de ∇_F est donnée par la formule

$$h(\nabla^{1,0}_F \sigma(\xi), \tau) = \xi.h(\sigma, \tau) - h(\sigma, \nabla''_F \tau(\bar{\xi}))$$

pour tout $(1,0)$-champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U)$ et toutes sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F)(U)$. Bien évidemment on a un résultat analogue pour les connexions de type $(1,0)$. Soit $(e_1, ..., e_r) \in \mathcal{E}(F)^{\oplus r}(U)$ un repère de $F_{|U}$. On a l'identification $\nabla_F \simeq_e d + A$ par rapport au repère $(e_1, ..., e_r)$. Soit de plus $H := (h(e_\lambda, e_\mu))_{\lambda,\mu}$ la matrice hermitienne de la métrique h. Le fait que la connexion ∇_F soit h-hermitienne équivaut localement aux égalités

$$\xi.H_{\lambda,\mu} = \sum_{1 \leq s \leq r} \Big(A'_{s,\lambda}(\xi) H_{s,\mu} + \overline{A''_{s,\mu}(\bar{\xi})} H_{\lambda,s} \Big),$$

$\xi \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U)$. On a alors avec des notations matricielles la relation $\partial_J H = A'^t_J H + H \overline{A''_J}$. Le fait que la matrice H soit hermitienne implique que cette relation est équivalente à la relation

$$A'_J = \overline{H}^{-1} (\partial_J \overline{H} - \overline{A''_J}^t \, \overline{H}). \tag{7}$$

On a en conclusion qu'une connexion ∇_F est h-hermitienne si et seulement si la relation (7) est satisfaite sur tout les ouverts de trivialisation de F. Soit

$$\{\cdot,\cdot\}_h : \mathcal{E}(\Lambda^p_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} F) \times \mathcal{E}(\Lambda^q_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} F) \longrightarrow \mathcal{E}(\Lambda^{p+q}_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

le produit sesquilinéaire sur le faisceau $\mathcal{E}(\Lambda^\bullet_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} F)$ défini par la formule

$$\{\sigma, \tau\}_h(\xi) = \sum_{|I|=p} \varepsilon(I) h(\sigma(\xi_I), \tau(\bar{\xi}_{\complement I})),$$

où $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{p+q})$, $\xi_j \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ et $\varepsilon(I)$ désigne le signe de la permutation $(1, ..., p+q) \to (I, \complement I)$. Alors le fait que la connexion ∇_F soit hermitienne est équivalent à l'identité plus générale $d\{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla_F \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla_F \tau\}_h$ laquelle est aussi équivalente à une des identités

$$\partial_J \{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla^{1,0}_{F,J} \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla^{0,1}_{F,J} \tau\}_h$$

$$\bar{\partial}_J \{\sigma, \tau\}_h = \{\nabla^{0,1}_{F,J} \sigma, \tau\}_h + (-1)^{\deg \sigma} \{\sigma, \nabla^{1,0}_{F,J} \tau\}_h.$$

On obtient alors en appliquant la différentielle extérieure à la première des trois identités précédentes, l'identité $0 = \{\Theta(\nabla_F)\sigma, \tau\}_h + \{\sigma, \Theta(\nabla_F)\tau\}_h$ laquelle implique, pour des raisons de bidegré, l'identité $0 = \{\Theta(\nabla_F)^{1,1}_J \sigma, \tau\}_h + \{\sigma, \Theta(\nabla_F)^{1,1}_J \tau\}_h$. Si $\deg \sigma = \deg \tau = 0$ on déduit l'égalité

$$0 = h\Big(\Theta(\nabla_F)^{1,1}_J(\xi, \eta) \cdot \sigma, \tau\Big) + h\Big(\sigma, \Theta(\nabla_F)^{1,1}_J(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot \tau\Big) \tag{8}$$

laquelle montre que pour tout champ de vecteurs réels ξ, $\eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ on a

$$i\Theta(\nabla_F)^{1,1}_J(\xi, \eta) \in \mathcal{E}(\mathrm{Herm}_h(F))(U),$$

où $\mathrm{Herm}_h(F)$ désigne le fibré (réel) des endomorphismes h-hermitiens de F. Considérons maintenant l'expression locale de la composante de type $(1,1)$ du tenseur de courbure $\Theta(\nabla_{_F})^{1,1}_{_J} = \sum_{1\leq\lambda,\mu\leq r} C_{\lambda,\mu}\otimes e^*_\mu\otimes e_\lambda$ de la connexion hermitienne $\nabla_{_F}$. On a $C := \bar{\partial}_{_J} A'_{_J} + \partial_{_J} A''_{_J} + A'_{_J}\wedge A''_{_J} + A''_{_J}\wedge A'_{_J}$. Si $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})^{\oplus n}(U)$ est une repère du fibré $T^{1,0}_{U,J}$ alors on a l'expression locale suivante

$$\Theta(\nabla_{_F})^{1,1}_{_J} = \sum_{\substack{1\leq\lambda,\mu\leq r\\ 1\leq k,l\leq n}} C^{k,l}_{\lambda,\mu}\,\zeta^*_k\wedge\bar{\zeta}^*_l\otimes e^*_\mu\otimes e_\lambda.$$

L'identité (8) implique que si en un point $x_0\in U$ le repère $e_1(x_0),...,e_r(x_0)$ est $h(x_0)$-orthonormé alors on a les relations $\overline{C^{k,l}_{\lambda,\mu}}(x_0) = C^{l,k}_{\mu,\lambda}(x_0)$. Si de plus $\nabla^{0,1}_{_F} e_k(x_0) = 0$ pour tout k on obtient en utilisant l'expression (7) l'égalité

$$C(x_0) = (\bar{\partial}_{_J}\partial_{_J}\overline{H} - \bar{\partial}_{_J}\overline{H}\wedge\partial_{_J}\overline{H} + \partial_{_J}A''_{_J} - \bar{\partial}_{_J}\overline{A''_{_J}}^{\,t})(x_0). \tag{9}$$

1 Expression locale des opérateurs $\partial_{_J}$, $\bar{\partial}_{_J}$, $\theta_{_J}$ et $\bar{\theta}_{_J}$.

Soit $(\zeta_k)_k \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})^{\oplus n}(U)$ un repère et $M^k, N^k, U^k, V^k \in M_n(\mathcal{E}(U))$ les $n\times n$-matrices définies par les relations

$$[\bar{\zeta}_j,\bar{\zeta}_r]^{1,0}_{_J} = \sum_{k=1}^n N^k_{j,r}\,\zeta_k \qquad [\bar{\zeta}_j,\bar{\zeta}_r]^{0,1}_{_J} = \sum_{k=1}^n M^k_{j,r}\,\bar{\zeta}_k$$

$$[\zeta_j,\zeta_r]^{1,0}_{_J} = \sum_{k=1}^n \overline{M}^k_{j,r}\,\zeta_k \qquad [\zeta_j,\zeta_r]^{0,1}_{_J} = \sum_{k=1}^n \overline{N}^k_{j,r}\,\bar{\zeta}_k$$

$$[\zeta_j,\bar{\zeta}_r]^{1,0}_{_J} = \sum_{k=1}^n U^k_{j,r}\,\zeta_k \qquad [\zeta_j,\bar{\zeta}_r]^{0,1}_{_J} = \sum_{k=1}^n V^k_{j,r}\,\bar{\zeta}_k$$

On a les relations $M^k_{j,r} = -M^k_{r,j}$, $N^k_{j,r} = -N^k_{r,j}$ et $V^k_{j,r} = -\overline{U}^k_{r,j}$. De plus on a l'expression locale

$$\tau_{_J} = \sum_{1\leq k<l\leq n} [\zeta_k,\zeta_l]^{0,1}_{_J}\otimes\zeta^*_k\wedge\zeta^*_l = \sum_{\substack{1\leq k<l\leq n\\ 1\leq r\leq n}} \overline{N}^r_{k,l}\,\zeta^*_k\wedge\zeta^*_l\otimes\bar{\zeta}_r$$

Si f est une fonction on a $\partial_{_J} f = \sum_{k=1}^n (\zeta_k.f)\,\zeta^*_k$, $\bar{\partial}_{_J} f = \sum_{k=1}^n (\bar{\zeta}_k.f)\,\bar{\zeta}^*_k$, $\theta_{_J} f = 0$ et $\bar{\theta}_{_J} f = 0$. De plus en utilisant les expressions intrinsèques des opérateurs $\partial_{_J}$, $\bar{\partial}_{_J}$, $\theta_{_J}$ et $\bar{\theta}_{_J}$ on a les expressions

$$\partial_{_J}\zeta^*_k = -\sum_{1\leq l<t\leq n} \overline{M}^k_{l,t}\,\zeta^*_l\wedge\zeta^*_t \qquad \partial_{_J}\bar{\zeta}^*_k = \sum_{1\leq l,t\leq n} \overline{U}^k_{t,l}\,\zeta^*_l\wedge\bar{\zeta}^*_t$$

$$\bar{\partial}_{_J}\zeta^*_k = -\sum_{1\leq l,t\leq n} U^k_{l,t}\,\zeta^*_l\wedge\bar{\zeta}^*_t \qquad \bar{\partial}_{_J}\bar{\zeta}^*_k = -\sum_{1\leq l<t\leq n} M^k_{l,t}\,\bar{\zeta}^*_l\wedge\bar{\zeta}^*_t$$

$$\theta_{_J}\bar{\zeta}^*_k = \sum_{1\leq l<t\leq n} \overline{N}^k_{l,t}\,\zeta^*_l\wedge\zeta^*_t \qquad \bar{\theta}_{_J}\zeta^*_k = \sum_{1\leq l<t\leq n} N^k_{l,t}\,\bar{\zeta}^*_l\wedge\bar{\zeta}^*_t$$

Soit

$$u = \sum_{\substack{|K|=p\\ |L|=q}} u_{_{K,L}}\,\zeta^*_{_K}\wedge\bar{\zeta}^*_{_L}$$

une (p,q)-forme par rapport à la structure presque-complexe J. Le fait que l'opérateur $T := \partial_{_J},\, \bar{\partial}_{_J},\, \theta_{_J}$ où $\bar{\theta}_{_J}$ vérifie la règle de Leibnitz implique l'égalité

$$Tu = \sum_{\substack{|K|=p\\|L|=q}} \Big(Tu_{_{K,L}} \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1} u_{_{K,L}} T\zeta^*_{k_j} \wedge \zeta^*_{_{\hat{K}_j}} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L} + \sum_{j=1}^{q}(-1)^{p+j-1} u_{_{K,L}} T\bar{\zeta}^*_{l_j} \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_{\hat{L}_j}}\Big),$$

où $\hat{K}_j := (k_1, ..., \hat{k}_j, ..., k_p)$ et analoguement pour $\hat{L}_j$. On déduit alors les expressions locales

$$\partial_{_J} u = \sum_{\substack{|K|=p\\|L|=q}} \Big(\sum_{1\leq r\leq n} (\zeta_r \,.u_{_{K,L}})\, \zeta^*_r \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L} + \sum_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq r<t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot \overline{M}^{k_j}_{r,t}\, \zeta^*_r \wedge \zeta^*_t \wedge \zeta^*_{_{\hat{K}_j}} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L}$$

$$-(-1)^p \sum_{\substack{1\leq j\leq q\\1\leq r,t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot \overline{U}^{l_j}_{t,r}\, \zeta^*_r \wedge \bar{\zeta}^*_t \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_{\hat{L}_j}}\Big) \tag{10}$$

$$\bar{\partial}_{_J} u = \sum_{\substack{|K|=p\\|L|=q}} \Big(\sum_{1\leq r\leq n} (\bar{\zeta}_r \,.u_{_{K,L}})\, \bar{\zeta}^*_r \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L} + \sum_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq r,t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot U^{k_j}_{r,t}\, \zeta^*_r \wedge \bar{\zeta}^*_t \wedge \zeta^*_{_{\hat{K}_j}} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L}$$

$$+(-1)^p \sum_{\substack{1\leq j\leq q\\1\leq r<t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot M^{l_j}_{r,t}\, \bar{\zeta}^*_r \wedge \bar{\zeta}^*_t \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_{\hat{L}_j}}\Big) \tag{11}$$

$$\theta_{_J} u = -(-1)^p \sum_{\substack{|K|=p\\|L|=q}} \sum_{\substack{1\leq j\leq q\\1\leq r<t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot \overline{N}^{l_j}_{r,t}\, \zeta^*_r \wedge \zeta^*_t \wedge \zeta^*_{_K} \wedge \bar{\zeta}^*_{_{\hat{L}_j}} \tag{12}$$

$$\bar{\theta}_{_J} u = -\sum_{\substack{|K|=p\\|L|=q}} \sum_{\substack{1\leq j\leq p\\1\leq r<t\leq n}} (-1)^j u_{_{K,L}} \cdot N^{k_j}_{r,t}\, \bar{\zeta}^*_r \wedge \bar{\zeta}^*_t \wedge \zeta^*_{_{\hat{K}_j}} \wedge \bar{\zeta}^*_{_L} \tag{13}$$

2 La connexion de Chern du fibré tangent $T_{X,J}$ d'une variété presque-complexe

Soit (X,J) une variété presque-complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_{_J} T^*_X)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. Considérons la métrique riemannienne J-invariante associée $g := \omega(\cdot, J\cdot) \in \mathcal{E}(S^2_{_\mathbb{R}} T^*_X)(X)$. On désigne encore par g l'extension $g \in \mathcal{E}(S^2_{_\mathbb{C}}(T_X \otimes_{_\mathbb{R}} \mathbb{C})^*)(X)$ laquelle est encore non-dégenerée mais elle n'est plus une métrique sur le complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{_\mathbb{R}} \mathbb{C}$ étant donné que $g_{|T^{1,0}_{X,J}} \equiv g_{|T^{0,1}_{X,J}} \equiv 0$. On peut tout de même définir la connexion de Levi-Civita $\nabla^g : \mathcal{E}(T_X \otimes_{_\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(T^*_X \otimes_{_\mathbb{R}} (T_X \otimes_{_\mathbb{R}} \mathbb{C}))$ sur le complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{_\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par la formule classique

$$2g(\nabla^g_\xi \eta, \mu) = \xi \,.g(\eta,\mu) - \mu \,.g(\xi,\eta) + \eta \,.g(\mu,\xi)$$

$$-g(\xi,[\eta,\mu]) + g(\mu,[\xi,\eta]) + g(\eta,[\mu,\xi])$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi,\,\eta\in\mathcal{E}(T_X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})(X)$. Bien évidemment la restriction $\nabla^g:\mathcal{E}(T_X)\longrightarrow\mathcal{E}(T_X^*\otimes_{\mathbb{R}}T_X)$ est bien définie et constitue la connexion de Levi-Civita usuelle de la géométrie riemannienne. On introduit maintenant une notation très utile pour la suite. Soit $(\zeta_k)_k\in(T^{1,0}_{X,J,x})^{\oplus n}$ un repère. Alors $(\zeta_k+\bar{\zeta}_k)_k\in(T_{X,J,x})^{\oplus n}$ est un repère complexe de l'espace vectoriel $(T_{X,x},J_x)$. On notera par $c\times_{_J}\zeta_k:=c\cdot\zeta_k+\bar{c}\cdot\bar{\zeta}_k$ l'opération de produit d'un scalaire $c\in\mathbb{C}$ avec le vecteur réel $\zeta_k+\bar{\zeta}_k\in T_{X,x}$. On rappelle aussi que les éléments de l'espace vectoriel $\Lambda^{p,q}_{_J}T^*_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}T_{X,J,x}$ s'identifient naturellement avec les éléments $u+\bar{u}$, $u\in\Lambda^{p,q}_{_J}T^*_{X,x}\otimes_{\mathbb{C}}T^{1,0}_{X,J,x}$. Si $\alpha\in\Lambda^{p,q}_{_J}T^*_{X,x}$ on notera par $\alpha\otimes_{_J}\zeta_k:=\alpha\otimes\zeta_k+\bar{\alpha}\otimes\bar{\zeta}_k$ la (p,q)-forme à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{X,J,x}$. Avec ces notations on aura par exemple l'expression locale suivante pour le tenseur de Nijenhuis

$$N_{_J}=\sum_{\substack{1\le k<l\le n\\1\le r\le n}}N^r_{k,l}\,\bar{\zeta}^*_k\wedge\bar{\zeta}^*_l\otimes_{_J}\zeta_r=\sum_{1\le k,l,r\le n}N^r_{k,l}\,\bar{\zeta}^*_k\otimes\bar{\zeta}^*_l\otimes_{_J}\zeta_r.$$

Le théorème suivant relie la connexion de Levi-Civita avec une connexion fondamentale de la géométrie presque-complexe.

Théorème 2.1 *Soit (X,J) une variété presque-complexe et $\omega\in\mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_{_J}T^*_X)(X)$ une métrique hermitienne sur $T_{X,J}$. On définit la 2-forme réelle $\gamma_{_{\omega,J}}\in\mathcal{E}(\Lambda^2T^*_X\otimes_{\mathbb{R}}T_X)(X)$ par la formule*

$$\omega(\gamma_{_{\omega,J}}(\xi,\eta),J\mu)=d\omega(\xi,\eta,\mu)$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi,\eta,\mu\in\mathcal{E}(T_X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})(X)$. Considérons maintenant $(d\omega)^{\vee}_{_J}\in\mathcal{E}((T^*_X)^{\otimes 2}\otimes_{\mathbb{R}}T_X)(X)$ le 2-tenseur réel défini par la formule

$$2(d\omega)^{\vee}_{_J}(\xi,\eta):=J\Big[\gamma^{2,0}_{_{\omega,J}}+\gamma^{0,2}_{_{\omega,J}}\Big](\xi,\eta)-\gamma^{1,1}_{_{\omega,J}}(\xi,J\eta)$$

où $\gamma^{2,0}_{_{\omega,J}}\in\mathcal{E}(\Lambda^{2,0}_{_J}T^*_X\otimes_{\mathbb{C}}T_{X,J})(X)$, $\gamma^{1,1}_{_{\omega,J}}\in\mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_{_J}T^*_X\otimes_{\mathbb{C}}T_{X,J})(X)$ et $\gamma^{0,2}_{_{\omega,J}}\in\mathcal{E}(\Lambda^{0,2}_{_J}T^*_X\otimes_{\mathbb{C}}T_{X,J})(X)$ sont les composantes de la 2-forme $\gamma_{_{\omega,J}}$ par rapport à la structure presque-complexe J. Soit de plus $N^{\omega}_{_J}\in\mathcal{E}((T^{0,1}_{X,J})^{*,\otimes 2}\otimes_{\mathbb{C}}T_{X,J})(X)$ le $(0,2)$-tenseur réel définie par la formule

$$N^{\omega}_{_J}(\xi,\eta):=(\nabla^g_{\xi^{0,1}_J}\,\eta^{0,1}_{_J})^{1,0}_{_J}+(\nabla^g_{\xi^{1,0}_J}\,\eta^{1,0}_{_J})^{0,1}_{_J}-\frac{1}{2}J\gamma^{0,2}_{_{\omega,J}}(\xi,\eta).$$

pour tout champ de vecteurs complexes $\xi,\,\eta\in\mathcal{E}(T_X\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})(X)$. On a $d\omega=0$ si et seulement si $(d\omega)^{\vee}_{_J}=0$. De plus $N_{_J}=0$ si et seulement si $N^{\omega}_{_J}=0$. La connexion

$$D^{\omega}_{_J}:\mathcal{E}(T_{X,J})\longrightarrow\mathcal{E}(T^*_X\otimes_{\mathbb{R}}T_{X,J})$$

définie par la formule

$$D^{\omega}_{_{J,\xi}}\,\eta:=\nabla^g_{\xi}\,\eta-(d\omega)^{\vee}_{_J}(\xi,\eta)-N^{\omega}_{_J}(\xi,\eta)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi,\,\eta\in\mathcal{E}(T_X)(U)$, $(U\subseteq X\,ouvert)$ est ω-hermitienne, (donc en particulier J-linéaire. Autrement dit $D^{\omega}_{_J}J\eta=J\,D^{\omega}_{_J}\eta$) et la composante $(D^{\omega}_{_J})^{0,1}$ ne dépend pas de la métrique ω. La forme de torsion $\mathcal{T}_{D^{\omega}_J}$ de la connexion $D^{\omega}_{_J}$ vérifie l'identité

$$\mathcal{T}_{D^{\omega}_J}(\xi,\eta)=-J\Big[\gamma^{2,0}_{_{\omega,J}}+\gamma^{0,2}_{_{\omega,J}}\Big](\xi,\eta)-N^{\omega}_{_J}(\xi,\eta)+N^{\omega}_{_J}(\eta,\xi).$$

Si $N_{_J}=0$ alors $D^{\omega}_{_J}$ est la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien $(T_{X,J},\omega)$. Dans ce cas on a $\gamma^{0,2}_{_{\omega,J}}=0$.

Preuve

Expression locale des 3-formes $\partial_J\omega$, $\bar{\partial}_J\omega$, $\theta_J\omega$ et $\bar{\theta}_J\omega$.

Soit

$$\omega = i\sum_{1\leq k,l\leq n} h_{k,l}\,\zeta_k^*\wedge\bar{\zeta}_l^*, \quad \text{et} \quad g=\sum_{1\leq k,l\leq n}\Big(h_{k,l}\,\zeta_k^*\otimes\bar{\zeta}_l^*+h_{l,k}\,\bar{\zeta}_k^*\otimes\zeta_l^*\Big)$$

les expressions locales de la métrique hermitienne J-invariante ω et de la métrique riemannienne J-invariante associée. On désigne par $H := (h_{k,l})_{k,l}$ la matrice hermitienne de ω par rapport au repère ζ. En utilisant les expressions locales (10), (11) (12) et (13) on obtient les expressions

$$\partial_J\omega = \sum_{\substack{1\leq k<l\leq n\\ 1\leq t\leq n}} 2(\partial_J\omega)_{k,l,\bar{t}}\,\zeta_k^*\wedge\zeta_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^* = \sum_{1\leq k,l,t\leq n}(\partial_J\omega)_{k,l,\bar{t}}\,\zeta_k^*\wedge\zeta_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^*$$

où

$$(\partial_J\omega)_{k,l,\bar{t}} := \frac{i}{2}\Big[\zeta_k\,.h_{l,t}-\zeta_l\,.h_{k,t}+\sum_{1\leq r\leq n}\Big(h_{l,r}\overline{U}^r_{t,k}-h_{k,r}\overline{U}^r_{t,l}-h_{r,t}\overline{M}^r_{k,l}\Big)\Big] = -(\partial_J\omega)_{l,k,\bar{t}},$$

$$\bar{\partial}_J\omega = \sum_{\substack{1\leq l<t\leq n\\ 1\leq k\leq n}} 2(\bar{\partial}_J\omega)_{k,\bar{l},\bar{t}}\,\zeta_k^*\wedge\bar{\zeta}_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^* = \sum_{1\leq k,l,t\leq n}(\bar{\partial}_J\omega)_{k,\bar{l},\bar{t}}\,\zeta_k^*\wedge\bar{\zeta}_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^*$$

où

$$(\bar{\partial}_J\omega)_{k,\bar{l},\bar{t}} := \frac{i}{2}\Big[\bar{\zeta}_t\,.h_{k,l}-\bar{\zeta}_l\,.h_{k,t}+\sum_{1\leq r\leq n}\Big(h_{r,l}U^r_{k,t}-h_{r,t}U^r_{k,l}-h_{k,r}M^r_{t,l}\Big)\Big] = -(\bar{\partial}_J\omega)_{k,\bar{t},\bar{l}},$$

$$\theta_J\omega = \sum_{1\leq k<l<t\leq n} 3(\theta_J\omega)_{k,l,t}\,\zeta_k^*\wedge\zeta_l^*\wedge\zeta_t^* = \sum_{1\leq k,l,t\leq n}(\theta_J\omega)_{k,l,t}\,\zeta_k^*\wedge\zeta_l^*\wedge\zeta_t^*$$

où

$$(\theta_J\omega)_{k,l,t} := -\frac{i}{3}\sum_{1\leq r\leq n}\Big(h_{k,r}\overline{N}^r_{l,t}+h_{l,r}\overline{N}^r_{t,k}+h_{t,r}\overline{N}^r_{k,l}\Big),$$

$$\bar{\theta}_J\omega = \sum_{1\leq k<l<t\leq n} 3(\bar{\theta}_J\omega)_{\bar{k},\bar{l},\bar{t}}\,\bar{\zeta}_k^*\wedge\bar{\zeta}_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^* = \sum_{1\leq k,l,t\leq n}(\bar{\theta}_J\omega)_{\bar{k},\bar{l},\bar{t}}\,\bar{\zeta}_k^*\wedge\bar{\zeta}_l^*\wedge\bar{\zeta}_t^*$$

où

$$(\bar{\theta}_J\omega)_{\bar{k},\bar{l},\bar{t}} := \frac{i}{3}\sum_{1\leq r\leq n}\Big(h_{r,k}N^r_{l,t}+h_{r,l}N^r_{t,k}+h_{r,t}N^r_{k,l}\Big) = \overline{(\theta_J\omega)}_{k,l,t}.$$

On remarque aussi les relations $\overline{(\partial_J\omega)}_{k,l,\bar{t}} = (\bar{\partial}_J\omega)_{t,\bar{k},\bar{l}}$ et $(\theta_J\omega)_K = \varepsilon(\sigma)(\theta_J\omega)_{K_\sigma}$ pour tout $\sigma\in S_3$.

Expression locale de la connexion de Levi-Civita ∇^g par rapport au repère complexe $(\zeta_k)_k$.

Nous commençons par considérer l'expression locale

$$\nabla^g\zeta_l = \sum_{1\leq k,p\leq n}\Big(A^p_{k,l}\,\zeta_p^*\otimes\zeta_k+B^p_{k,l}\zeta_p^*\otimes\bar{\zeta}_k+C^p_{k,l}\,\bar{\zeta}_p^*\otimes\zeta_k+E^p_{k,l}\bar{\zeta}_p^*\otimes\bar{\zeta}_k\Big)$$

Soit $\eta = \sum_k(\eta_k\zeta_k + \bar{\eta}_k\bar{\zeta}_k) \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ un champ de vecteurs réel sur l'ouvert U. On a évidemment

$$\nabla^g \eta = \sum_{1\leq k\leq n} \Big(d\eta_k \otimes \zeta_k + d\bar{\eta}_k \otimes \bar{\zeta}_k\Big) + \sum_{1\leq l\leq n} \Big(\eta_l \nabla^g \zeta_l + \bar{\eta}_l \nabla^g \bar{\zeta}_l\Big)$$

On déduit alors en utilisant l'expression de $\nabla^g \zeta_l$ la formule

$$\nabla^g \eta = \sum_{1\leq k,p\leq n} \Big\{\Big[\zeta_p\,.\eta_k + \sum_{1\leq l\leq n}\Big(A^p_{k,l}\eta_l + \overline{E}^p_{k,l}\bar{\eta}_l\Big)\Big]\,\zeta^*_p \otimes_{_J} \zeta_k$$
$$+\Big[\bar{\zeta}_p\,.\eta_k + \sum_{1\leq l\leq n}\Big(C^p_{k,l}\eta_l + \overline{B}^p_{k,l}\bar{\eta}_l\Big)\Big]\bar{\zeta}^*_p \otimes_{_J} \zeta_k\Big\}$$

On calcule maintenant les coefficients $A^p_{k,l}$, $B^p_{k,l}$, $C^p_{k,l}$, $E^p_{k,l}$. On a les égalités suivantes.

$$2\sum_{1\leq k\leq n} A^p_{k,l} h_{k,r} = 2g(\nabla^g_{\zeta_p}\,\zeta_l, \bar{\zeta}_r) =$$

$$= \zeta_p\,.h_{l,r} + \zeta_l\,.h_{p,r} - g(\zeta_p, [\zeta_l, \bar{\zeta}_r]^{0,1}_{_J}) + g(\bar{\zeta}_r, [\zeta_p, \zeta_l]^{1,0}_{_J}) - g(\zeta_l, [\zeta_p, \bar{\zeta}_r]^{0,1}_{_J}) =$$

$$= \zeta_p\,.h_{l,r} + \zeta_l\,.h_{p,r} - \sum_{1\leq s\leq n}\Big(V^s_{l,r}h_{p,s} - \overline{M}^s_{p,l}h_{s,r} + V^s_{p,r}h_{l,s}\Big),$$

$$2\sum_{1\leq k\leq n} B^p_{k,l} h_{r,k} = 2g(\nabla^g_{\zeta_p}\,\zeta_l, \zeta_r) =$$

$$= -g(\zeta_p, [\zeta_l, \zeta_r]^{0,1}_{_J}) + g(\zeta_r, [\zeta_p, \zeta_l]^{0,1}_{_J}) + g(\zeta_l, [\zeta_r, \zeta_p]^{0,1}_{_J}) =$$

$$= \sum_{1\leq s\leq n}\Big(h_{p,s}\overline{N}^s_{r,l} - h_{r,s}\overline{N}^s_{l,p} - h_{l,s}\overline{N}^s_{p,r}\Big),$$

On déduit en particulier l'identité

$$2g(\nabla^g_{\zeta_p}\,\zeta_l, \zeta_r) + 3i(\theta_{_J}\omega)_{p,r,l} = 2\sum_{1\leq s\leq n} h_{p,s}\overline{N}^s_{r,l}$$

En remarquant l'identité $\overline{(\nabla^g_{\zeta_p}\,\zeta_l)} = \nabla^g_{\bar{\zeta}_p}\,\bar{\zeta}_l$ et en conjuguant l'égalité précédente on obtient :

$$2g(\nabla^g_{\bar{\zeta}_p}\,\bar{\zeta}_l, \bar{\zeta}_r) - \bar{\theta}_{_J}\omega(\bar{\zeta}_p, \bar{\zeta}_l, J\bar{\zeta}_r) = 2\sum_{1\leq s\leq n} h_{s,p}N^s_{r,l} \tag{14}$$

Cette égalité sera utile pour le calcul de l'expression locale du 2-tenseur $N^\omega_{_J}$. Ensuite on a les égalités

$$2\sum_{1\leq k\leq n} C^p_{k,l} h_{k,r} = 2g(\nabla^g_{\bar{\zeta}_p}\,\zeta_l, \bar{\zeta}_r) =$$

$$= \bar{\zeta}_p\,.h_{l,r} - \bar{\zeta}_r\,.h_{l,p} - g(\bar{\zeta}_p, [\zeta_l, \bar{\zeta}_r]^{1,0}_{_J}) - g(\bar{\zeta}_r, [\zeta_l, \bar{\zeta}_p]^{1,0}_{_J}) + g(\zeta_l, [\bar{\zeta}_r, \bar{\zeta}_p]^{0,1}_{_J})$$

$$= \bar{\zeta}_p\,.h_{l,r} - \bar{\zeta}_r\,.h_{l,p} - \sum_{1\leq s\leq n}\Big(U^s_{l,r}h_{s,p} + U^s_{l,p}h_{s,r} - M^s_{r,p}h_{l,s}\Big),$$

$$2\sum_{1\le k\le n} E^p_{k,l}h_{r,k} = 2g(\nabla^g_{\bar\zeta_p}\,\zeta_l,\zeta_r) =$$

$$= -\zeta_r\,.h_{l,p} + \zeta_l\,.h_{r,p} - g(\bar\zeta_p,[\zeta_l,\zeta_r]^{1,0}_J) - g(\zeta_r,[\zeta_l,\bar\zeta_p]^{0,1}_J) + g(\zeta_l,[\zeta_r,\bar\zeta_p]^{0,1}_J) =$$

$$= -\zeta_r\,.h_{l,p} + \zeta_l\,.h_{r,p} - \sum_{1\le s\le n}\Big(\overline{M}^s_{l,r}h_{s,p} + V^s_{l,p}h_{r,s} - V^s_{r,p}h_{l,s}\Big).$$

En utilisant les expressions locales des formes $\partial_J\omega$, $\bar\partial_J\omega$, $\theta_J\omega$ et $\bar\theta_J\omega$ on peut écrire les expression des coefficients $A^p_{k,l}$, $B^p_{k,l}$, $C^p_{k,l}$, $E^p_{k,l}$ sous la forme suivante.

$$A^p_{k,l} = \sum_{1\le r\le n} h^{r,k}\Big(\zeta_p\,.h_{l,r} + i(\partial_J\omega)_{p,l,\bar r} - \sum_{1\le s\le n} h_{l,s}V^s_{p,r}\Big)$$

$$B^p_{k,l} = \sum_{1\le r\le n} h^{k,r}\Big(\frac{3i}{2}(\theta_J\omega)_{p,l,r} + \sum_{1\le s\le n} h_{p,s}\overline{N}^s_{r,l}\Big)$$

$$C^p_{k,l} = -i\sum_{1\le r\le n} h^{r,k}(\bar\partial_J\omega)_{l,\bar r,\bar p} - U^k_{l,p}$$

$$E^p_{k,l} = i\sum_{1\le r\le n} h^{k,r}(\partial_J\omega)_{r,l,\bar p}$$

où $(h^{k,l})_{k,l} := H^{-1}$.

Expression locale de la 2-forme $\gamma_{\omega,J}$.

$$\gamma_{\omega,J} = \sum_{\substack{1\le p<l\le n\\ 1\le k\le n}}\Big(R^k_{p,l}\,\zeta^*_p\wedge\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k + T^k_{p,l}\,\bar\zeta^*_p\wedge\bar\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k\Big) + \sum_{1\le k,l,p\le n} S^k_{p,l}\,\zeta^*_p\wedge\bar\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k$$

On a les égalités

$$g(\gamma_{\omega,J}(\zeta_p,\zeta_l),\bar\zeta_k) = 2(\partial_J\omega)_{p,l,\bar k} = \sum_{1\le r\le n} h_{r,k}R^r_{p,l}$$

$$g(\gamma_{\omega,J}(\zeta_p,\bar\zeta_l),\bar\zeta_k) = 2(\bar\partial_J\omega)_{p,\bar l,\bar k} = \sum_{1\le r\le n} h_{r,k}S^r_{p,l}$$

$$g(\gamma_{\omega,J}(\bar\zeta_p,\bar\zeta_l),\bar\zeta_k) = -3(\bar\theta_J\omega)_{\bar p,\bar l,\bar k} = \sum_{1\le r\le n} h_{r,k}T^r_{p,l}$$

On déduit alors les expressions suivantes.

$$R^k_{p,l} = 2\sum_{1\le r\le n}(\partial_J\omega)_{p,l,\bar r}\,h^{r,k},\qquad T^k_{p,l} = -3\sum_{1\le r\le n}(\bar\theta_J\omega)_{\bar p,\bar l,\bar r}\,h^{r,k},\qquad S^k_{p,l} = 2\sum_{1\le r\le n}(\bar\partial_J\omega)_{p,\bar l,\bar r}\,h^{r,k}.$$

On obtient en conclusion l'expression locale suivante pour la 2-forme $\gamma_{\omega,J}$.

$$\gamma_{\omega,J} = \sum_{\substack{1\le p<l\le n\\ 1\le k,r\le n}}\Big(2(\partial_J\omega)_{p,l,\bar r}\,h^{r,k}\,\zeta^*_p\wedge\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k - 3(\bar\theta_J\omega)_{\bar p,\bar l,\bar r}\,h^{r,k}\,\bar\zeta^*_p\wedge\bar\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k\Big)$$

$$+2\sum_{1\le k,l,p,r\le n}(\bar\partial_J\omega)_{p,\bar l,\bar r}\,h^{r,k}\,\zeta^*_p\wedge\bar\zeta^*_l\otimes_J\zeta_k$$

Expression locale des 2-tenseurs $\gamma^{2,0}_{\omega,J}$, $\gamma^{1,1}_{\omega,J}(\cdot, J\cdot)$, $\gamma^{0,2}_{\omega,J}$ et N^{ω}_{J}.
On a les expressions locales suivantes pour $\gamma^{2,0}_{\omega,J}$ et $\gamma^{0,2}_{\omega,J}$

$$\begin{aligned}\gamma^{2,0}_{\omega,J} &= \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\partial_J \omega)_{p,l,\bar{r}}\, h^{r,k}\, (\zeta^*_p \otimes \zeta^*_l - \zeta^*_l \otimes \zeta^*_p) \otimes_J \zeta_k = \\ &= 2 \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\partial_J \omega)_{p,l,\bar{r}}\, h^{r,k}\, \zeta^*_p \otimes \zeta^*_l \otimes_J \zeta_k \\ \gamma^{0,2}_{\omega,J} &= -\frac{3}{2} \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\bar{\theta}_J \omega)_{\bar{p},\bar{l},\bar{r}}\, h^{r,k}\, (\bar{\zeta}^*_p \otimes \bar{\zeta}^*_l - \bar{\zeta}^*_l \otimes \bar{\zeta}^*_p) \otimes_J \zeta_k = \\ &= -3 \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\bar{\theta}_J \omega)_{\bar{p},\bar{l},\bar{r}}\, h^{r,k}\, \bar{\zeta}^*_p \otimes \bar{\zeta}^*_l \otimes_J \zeta_k\end{aligned}$$

On a en particulier l'identité

$$\omega(\gamma^{0,2}_{\omega,J}(\xi,\eta), J\mu) = -(\theta_J \omega + \bar{\theta}_J \omega)(\xi,\eta,\mu) \tag{15}$$

pour tout champ de vecteurs complexes ξ, $\eta, \mu \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. On écrit maintenant l'expression locale du 2-tenseur symétrique $\gamma^{1,1}_{\omega,J}(\cdot, J\cdot)$. Soient $\xi = \sum_k (\xi'_k\, \zeta_k + \xi''_k\, \bar{\zeta}_k)$ et $\eta = \sum_k (\eta'_k\, \zeta_k + \eta''_k\, \bar{\zeta}_k) \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(U)$ deux champs de vecteurs complexes. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\gamma^{1,1}_{\omega,J}(\xi, J\eta) &= 2 \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\bar{\partial}_J \omega)_{p,\bar{l},\bar{r}}\, h^{r,k}\, (\zeta^*_p \otimes \bar{\zeta}^*_l - \bar{\zeta}^*_l \otimes \zeta^*_p) \otimes_J \zeta_k\, (\xi, J\eta) = \\ &= -2i \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} (\bar{\partial}_J \omega)_{p,\bar{l},\bar{r}}\, h^{r,k}\, (\xi'_p\, \eta''_l + \xi''_l\, \eta'_p) \times_J \zeta_k = \\ &= -2i \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} h^{r,k} \Big((\bar{\partial}_J \omega)_{p,\bar{l},\bar{r}}\, \xi'_p\, \eta''_l + (\bar{\partial}_J \omega)_{l,\bar{p},\bar{r}}\, \xi''_p\, \eta'_l \Big) \times_J \zeta_k = \\ &= -2i \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} h^{r,k} \Big((\bar{\partial}_J \omega)_{p,\bar{l},\bar{r}}\, \zeta^*_p \otimes \bar{\zeta}^*_l + (\bar{\partial}_J \omega)_{l,\bar{p},\bar{r}}\, \bar{\zeta}^*_p \otimes \zeta^*_l \Big) \otimes_J \zeta_k\, (\xi, \eta)\end{aligned}$$

On calcule maintenant l'expression locale de N^{ω}_{J}. Soit $\Phi^{\omega}_{J} \in \mathcal{E}((T^{0,1}_{X,J})^{*,\otimes 3})(X)$ le $(0,3)$-tenseur définie par la formule

$$\Phi^{\omega}_{J}(\xi,\eta,\mu) := 2\omega(\nabla^g_{\xi}\, \eta, J\mu) - \bar{\theta}_J \omega(\xi,\eta,J\mu)$$

pour tout $(0,1)$-champ de vecteurs $\xi, \eta, \mu \in \mathcal{E}(T^{0,1}_{X,J})(X)$, (rappeler que $g_{|T^{0,1}_{X,J}} \equiv 0$). Soit de plus $\tau^{\omega}_{J} \in \mathcal{E}((T^{0,1}_{X,J})^{*,\otimes 2} \otimes_{\mathbb{C}} T^{1,0}_{X,J})(X)$ le $(0,2)$-tenseur défini par la formule

$$2\omega(\tau^{\omega}_{J}(\xi,\eta), J\mu) = \Phi^{\omega}_{J}(\xi,\eta,\mu^{0,1}_{J})$$

pour tout champ de vecteurs complexes ξ, $\eta \in \mathcal{E}(T^{0,1}_{X,J})(X)$ et $\mu \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. Soit

$$N^{\omega}_{J} \in \mathcal{E}((T^{0,1}_{X,J})^{*,\otimes 2} \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$$

le $(0,2)$-tenseur réel définie par la formule $N^{\omega}_{J} = \tau^{\omega}_{J} + \bar{\tau}^{\omega}_{J}$. En utilisant l'égalité (14) on déduit l'expression locale

$$N^{\omega}_{J} = \sum_{1\leq k,l,p,r,s\leq n} h_{s,p}\, h^{r,k} N^{s}_{r,l}\, \bar{\zeta}^*_p \otimes \bar{\zeta}^*_l \otimes_J \zeta_k.$$

Le fait que la matrice H soit inversible implique que $N_J = 0$ si et seulement si $N_J^\omega = 0$. Nous montrons maintenant l'identité

$$N_J^\omega(\xi,\eta) = (\nabla^g_{\xi_J^{0,1}}\eta_J^{0,1})_J^{1,0} + (\nabla^g_{\xi_J^{1,0}}\eta_J^{1,0})_J^{0,1} - \frac{1}{2}J\gamma^{0,2}_{\omega,J}(\xi,\eta).$$

pour tout champ de vecteurs complexes ξ, $\eta \in \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})(X)$. La définition précédente de N_J^ω et l'identité (15) impliquent les égalités suivantes.

$$2g(N_J^\omega(\xi,\eta),\mu) = (\Phi_J^\omega + \overline{\Phi}_J^\omega)(\xi,\eta,\mu) =$$

$$= 2g(\nabla^g_{\xi_J^{1,0}}\eta_J^{1,0},\mu_J^{1,0}) + 2g(\nabla^g_{\xi_J^{0,1}}\eta_J^{0,1},\mu_J^{0,1}) - (\theta_J\omega + \bar\theta_J\omega)(\xi,\eta,J\mu) =$$

$$= 2g((\nabla^g_{\xi_J^{1,0}}\eta_J^{1,0})_J^{0,1},\mu) + 2g((\nabla^g_{\xi_J^{0,1}}\eta_J^{0,1})_J^{1,0},\mu) - g(J\gamma^{0,2}_{\omega,J}(\xi,\eta),\mu),$$

ce qui montre la formule cherchée.

Expression locale de la connexion D_J^ω par rapport au repère complexe $(\zeta_k)_k$.

En combinant les expressions locales obtenues précédemment on obtient l'expression locale suivante pour le tenseur $(d\omega)_J^\vee + N_J^\omega$.

$$(d\omega)_J^\vee + N_J^\omega = \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} h^{r,k}\Big(i(\partial_J\omega)_{p,l,\bar r}\,\zeta_p^*\otimes\zeta_l^* + i(\bar\partial_J\omega)_{p,\bar l,\bar r}\,\zeta_p^*\otimes\bar\zeta_l^* + i(\bar\partial_J\omega)_{l,\bar p,\bar r}\,\bar\zeta_p^*\otimes\zeta_l^*\Big)\otimes_J\zeta_k$$
$$+ \sum_{1\leq k,l,p,r\leq n} h^{r,k}\Big(\frac{3i}{2}(\bar\theta_J\omega)_{\bar p,\bar r,\bar l} + \sum_{1\leq s\leq n} h_{s,p}\,h^{r,k}N^s_{r,l}\Big)\,\bar\zeta_p^*\otimes\bar\zeta_l^*\otimes_J\zeta_k$$

On obtient en conclusion l'expression suivante pour la connexion D_J^ω.

$$D_J^\omega\eta = \sum_{1\leq k,p\leq n}\Big\{\Big[\zeta_p\,.\eta_k + \sum_{1\leq l,r\leq n} h^{r,k}\Big(\zeta_p\,.h_{l,r} - \sum_{1\leq s\leq n} h_{l,s}\,V^s_{p,r}\Big)\eta_l\Big]\zeta_p^*\otimes_J\zeta_k$$
$$+\Big[\bar\zeta_p\,.\eta_k - \sum_{1\leq l\leq n} U^k_{l,p}\,\eta_l\Big]\bar\zeta_p^*\otimes_J\zeta_k\Big\}$$

pour tout champ de vecteurs réels $\eta = \sum_k(\eta_k\zeta_k + \bar\eta_k\bar\zeta_k) \in \mathcal{E}(T_X)(U)$. Si on pose par définition

$$(A'_J)^p_{k,l} := \sum_{1\leq r\leq n} h^{r,k}\Big(\zeta_p\,.h_{l,r} + \sum_{1\leq s\leq n} h_{l,s}\,\overline{U}^s_{r,p}\Big) \quad \text{et} \quad (A''_J)^p_{k,l} := -U^k_{l,p}$$

on a que les formes $A'_J := \sum_p (A'_J)^p\,\zeta_p^*$ et $A''_J := \sum_p (A''_J)^p\,\bar\zeta_p^*$ vérifient les identités

$$(D_J^\omega)^{1,0} \simeq_\zeta \partial_J + A'_J\wedge\cdot,\quad (D_J^\omega)^{0,1} \simeq_\zeta \bar\partial_J + A''_J\wedge\cdot,\ \text{et}\ A'_J = \overline{H}^{-1}(\partial_J\overline{H} - \overline{A''_J}^{\,t}\,\overline{H}),$$

ce qui prouve que la connexion D_J^ω est ω-hermitienne et sa composante $(D_J^\omega)^{0,1}$ de type $(0,1)$ est indépendante de la métrique ω. Supposons maintenant que $N_J = 0$. On a alors que le repère $(\zeta_k) \in \mathcal{O}(T^{1,0}_{X,J})^{\oplus n}(U)$ si et seulement si $[\zeta_k,\bar\zeta_l] = 0$ pour tout k,l, si et seulement si $U^k_{l,p} \equiv 0$ pour tout p,k,l. On a donc que D_J^ω est la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien $(T_{X,J},\omega)$.$\square$

Le fait que l'expression locale de la connexion hermitienne D_J^ω est formellement la même que celle de la connexion de Chern du fibré tangent dans le cas intégrable et que sa partie de type $(0,1)$ soit indépendante de la métrique ω justifie la définition suivante

Définition 2.2 *Soit (X, J) une variété presque-complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda_J^{1,1} T_X^*)(X)$ une métrique. Alors la connexion hermitienne $D_J^\omega : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}(T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} T_{X,J})$ est dite connexion de Chern du fibré hermitien $(T_{X,J}, \omega)$. La connexion de type $(0,1)$ canonique $\bar{\partial}_{T_{X,J}} : \mathcal{E}(T_{X,J}) \longrightarrow \mathcal{E}((T_{X,J}^{0,1})^* \otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})$ du fibré tangent $T_{X,J}$ est définie par la formule $\bar{\partial}_{T_{X,J}} := (D_J^\omega)^{0,1}$.*

Considérons plus généralement les fibrés vectoriels complexes $F_J^\lambda := S^\lambda T_{X,J}$ au dessus de (X, J), où S^λ désigne la puissance de Schur relative à une partition λ. La connexion de type $(0,1)$ canonique $\bar{\partial}_{T_{X,J}}$ induit une connexion de type $(0,1)$ canonique

$$\bar{\partial}_{F_J^\lambda} : \mathcal{E}(F_J^\lambda) \longrightarrow \mathcal{E}((T_{X,J}^{0,1})^* \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda)$$

sur le fibré F_J^λ. Soit h une métrique hermitienne quelconque sur F_J^λ. On définit alors la connexion de Chern $D_{F_J^\lambda}^h$ comme étant l'unique connexion hermitienne sur F_J^λ telle que $(D_{F_J^\lambda}^h)^{0,1} = \bar{\partial}_{F_J^\lambda}$.

3 La courbure de Chern

On a la définition suivante.

Définition 3.1 *Le tenseur de courbure de Chern $\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)$ du fibré vectoriel hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X, J)$ est la $(1,1)$-forme donnée par la formule $\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) := \Theta(D_{F_J^\lambda}^h)^{1,1}$. La courbure de Chern*

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h \in \mathcal{E}((T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}} (T_{X,-J} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{F}_J^\lambda)^*)(X)$$

est définie par la formule

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(\xi \otimes \sigma, \eta \otimes \tau) := h(\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi_J^{1,0}, \eta_J^{0,1}) \cdot \sigma, \tau)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ et sections $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ sur un ouvert U quelconque.

La relation (8) (remarque dans la section 0) montre que la courbure de Chern $\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h$ est une forme hermitienne sur le fibré vectoriel complexe $T_{X,J} \otimes_{\mathbb{C}} F_J^\lambda$. Soit

$$\mathcal{C}_h(F_J^\lambda) = \sum_{\substack{1 \le l,m \le r_\lambda \\ 1 \le j,k \le n}} C_{l,m}^{j,k} \, \zeta_j^* \wedge \bar{\zeta}_k^* \otimes e_m^* \otimes e_l$$

l'expression locale du tenseur de courbure de Chern, (ici $r_\lambda := rg_{\mathbb{C}} F_J^\lambda$). Si le repère local $(e_l)_l \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)^{\oplus r_\lambda}(U)$ est $h(x_0)$-orthonormé en un point x_0 alors l'expression locale de la courbure de Chern s'écrit sous la forme

$$\mathcal{C}_{F_J^\lambda}^h(x_0) = \sum_{\substack{1 \le l,m \le r_\lambda \\ 1 \le j,k \le n}} C_{l,m}^{j,k}(x_0) \, \zeta_j^* \otimes e_m^* \otimes \bar{\zeta}_k^* \otimes \bar{e}_l^*$$

où les coefficients vérifient la relation $\overline{C_{l,m}^{j,k}(x_0)} = C_{m,l}^{k,j}(x_0)$ remarqué dans la section 0. Remarquer que $(\zeta_{k|T_X}^*)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J}^*)^{\oplus n}(U)$ est le repère dual du repère $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_{X,J})^{\oplus n}(U)$ par rapport à la structure J. Bien évidemment il est équivalent de donner soit le tenseur de courbure soit la courbure de Chern. On aura besoin de la définition suivante.

Définition 3.2 *Une section $\sigma \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dite presque-holomorphe au point $x \in U$ si on a $\bar\partial\,\sigma(x) = 0$. Un repère local $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ est dit presque-holomorphe spécial au point $x \in U$ si $\bar\partial\,\sigma_k(x) = 0$ et $(D^h)^{1,0}\,\bar\partial\,\sigma_k(x) = 0$ pour tout k.*

La définition de repère local presque-holomorphe spécial en un point est indépendante de la métrique hermitienne. En effet si A''_σ est la matrice de la connexion de type $(0,1)$ canonique du fibré vectoriel F_J^λ relative au repère $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ on a que la condition que le repère local $(\sigma_k)_k$ soit presque-holomorphe spécial au point x est exprimé par les égalités $A''_\sigma(x) = 0$ et $\partial_J A''_\sigma(x) = 0$. Le lemme élémentaire suivant donne une première idée de l'utilité de la notion de courbure de Chern.

Lemme 3.0.1 *Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ deux sections presque-holomorphes en un point $x \in U$ du fibré hermitien $(F_J^\lambda, h) \longrightarrow (X,J)$ et $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ deux champs de vecteurs réels. Alors au point x on a l'identité*

$$\mathcal{C}^h_{F_J^\lambda}(\xi\otimes\sigma, \eta\otimes\tau)_{|x} = \bar\partial_J\partial_J\, h(\sigma,\tau)(\xi^{1,0},\eta^{0,1})_{|x} + h(\xi_D^{1,0}.\,\sigma, \eta_D^{1,0}.\,\tau)_{|x}$$

$$+h(\xi_D^{1,0}.\,\eta_D^{0,1}.\,\sigma,\tau)_{|x} + h(\sigma, \eta_D^{1,0}.\,\xi_D^{0,1}.\,\tau)_{|x}. \tag{16}$$

Soit $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(F_J^\lambda)(U)$ un repère local presque-holomorphe spécial au point $x \in U$. Alors au point x on a l'identité

$$\mathcal{C}^h_{F_J^\lambda}(\xi\otimes\sigma_k, \eta\otimes\sigma_l)_{|x} = \bar\partial_J\partial_J\, h(\sigma_k,\sigma_l)(\xi^{1,0},\eta^{0,1})_{|x} + h(\xi_D^{1,0}.\,\sigma_k, \eta_D^{1,0}.\,\sigma_l)_{|x}. \tag{17}$$

En particulier

$$i\partial_J\bar\partial_J\,|\sigma_k|_h^2\,(\xi, J\xi)_{|x} = -2\,\mathcal{C}^h_{F_J^\lambda}\,(\xi\otimes\sigma_k,\xi\otimes\sigma_k)_{|x} + 2\,|\xi_D^{1,0}.\,\sigma_k|^2_{h\,|x}. \tag{18}$$

Dans le cas d'une variété complexe (X,J) et d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien $(F,h) \longrightarrow (X,J)$ on a pour toutes sections holomorphes $\sigma, \tau \in \mathcal{O}(F)(U)$ l'identité

$$\mathcal{C}^h_F(\xi\otimes\sigma,\eta\otimes\tau) = \bar\partial_J\partial_J\,h(\sigma,\tau)(\xi^{1,0},\eta^{0,1}) + h(\xi_D^{1,0}.\,\sigma,\eta_D^{1,0}.\,\tau)$$

sur l'ouvert U. On déduit en particulier la formule remarquable suivante

$$i\partial_J\bar\partial_J\,|\sigma|_h^2\,(\xi,J\xi) = -2\,\mathcal{C}^h_F\,(\xi\otimes\sigma,\xi\otimes\sigma) + 2\,|\xi_D^{1,0}.\,\sigma|_h^2$$

laquelle montre que pour tout section holomorphe $\sigma \in \mathcal{O}(F)(U)$ la fonction $|\sigma|_h^2$ est plurisousharmonique sur l'ouvert U si la courbure du fibré F est semi-négative au sens de Griffits, autrement dit si $\mathcal{C}^h_F(\xi\otimes\sigma,\xi\otimes\sigma) \le 0$ pour tout $\xi \in T_{X,x}$ et $\sigma \in F_x$. On déduit en particulier que si la variété complexe X est compacte, connexe et $\sigma \in \mathcal{O}(F)(X)$ est une section globale d'un fibré vectoriel holomorphe F admettant une métrique hermitienne à courbure seminégative au sens de Griffits alors le section σ est identiquement nulle sur X si elle s'annule en un point. On remarque que la notion de semi-positivité (semi-négativité) au sens de Griffits pour un fibré (F_J^λ, h) ne signifie rien d'autre que pour tout vecteur réel $\xi \in T_{X,J}$ l'endomorphisme h-hermitien $i\mathcal{C}_h(F_J^\lambda)(\xi,J\xi)$ est semi-positif (semi-négatif). Si la courbure du fibré (F_J^λ,h) est négative au sens de Griffits en un point x alors on déduit d'après la formule (18) que les fonctions $|\sigma_k|_h^2$ sont strictement J-plurisousharmoniques au voisinage du point x, (voir [Pal] pour plus de détails).

Preuve du lemme 3.0.1. On a l'égalité

$$\partial_J\bar\partial_J\,h(\sigma,\tau) = \{D_F^{1,0}\,\bar\partial_F\sigma,\tau\}_h - \{\bar\partial_F\sigma,\bar\partial_F\tau\}_h + \{D_F^{1,0}\sigma, D_F^{1,0}\tau\}_h + \{\sigma,\bar\partial_F D_F^{1,0}\tau\}_h.$$

Le fait que deg $\sigma = $ deg $\tau = 0$ et l'identité $\{\mathcal{C}_h(F)\cdot\sigma,\tau\}_h + \{\sigma,\mathcal{C}_h(F)\cdot\tau\}_h = 0$ impliquent

$$\partial_{_J}\bar{\partial}_{_J}\, h(\sigma,\tau) = -\{\mathcal{C}_h(F)\cdot\sigma,\tau\}_h - \{\sigma, D^{1,0}_{_F}\bar{\partial}_{_F}\tau\}_h + \{D^{1,0}_{_F}\,\bar{\partial}_{_F}\sigma,\tau\}_h$$

$$-\{\bar{\partial}_{_F}\sigma,\bar{\partial}_{_F}\tau\}_h + \{D^{1,0}_{_F}\sigma, D^{1,0}_{_F}\tau\}_h. \tag{19}$$

En explicitant l'égalité précédente par rapport au champs de vecteurs réels ξ et η on obtient l'identité

$$\mathcal{C}^h_{_F}(\xi\otimes\sigma,\eta\otimes\tau) = \bar{\partial}_{_J}\partial_{_J}\, h(\sigma,\tau)(\xi^{1,0},\eta^{0,1}) + h(\xi^{1,0}_{_D}\cdot\eta^{0,1}_{_D}\cdot\sigma,\tau) + h(\sigma,\eta^{1,0}_{_D}\cdot\xi^{0,1}_{_D}\cdot\tau)$$

$$+h([\eta^{0,1},\xi^{1,0}]^{0,1}_{_D}\cdot\sigma,\tau) + h(\sigma,[\xi^{0,1},\eta^{1,0}]^{0,1}_{_D}\cdot\tau) + h(\xi^{1,0}_{_D}\cdot\sigma,\eta^{1,0}_{_D}\cdot\tau) + h(\eta^{0,1}_{_D}\cdot\sigma,\xi^{0,1}_{_D}\cdot\tau)$$

laquelle permet de déduire la formule (16). Soit $(\sigma_k)_k$ le repère de l'énonce du lemme. On déduit d'après l'identité (19) l'égalité suivante au point x ;

$$\partial_{_J}\bar{\partial}_{_J}\, h(\sigma_k,\sigma_l)_{|x} = -\{\mathcal{C}_h(F)\cdot\sigma_k,\sigma_l\}_{h\,|x} + \{D^{1,0}_{_F}\sigma_k, D^{1,0}_{_F}\sigma_l\}_{h\,|x}$$

laquelle permet de conclure. □

3.1 La courbure de Chern du fibré tangent d'une variété presque-complexe

Dans le cas du fibré tangent d'une variété presque-complexe le tenseur de courbure de Chern $\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) := \Theta(D^\omega_{_J})^{1,1} \in \mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_{_J}T^*_X \otimes_{\mathbb{C}} T^*_{X,J}\otimes_{\mathbb{C}} T_{X,J})(X)$ s'écrit sous la forme locale

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) = \sum_{1\leq j,k,l,m\leq n} C^{j,k}_{l,m}\,\zeta^*_j\wedge\bar{\zeta}^*_k\otimes\zeta^*_m\otimes_{_J}\zeta_l. \tag{20}$$

(La notation $\alpha\otimes\zeta^*_l\otimes_{_J}\zeta_m$ avec α une $(1,1)$-forme par exemple doit être interprétée sous la forme suivante. Si $\xi_1,\xi_2\in T_{X,x}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ et $\eta = \eta_l\zeta_l + \bar{\eta}_l\bar{\zeta}_l \in T_{X,x}$ alors $\alpha\otimes\zeta^*_l\otimes_{_J}\zeta_m(\xi_1,\xi_2,\eta) = \alpha(\xi_1,\xi_2)\,\eta_l\,\zeta_m + \overline{\alpha(\xi_1,\xi_2)\,\eta_l\,\zeta_m}$). En particulier la courbure de Chern du fibré tangent $\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}} \in \mathcal{E}(T^{*,\otimes 2}_{X,J}\otimes_{\mathbb{C}} T^{*,\otimes 2}_{X,-J})(X)$ est définie par la formule

$$\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}}(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2) := h_\omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi^{1,0}_1,\xi^{0,1}_2)\cdot\eta_1,\eta_2)$$

pour tout champ de vecteurs réels $\xi_j,\eta_j\in\mathcal{E}(T_X)(U)$, $j=1,2$, (h_ω est la forme hermitienne associée à ω. On rappelle qu'elle est définie par la formule $h_\omega(\xi,\eta) := \omega(\xi,J\eta) - i\omega(\xi,\eta)$). Le fait que $\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}}$ soit une forme hermitienne sur le fibré $T^{\otimes 2}_{X,J}$ implique que la quantité $\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}}(\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta)$, $\xi,\eta\in\mathcal{E}(T_X)(U)$ est réelle. On déduit alors les identités

$$\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}}(\xi\otimes\eta,\xi\otimes\eta) = \omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi,J\xi)\cdot\eta,\eta)$$

$$\omega(\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(\xi,J\xi)\cdot\eta,J\eta) = 0.$$

La courbure de Chern du fibré tangent s'écrit en un point x où le repère $(\zeta_k)_k\in\mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})^{\oplus n}(U)$ est choisie $\omega(x)$-orthonormé sous la forme

$$\mathcal{C}^\omega_{_{X,J}}(x) = \sum_{1\leq j,k,l,m\leq n} C^{j,k}_{l,m}(x)\,\zeta^*_j\otimes\zeta^*_m\otimes\bar{\zeta}^*_k\otimes\bar{\zeta}^*_l$$

avec la relation de symétrie hermitienne $\overline{C^{j,k}_{l,m}(x)} = C^{k,j}_{m,l}(x)$. Dans la section 6 on montrera l'existence de repères locaux $(\sigma_k)_k \subset \mathcal{E}(T_X)(U)$ presque-holomorphes spéciaux en un point $x \in U$ tels que $D^\omega_{_J}\sigma_k(x) = 0$ pour tout k. Dans ce cas on déduit d'après les formules (17) et (18) les identités au point x suivantes ;

$$\mathcal{C}^\omega_{X,J}(\xi \otimes \sigma_k, \eta \otimes \sigma_l)_{|x} = \bar{\partial}_{_J}\partial_{_J}\, h_\omega(\sigma_k, \sigma_l)(\xi^{1,0}, \eta^{0,1})_{|x}$$

$$i\partial_{_J}\bar{\partial}_{_J}\, |\sigma_k|^2_\omega\,(\xi, J\xi)_{|x} = -2\,\mathcal{C}^\omega_{X,J}\,(\xi \otimes \sigma_k, \xi \otimes \sigma_k)_{|x},$$

pour tout champs de vecteurs réels $\xi, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U)$.
Remarque. Le fait que la connexion de Chern soit hermitienne implique que en un point x on a $\Theta(D^\omega_{_J})^{0,2}_{|x} = 0$ si et seulement si $\Theta(D^\omega_{_J})^{2,0}_{|x} = 0$. On peut montrer que $\Theta(D^\omega_{_J})^{0,2}_{|x} = 0$ si le jet d'ordre un de la forme de torsion de la structure presque-complexe est nul au point x.

4 Coordonnées presque-complexes d'ordre N en un point

Soient $(z_1, ..., z_n)$ des coordonnées locales $\mathcal{C}^\infty$ centrées en $x \in X$ telles que le repère local $(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n})$ soit une base complexe de $T^{1,0}_{X,J,x}$ au point x. On dénote par $M_J \in M_{2n,2n}(\mathcal{E})$ la matrice de la structure presque-complexe $J \in \mathcal{E}(End_{\mathbb{C}}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))(X)$ par rapport au repère complexe $(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$. Le fait que $\overline{J} = J$ implique que la matrice M_J s'écrit sous la forme :

$$M_J(z) = \begin{pmatrix} A(z) & \overline{B}(z) \\ B(z) & \overline{A}(z) \end{pmatrix}$$

On a alors que la structure presque-complexe s'exprime sous la forme :

$$J(z) = \sum_{k,l}\Big(A_{k,l}(z)\, dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + B_{k,l}(z)\, dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \overline{B}_{k,l}(z)\, d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} + \overline{A}_{k,l}(z)\, d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big)$$

avec $A(0) = iI_n,\ B(0) = 0_n$. Si on suppose que la structure presque-complexe est intégrable il existent d'après le théorème de Newlander-Nirenberg des coordonnées locales holomorphes $(z_1, ..., z_n)$. La structure presque complexe s'écrit alors par rapport à ces coordonnées sous la forme

$$J(z) = J_0 = i\sum_k \Big(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big) \tag{21}$$

autrement dit $A(z) \equiv i\, I_n,\ B(z) \equiv 0_n$. Avec les notations introduites précédemment on a la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Pour tout point x d'une variété presque-complexe (X, J) et pour tout entier $N \geq 2$ il existe des coordonnées $(z_1, ..., z_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ centrées en x telles que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ de la structure presque-complexe J relatives à ces coordonnées admettent les développements asymptotiques*

$$A(z) = i\, I_n + \frac{i}{2}\sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N \\ |\alpha|, |\beta| \geq 1}} A^{\alpha,\beta}\, z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) \tag{22}$$

$$B(z) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N \\ |\alpha| \geq 1}} B^{\alpha,\beta}\, z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) \tag{23}$$

où $A^{\alpha,\beta}$, $B^{\alpha,\beta} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *sont des matrices telles que les coefficients des matrices* $B^{\alpha,\beta}$ *vérifient la propriété ;* $B^{\alpha,\beta}_{k,l} = 0$ *pour tout* $l \geq \max\{k \in \{1,...,n\} \,|\, \alpha_k \neq 0\}$*. Les matrices* $A^{\alpha,\beta}$ *sont obtenues à partir des matrices* $B^{\alpha,\beta}$*, (avec la convention* $B^{0,\beta} := 0$*), grâce à la formule :*

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{[|\alpha+\beta|/2]} \sum_{\substack{\sum_{r=1}^{k} (\rho_r+\mu_r)=\alpha \\ \sum_{r=1}^{k} (\lambda_r+\gamma_r)=\beta}} (-4)^{-(k-1)} \overrightarrow{\prod_{1\leq r\leq k}} \overline{B}^{\lambda_r,\mu_r} \cdot B^{\rho_r,\gamma_r} \tag{24}$$

où le symbole $[c]$ *désigne la partie entière de* c *et le symbole de produit avec une flèche vers la droite désigne le produit non commutatif des termes qui sont écrits en ordre croissant de l'indice vers la droite.*

(Remarquer que dans la formule (24) la convention $B^{0,\beta} = 0$ implique que les sommes non nulles sont celles correspondantes aux multi-indices $|\lambda_r|$, $|\rho_r| \geq 1$).

Définition 4.2 *Les coordonnées qui vérifient les propriétés de l'énonce du lemme précédent seront appelées coordonnées presque-complexes d'ordre* N *en* x *par rapport à la structure* J*.*

Dans le cas particulier $N = 3$ la formule (24) s'écrit sous la forme ;

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^{\lambda} \cdot B^{\rho,\gamma}$$

On ré-énonce la proposition précédente dans le cas $N = 3$ sous une forme plus explicite et pratique pour les calculs relatifs à la sous-section qui suivra.

Corollaire 1 *Pour tout point* x *d'une variété presque-complexe* (X, J) *il existe des coordonnées* $(z_1, ..., z_n)$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *centrées en* x *telles que les matrices* $A(z)$ *et* $B(z)$ *de la structure presque-complexe* J *relatives à ces coordonnes admettent les développements asymptotiques*

$$\begin{aligned} B(z) = \sum_r B^r z_r + \sum_{r,s} \Big(B^{r,s} z_r z_s + B^{r,\bar{s}} z_r \bar{z}_s\Big) \\ + \sum_{r,s,t} \Big(B^{r,s,t} z_r z_s z_t + B^{r,s,\bar{t}} z_r z_s \bar{z}_t + B^{r,\bar{s},\bar{t}} z_r \bar{z}_s \bar{z}_t\Big) + O(|z|^4) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} A(z) = i\, I_n + \frac{i}{2} \sum_{r,s} \overline{B}^r \cdot B^s z_s \bar{z}_r + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \Big(\overline{B}^{t,\bar{r}} \cdot B^s + \overline{B}^{t,\bar{s}} \cdot B^r + 2\overline{B}^t \cdot B^{r,s}\Big) z_r z_s \bar{z}_t \\ + \frac{i}{4} \sum_{r,s,t} \Big(\overline{B}^t \cdot B^{r,\bar{s}} + \overline{B}^s \cdot B^{r,\bar{t}} + 2\overline{B}^{s,t} \cdot B^r\Big) z_r \bar{z}_s \bar{z}_t + O(|z|^4) \end{aligned} \tag{26}$$

où B^r, $B^{r,s}$, $B^{r,\bar{s}}$, $B^{r,s,t}$, $B^{r,s,\bar{t}}$, $B^{r,\bar{s},\bar{t}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ *sont des matrices telles que* $B^{r,s}$ *soit symétrique par rapport aux indices* r, s*,* $B^{r,s,t}$ *par rapport à* r, s, t*,* $B^{r,s,\bar{t}}$ *par rapport à* r, s*,* $B^{r,\bar{s},\bar{t}}$ *par rapport à* s, t *et* $B^r_{k,l} = 0$ *pour* $r \leq l$*,* $B^{r,s}_{k,l} = 0$ *pour* $r, s \leq l$*,* $B^{r,\bar{s}}_{k,l} = 0$ *pour* $r \leq l$*,* $B^{r,s,t}_{k,l} = 0$ *pour* $r, s, t \leq l$*,* $B^{r,s,\bar{t}}_{k,l} = 0$ *pour* $r, s \leq l$*, et* $B^{r,\bar{s},\bar{t}}_{k,l} = 0$ *pour* $r \leq l$*. De plus si on considère l'expression locale de la forme de torsion de la structure presque-complexe*

$$\tau_J = \sum_{1\leq k<l\leq n} [\zeta_k, \zeta_l]^{0,1}_J \otimes \zeta^*_k \wedge \zeta^*_l = \sum_{\substack{1\leq k<l\leq n \\ 1\leq r\leq n}} \overline{N}^r_{k,l}\, \zeta^*_k \wedge \zeta^*_l \otimes \bar{\zeta}_r$$

où $\zeta_l := (\partial/\partial z_l)^{1,0}_J \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U_x)$, $l = 1, ..., n$ *est le repère locale du fibré des* $(1,0)$*-vecteurs* $T^{1,0}_{X,J}$ *issue des coordonnées* $(z_1, ..., z_n)$ *on a l'expression*

$$\overline{N}^r_{k,l}(z) = \frac{i}{2} B^l_{r,k} + \frac{i}{2} \sum_s \Big[2(B^{l,s}_{r,k} - B^{k,s}_{r,l})\, z_s + B^{l,\bar{s}}_{r,k}\, \bar{z}_s \Big] + O(|z|^2)$$

pour tout $k < l$*. Le jet d'ordre* $k = 0, 1$ *de la forme de torsion de la structure presque-complexe au point* x *est nul si et seulement si les coefficients* $B_{*,*}(z)$ *de la structure presque-complexe relatifs aux coordonnées en question s'annulent à l'ordre* $k + 1$*.*

Les coordonnées précédentes seront appelées coordonnées presque-complexes d'ordre 3 au point x.
Preuve de la proposition 4.1
Les changements de coordonnées
La condition $J^2 = -\mathbb{I}$ est exprimée par les conditions locales $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ et $\overline{A} \cdot B = -B \cdot A$. Le choix fait sur les coordonnées locales implique que relativement à celles-ci on a $J(0) = J_0,\ A(0) = i\, I_n,\ B(0) = 0_n$. La relation $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ implique alors que la matrice A admet un développement asymptotique du type $A(z) = i\, I_n + O(|z|^2)$. Si $Z = \Phi(z)$ est un changement de coordonnées alors la matrice de la structure presque-complexe

$$\mathcal{M}_J(Z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(Z) & \overline{\mathcal{B}}(Z) \\ \mathcal{B}(Z) & \overline{\mathcal{A}}(Z) \end{pmatrix}$$

par rapport aux nouvelles coordonnées est donné par la formule $\mathcal{M}_J(Z) = d\Phi \cdot M_J(z) \cdot d\Phi^{-1}$. De manière explicite on a alors les formules

$$\mathcal{A}_{k,l}(Z) := \sum_{s,t} \Big(A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + B_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} + \overline{B}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + \overline{A}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} \Big) \qquad (27)$$

$$\mathcal{B}_{k,l}(z) := \sum_{s,t} \Big(A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} + B_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} + \overline{B}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} + \overline{A}_{s,t}(Z) \frac{\partial \bar{z}_t}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \Big). \qquad (28)$$

Considérons maintenant pour tout entier $N \geq 1$ les changements de coordonnées $Z = \Phi_N(z)$

$$Z_k = z_k - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|\geq 1}} \frac{i\, \overline{B}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}_{k,l(\alpha)}}{2\alpha_{l(\alpha)}}\, z^\beta \bar{z}^\alpha$$

où $l(\alpha) := \max\{r \in \{1, ..., n\} \,|\, \alpha_r \neq 0\}$ et les coefficients $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha + \beta| = N$ seront définis dans la suite. On considère aussi les changements inverses

$$z_k = Z_k + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|\geq 1}} \frac{i\, \overline{B}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}_{k,l(\alpha)}}{2\alpha_{l(\alpha)}}\, Z^\beta \bar{Z}^\alpha + O(|Z|^{2N+1})$$

On définit aussi

$$\mathcal{B}^{\alpha-\delta_l,\beta}_{k,l} := B^{\alpha-\delta_l,\beta}_{k,l} - \alpha_l \cdot \frac{B^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}_{k,l(\alpha)}}{\alpha_{l(\alpha)}}$$

pour tout les multi-indices α tels que $\alpha_l \geq 1$. Si on utilise la convention $0 = \max \emptyset$ on aura alors que $\mathcal{B}_{k,l}^{\alpha,\beta} = 0$ pour tout les multi-indices $|\alpha+\beta| = N$ tels que $l(\alpha) \leq l$. Avec la convention précédente on a en particulier $\mathcal{B}^{0,\beta} = 0$ pour $|\beta| = N$. On a les expressions suivantes pour les dérivées partielles :

$$\frac{\partial z_t}{\partial Z_l} = \delta_{t,l} + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|,\, \beta_l \geq 1}} \beta_l \cdot \frac{i\, \overline{B}_{t,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta-\delta_l} \bar{Z}^{\alpha} + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial z_t}{\partial \bar{Z}_l} = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{i\, \overline{B}_{t,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta} \bar{Z}^{\alpha-\delta_l} + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial Z_k}{\partial z_s} = \delta_{s,k} - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ |\alpha|,\, \beta_s \geq 1}} \beta_s \cdot \frac{i\, \overline{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta-\delta_s} \bar{Z}^{\alpha} + O(|Z|^{2N})$$

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_s} = -\sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_s \geq 1}} \alpha_s \cdot \frac{i\, \overline{B}_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{2\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\beta} \bar{Z}^{\alpha-\delta_s} + O(|Z|^{2N})$$

Nous allons montrer maintenant à l'aide d'une récurrence sur N, l'existence de coordonnées pour lesquelles les matrices $A(z)$ et $B(z)$ admettent les développements asymptotiques (22) et (23) avec les conditions sur les coefficients $B_{k,l}^{\alpha,\beta}$ expliquées dans l'énonce du lemme. On commence par effectuer le changement de coordonnées $Z = \Phi_1(z)$ où les matrices $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha+\beta| = 1$ qui apparaissent dans la définition de tel changement sont celles du développement :

$$B(z) = \sum_{|\alpha+\beta|=1} B^{\alpha,\beta}\, z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} + O(|z|^2)$$

(rappelons que $B(0) = 0_n$). En substituant les expressions des dérivées partielles relatives au changement de coordonnées $Z = \Phi_1(z)$ et en tenant compte des développements asymptotiques des matrices $A(z)$ et $B(z)$ obtenues précédemment dans les expressions (27), (28) on aura, relativement aux nouvelles coordonnées, les développements asymptotiques suivants :

$$\mathcal{A}_{k,l}(Z) = \sum_{s,t} A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + O(|Z|^2) = i\, \delta_{k,l} + O(|Z|^2)$$

$$\mathcal{B}_{k,l}(Z) = \sum_{s} i \left(\frac{\partial z_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} - \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \right) + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^2) =$$

$$= -\sum_{\substack{|\alpha+\beta|=2 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{B_{k,l(\alpha)}^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}}{\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^{\beta} + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^2) =$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=2 \\ \alpha_l \geq 1}} \mathcal{B}_{k,l}^{\alpha-\delta_l,\beta} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^{\beta} + O(|Z|^2)$$

Pour simplifier les notations dans les calculs qui suivront on va noter à partir de maintenant A à la place de $\mathcal{A}$, B à la place de $\mathcal{B}$ et z à la place de Z. Avec ces notations on a alors que la matrice

$B(z)$ peut être écrite sous la forme asymptotique (23) avec $N = 1$ et les conditions correspondantes sur les coefficients $B^{\alpha,\beta}_{k,l}$. La relation $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ implique alors que la matrice $A(z)$ admet le développement asymptotique (22) avec $N = 2$. Supposons maintenant qu'il existe des coordonnées telles que la matrice $B(z)$ admette le développement (23) relativement à l'entier $N-1$, $N \geq 2$. On peut alors écrire le développement asymptotique suivant :

$$B(z) = \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N-1 \\ |\alpha| \geq 1}} B^{\alpha,\beta}\, z^\alpha \bar{z}^\beta + \sum_{|\alpha+\beta|=N} B^{\alpha,\beta}\, z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1})$$

relativement aux coordonnées en question, où $B^{\alpha,\beta}_{k,l} = 0$ pour $l \geq l(\alpha)$, $|\alpha+\beta| \leq N-1$, $|\alpha| \geq 1$. L'expression précédente de $B(z)$ combinée avec la relation $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ implique que la matrice $A(z)$ s'écrit sous la forme (22). On considère maintenant le changement de coordonnées $Z = \Phi_N(z)$ où les matrices $B^{\alpha,\beta}$, $|\alpha+\beta| = N$ qui apparaissent dans la définition de tel changement sont celles qui apparaissent dans l'expression asymptotique précédente de $B(z)$. Par rapport aux nouvelles coordonnées les matrices $A(z)$ et $B(z)$ admettent les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,l}(Z) &= \sum_{s,t} A_{s,t}(Z) \frac{\partial z_t}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_k}{\partial z_s} + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= i\delta_{k,l} + \frac{i}{2} \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N \\ |\alpha|,|\beta| \geq 1}} A^{\alpha,\beta}_{k,l}\, Z^\alpha \bar{Z}^\beta + O(|Z|^{N+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{k,l}(\zeta) &= \sum_s i \Big(\frac{\partial z_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial z_s} - \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial Z_l} \frac{\partial \bar{Z}_k}{\partial \bar{z}_s} \Big) + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= - \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} \alpha_l \cdot \frac{B^{\alpha-\delta_{l(\alpha)},\beta}_{k,l(\alpha)}}{\alpha_{l(\alpha)}} Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + B_{k,l}(Z) + O(|Z|^{N+1}) = \\
&= \sum_{\substack{|\alpha+\beta| \leq N-1 \\ |\alpha| \geq 1}} B^{\alpha,\beta}_{k,l}\, Z^\alpha \bar{Z}^\beta + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=N+1 \\ \alpha_l \geq 1}} \mathcal{B}^{\alpha-\delta_l,\beta}_{k,l}\, Z^{\alpha-\delta_l} \bar{Z}^\beta + O(|Z|^{N+1}).
\end{aligned}$$

De la même façon que précédemment, on va noter à partir de maintenant A à la place de $\mathcal{A}$, B à la place de $\mathcal{B}$ et z à la place de Z. Avec ces notations on a en conclusion que les matrices $A(z)$ et $B(z)$ peuvent être écrites sous les formes asymptotiques (22) et (23), avec les conditions correspondantes sur les coefficients $B^{\alpha,\beta}_{k,l}$.

Preuve de la formule (24)

On montre maintenant la formule (24) à l'aide d'une récurrence sur $N \geq 2$. Pour simplifier les notations dans les calculs qui suivront on utilisera les conventions $A^{\alpha,0} = A^{0,\beta} = 0$. En tenant compte des expressions (22) et (23) pour $2 \leq N \leq 3$ on peut écrire la relation $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ sous la forme

$$\begin{aligned}
-I_n - \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} A^{\alpha,\beta}\, z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}) = \\
= -I_n - \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \Big(\sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^\lambda \cdot B^{\rho,\gamma} \Big) z^\alpha \bar{z}^\beta + O(|z|^{N+1}),
\end{aligned}$$

(rappelons qu'on utilise la convention $B^{0,\beta} = 0$). On a alors

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^{\lambda} \cdot B^{\rho,\gamma}$$

pour $2 \leq |\alpha + \beta| \leq 3$, qui n'est rien d'autre que la formule (24) dans les cas particuliers en considération. Nous supposons maintenant avoir montré la formule (24) pour $2 \leq |\alpha + \beta| \leq N$. Comme précédemment la relation $A^2 = -I_n - \overline{B} \cdot B$ s'écrit, à l'aide des expressions (22) et (23) pour $N+1$, sous la forme ;

$$-I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} A^{\alpha,\beta} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} - \frac{1}{4} \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} \Big(\sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta}} A^{\lambda} \cdot A^{\rho,\gamma} \Big) z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} + O(|z|^{N+2}) =$$

$$= -I_n - \sum_{|\alpha+\beta|\leq N+1} \Big(\sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^{\lambda} \cdot B^{\rho,\gamma} \Big) z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} + O(|z|^{N+2})$$

Cette identité implique que pour tout α, β, $|\alpha + \beta| = N + 1$ on a :

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^{\lambda} \cdot B^{\rho,\gamma} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta}} A^{\lambda} \cdot A^{\rho,\gamma}.$$

En rappelant la convention $A^{0,\beta} = A^{\alpha,0} = 0$ on a que les termes non nuls de la dernière somme sont les termes relatifs aux multi-indices $|\lambda + \mu|, |\rho + \gamma| \leq N$. En utilisant l'hypothèse récursive relativement à l'expression (24) on peut écrire l'expression précédente de la matrice $A^{\alpha,\beta}$ sous la forme ;

$$A^{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\mu+\rho=\alpha \\ \lambda+\gamma=\beta}} \overline{B}^{\lambda} \cdot B^{\rho,\gamma} -$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{\substack{\lambda+\rho=\alpha \\ \mu+\gamma=\beta \\ 1\leq k_1\leq[|\lambda+\mu|/2] \\ 1\leq k_2\leq[|\rho+\gamma|/2]}} \; \sum_{\substack{\sum_{r_1=1}^{k_1}(\rho_{r_1}+\mu_{r_1})=\lambda \\ \sum_{r_1=1}^{k_1}(\lambda_{r_1}+\gamma_{r_1})=\mu \\ \sum_{r_2=1}^{k_2}(\rho_{r_2}+\mu_{r_2})=\rho \\ \sum_{r_2=1}^{k_2}(\lambda_{r_2}+\gamma_{r_2})=\gamma}} (-4)^{-(k_1+k_2-2)} \overrightarrow{\prod_{1\leq r_1\leq k_1}} \overline{B}^{\lambda_{r_1},\mu_{r_1}} \cdot B^{\rho_{r_1},\gamma_{r_1}} \overrightarrow{\prod_{1\leq r_2\leq k_2}} \overline{B}^{\lambda_{r_2},\mu_{r_2}} \cdot B^{\rho_{r_2},\gamma_{r_2}}.$$

En analysant l'ensemble des indices qui apparaissent sous les sommes précédentes on s'aperçoit de la validité de l'expression (24) relativement aux multi-indices α, β en considération. $\square$

Preuve du corollaire 1
Le repère local $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)^{1,0}_J$, $k = 1, ..., n$ s'écrit sous la forme

$$\zeta_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{i}{2}\sum_r \Big(A_{r,k}\frac{\partial}{\partial z_r} + B_{r,k}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} \Big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{1}{4}\sum_{p,h,t,j} \overline{B}^h_{t,j} B^p_{j,k}\, z_p \bar{z}_h \frac{\partial}{\partial z_t} - \frac{i}{2}\sum_t \mathbf{jet}_2 B_{t,k}(z)\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_t} + O(|z|^3)$$

où $\mathbf{jet}_2\, B_{t,l}(z)$ désigne le jet d'ordre 2 du coefficient $B_{t,l}$ de la structure presque-complexe J par rapport aux coordonnées en question. On déduit alors facilement l'expression suivante pour le crochet

$$[\zeta_k, \zeta_l] = \frac{i}{2} \sum_r \Big\{ B^l_{r,k} + \sum_p \Big[2(B^{l,p}_{r,k} - B^{k,p}_{r,k})\, z_p + B^{l,\bar{p}}_{r,k}\, \bar{z}_p \Big] \Big\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} - \frac{1}{4} \sum_{pr,j} \overline{B}^p_{r,j} B^l_{j,k}\, \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression de la structure presque-complexe à l'ordre un

$$J(z) = i \sum_k \Big(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big) + \sum_{k,l,p} \Big(B^p_{k,l}\, z_p\, dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \overline{B}^p_{k,l}\, \bar{z}_p\, d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} \Big) + O(|z|^2)$$

on obtient l'expression

$$J[\zeta_k, \zeta_l] = \frac{1}{2} \sum_r \Big\{ B^l_{r,k} + \sum_p \Big[2(B^{l,p}_{r,k} - B^{k,p}_{r,k})\, z_p + B^{l,\bar{p}}_{r,k}\, \bar{z}_p \Big] \Big\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + \frac{i}{4} \sum_{pr,j} \overline{B}^p_{r,j} B^l_{j,k}\, \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

On déduit alors l'expression

$$[\zeta_k, \zeta_l]^{0,1}_J = \frac{i}{2} \sum_r \Big\{ B^l_{r,k} + \sum_p \Big[2(B^{l,p}_{r,k} - B^{k,p}_{r,k})\, z_p + B^{l,\bar{p}}_{r,k}\, \bar{z}_p \Big] \Big\} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} - \frac{1}{4} \sum_{pr,j} \overline{B}^p_{r,j} B^l_{j,k}\, \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression

$$\bar{\zeta}_r = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + \frac{i}{2} \sum_{s,p} \overline{B}^p_{s,r}\, \bar{z}_p \frac{\partial}{\partial z_s} + O(|z|^2)$$

on déduit l'expression voulue pour les coefficients $\overline{N}^*_{*,*}$ de la forme de torsion de la structure presque-complexe. Ces coefficients s'annulent à l'ordre $k = 0, 1$ si et seulement si les coefficients $B_{*,*}(z)$ de la structure presque-complexe s'annulent à l'ordre $k+1$. En effet supposons que $T^{k,l,s}_r := B^{l,s}_{r,k} - B^{k,s}_{r,l}$ soit nul pour tout les indices k, l, s, r. Si k où l sont le maximum de l'ensemble $\{k, l, s\}$ alors on a immédiatement $B^{l,s}_{r,k} = B^{k,s}_{r,l} = 0$. Sinon on a $s = \max\{k, l, s\}$ et donc $T^{k,s,l}_r = B^{s,l}_{r,k} = B^{l,s}_{r,k} = 0$. $\square$

Le calcul fait dans la preuve du corollaire 1 montre que $M^* = O(|z|^2)$. Une conséquence immédiate des formules (27) et (28) est le corollaire suivant.

Corollaire 2 *Soient $(z_1, ..., z_n)$ des coordonnées presque-complexes à l'ordre $N \geq 1$ en un point x et soit $Z_k = z_k + \sum_{|\alpha|=N+1} C^k_\alpha\, z^\alpha$ un changement de coordonnées holomorphe. Alors les coordonnées $(Z_1, ..., Z_n)$ sont presque-complexes à l'ordre N en x et les coefficients $B^{*,*}_{*,*}$ du jet d'ordre N de la structure presque-complexe par rapport aux nouvelles coordonnées sont les mêmes que les coefficients relatifs aux coordonnées $(z_1, ..., z_n)$.*

5 Expression asymptotique normale à l'ordre un de la connexion de Chern du fibré tangent

Le lemme suivant est nécessaire pour le calcul du flot de Chern. Ce dernier est utile pour une technique de régularisation globale des $(1,1)$-courants positifs du type $i\partial_J \bar{\partial}_J u$ sur les variétés presque-complexes (voir [Pal] pour plus de détails).

Lemme 5.0.1 *Soit (X,J) une variété presque-complexe, $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_J T^*_X)(X)$ une métrique hermitienne et soient $(z_1,...,z_n)$ des coordonnées presque-complexes d'ordre $N \geq 2$ en un point x telles que le repère normal $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)^{1,0}_J$ soit $\omega(x)$-orthonormé. La métrique ω s'écrit alors sous la forme*

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{l,m}\Big[h_{l,m} + \frac{i}{4}\sum_{j,k,r} B^j_{r,l}\overline{B}^k_{r,m}\, z_j \bar{z}_k\Big]\, dz_l \wedge d\bar{z}_m$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{l,m} \mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z)\, dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4}\sum_{l,m}\overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z)}\, d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^3), \tag{29}$$

où

$$h_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_p \Big(H^p_{l,m}\, z_p + \overline{H}^p_{m,l}\, \bar{z}_p\Big) + \sum_{p,h}\Big(H^{p,h}_{l,m}\, z_p z_h + \overline{H}^{p,h}_{m,l}\, \bar{z}_p \bar{z}_h + H^{p,\bar{h}}_{l,m}\, z_p \bar{z}_h\Big) + O(|z|^3)$$

et $\mathbf{jet}_2\, B_{l,m}$ désigne le jet d'ordre 2 du coefficient $B_{l,m}$ de la structure presque-complexe J par rapport aux coordonnées en question. Pour tous champs de vecteurs réels $\eta = \sum_k (\eta_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\eta}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}) \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$ on a l'expression asymptotique de la dérivée de Chern

$$D^\omega_J\, \eta = \sum_k \Big[d\eta_k + \sum_l \Big(E_{k,l}\, \eta_l - \frac{i}{2}(d\,\overline{\mathbf{jet}_2 B_{k,l}}\,)\, \bar{\eta}_l\Big)\Big] \otimes_{J_0} \frac{\partial}{\partial z_k} + O(|z|^2),$$

où

$$E_{k,l} := \sum_p \Big[H^p_{l,k} + \sum_h (S^{p,h}_{k,l}\, z_h + S^{p,\bar{h}}_{k,l}\, \bar{z}_h)\Big]\, dz_p + \sum_{p,h}(S^{\bar{p},h}_{k,l}\, z_h + S^{\bar{p},\bar{h}}_{k,l}\, \bar{z}_h)\, d\bar{z}_p.$$

Les coefficients $S^{*,*}_{k,l}$ sont données par les formules

$$S^{\bar{p},h}_{k,l} = \frac{1}{4}\sum_j (\overline{B}^j_{k,p} - \overline{B}^p_{k,j})B^h_{j,l}\,, \qquad S^{\bar{p},\bar{h}}_{k,l} = \frac{i}{2}\overline{B}^{h,\bar{l}}_{k,p} - \frac{i}{2}\sum_j H^j_{l,k}\overline{B}^h_{j,p}\,,$$

$$S^{p,h}_{k,l} = 2H^{p,h}_{l,k} - \frac{i}{2}B^{h,\bar{k}}_{l,p} - \sum_j \Big(H^p_{l,j}H^h_{j,k} + \frac{i}{2}\overline{H}^j_{k,l}B^h_{j,p}\Big), \qquad S^{p,\bar{h}}_{k,l} = -C^{p,h}_{k,l}(0) - \frac{1}{4}\sum_j \overline{B}^j_{k,h}B^p_{j,l},$$

où $C^{p,h}_{k,l}(0)$ sont les coefficients de la courbure de Chern

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) = \sum_{j,k,m,l} C^{j,k}_{m,l}(0)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes dz_l \otimes_{J_0} \frac{\partial}{\partial z_m} + O(|z|).$$

au point x. Ils sont donné par la formule

$$C^{j,k}_{m,l}(0) = -H^{j,\bar{k}}_{l,m} + \frac{1}{4}\sum_r \Big[4H^j_{l,r}\overline{H}^k_{m,r} + (\overline{B}^k_{m,r} - \overline{B}^r_{m,k})B^j_{r,l} + (B^j_{l,r} - B^r_{l,j})\overline{B}^k_{r,m}\Big]. \tag{30}$$

Preuve
On déduit facilement d'après la preuve du corollaire 1 l'expression asymptotique à l'ordre deux du repère $(\zeta_l)_l$ et du repère dual $(\zeta^*_l)_l$. On a les expressions asymptotiques suivantes.

$$\zeta_l = \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{1}{4}\sum_{p,h,t,j} \overline{B}^h_{t,j}B^p_{j,l}\, z_p \bar{z}_h \frac{\partial}{\partial z_t} - \frac{i}{2}\sum_t \mathbf{jet}_2 B_{t,l}(z)\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_t} + O(|z|^3) \tag{31}$$

$$\zeta^*_l = dz_l - \frac{i}{2}\sum_t \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,t}(z)}\, d\bar{z}_t + O(|z|^3). \tag{32}$$

En tenant compte de cette dernière expression on déduit que la métrique $\omega = \frac{i}{2}\sum_{l,m} h_{l,m}\, \zeta_l^* \wedge \bar{\zeta}_m^*$ s'écrit sous la forme (29). On calcule maintenant les expressions asymptotiques des coefficients U^*, définis dans la section 1, relativement au repère $\zeta_l = (\partial/\partial z_l)_J^{1,0}$, $l = 1, ..., n$. Pour tout indice k, h on a

$$[\zeta_k, \bar{\zeta}_h] = \sum_{r,l} \Big[\frac{i}{2}\overline{B}^{l,\bar{k}}_{r,h}\, \bar{z}_l + \frac{1}{4}\sum_j (\overline{B}^j_{r,h} - \overline{B}^h_{r,j}) B^l_{j,k}\, z_l\Big] \frac{\partial}{\partial z_r}$$

$$+ \sum_{r,l} \Big[\frac{i}{2} B^{l,\bar{h}}_{r,k}\, z_l + \frac{1}{4}\sum_j (B^k_{r,j} - B^j_{r,k}) \overline{B}^l_{j,h}\, \bar{z}_l\Big] \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + O(|z|^2)$$

En tenant compte de l'expression de la structure presque-complexe à l'ordre un

$$J(z) = i\sum_k \Big(dz_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_k} - d\bar{z}_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\Big) + \sum_{k,l,p} \Big(B^p_{k,l}\, z_p\, dz_l \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \overline{B}^p_{k,l}\, \bar{z}_p\, d\bar{z}_l \otimes \frac{\partial}{\partial z_k}\Big) + O(|z|^2)$$

on obtient l'expression

$$J[\zeta_k, \bar{\zeta}_h] = \sum_{r,l} \Big[-\frac{1}{2}\overline{B}^{l,\bar{k}}_{r,h}\, \bar{z}_l + \frac{i}{4}\sum_j (\overline{B}^j_{r,h} - \overline{B}^h_{r,j}) B^l_{j,k}\, z_l\Big] \frac{\partial}{\partial z_r}$$

$$+ \sum_{r,l} \Big[\frac{1}{2} B^{l,\bar{h}}_{r,k}\, z_l - \frac{i}{4}\sum_j (B^k_{r,j} - B^j_{r,k}) \overline{B}^l_{j,h}\, \bar{z}_l\Big] \frac{\partial}{\partial \bar{z}_r} + O(|z|^2)$$

On a alors

$$[\zeta_k, \bar{\zeta}_h]_J^{1,0} = \sum_{r,l} \Big[\frac{1}{4}\sum_j (\overline{B}^j_{r,h} - \overline{B}^h_{r,j}) B^l_{j,k}\, z_l + \frac{i}{2}\overline{B}^{l,\bar{k}}_{r,h}\, \bar{z}_l\Big] \frac{\partial}{\partial z_r} + O(|z|^2).$$

En tenant compte de l'expression asymptotique à l'ordre un du repère $(\zeta_k)_k$ on déduit l'expression

$$U^r_{k,h}(z) = \sum_l \Big[\frac{1}{4}\sum_j (\overline{B}^j_{r,h} - \overline{B}^h_{r,j}) B^l_{j,k}\, z_l + \frac{i}{2}\overline{B}^{l,\bar{k}}_{r,h}\, \bar{z}_l\Big] + O(|z|^2), \tag{33}$$

laquelle nous donne l'expression normale asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion A''_ζ relative au repère normal $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)_J^{1,0}$. Nous calculons maintenant l'expression asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion A'_ζ à l'aide de l'expression précédente de la forme A''_ζ. La matrice inverse $H^{-1} = (h^{r,k})$ admet le developpement asymptotique suivant.

$$h^{r,k} = \delta_{r,k} - \sum_j (H^j_{r,k}\, z_j + \overline{H}^j_{k,r}\, \bar{z}_j) + O(|z|^2).$$

En utilisant l'expression de la forme A'_ζ obtenue dans la preuve du théorème 2.1 on déduit l'expression

$$(A'_\zeta)_{k,l} = \sum_r h^{r,k} \partial_J h_{l,r} + \sum_p \overline{U}^l_{k,p}\, dz_p + O(|z|^2),$$

avec $\partial_J h_{l,r} = \sum_p (\zeta_p . h_{l,r}) \zeta_p^*$, où

$$\zeta_p . h_{l,r} = H^p_{l,r} + \sum_h \Big[\Big(2H^{p,h}_{l,r} - \frac{i}{2}\sum_t \overline{H}^t_{r,l} B^h_{t,p}\Big) z_h + H^{p,\bar{h}}_{l,r}\, \bar{z}_h\Big] + O(|z|^2).$$

En utilisant l'expression du jet d'ordre un du repère $(\zeta_p^*)_p$ on a l'expression

$$\partial_J h_{l,r} = \sum_p \left\{ H^p_{l,r} + \sum_h \left[\left(2H^{p,h}_{l,r} - \frac{i}{2} \sum_t \overline{H}^t_{r,l} B^h_{t,p} \right) z_h + H^{p,\bar{h}}_{l,r}\, \bar{z}_h \right] \right\} dz_p$$

$$-\frac{i}{2} \sum_{p,t,h} H^t_{l,r} \overline{B}^h_{t,p}\, \bar{z}_h\, d\bar{z}_p + O(|z|^2).$$

On déduit alors l'expression asymptotique à l'ordre un de la forme de connexion de Chern $A_\zeta = A'_\zeta + A''_\zeta$.

$$A_\zeta = \partial_J h_{l,k} - \sum_{p,r,j} H^p_{l,r} (H^j_{r,k}\, z_j + \overline{H}^j_{k,r}\, \bar{z}_j)\, dz_p + \sum_p (\overline{U}^l_{k,p}\, dz_p - U^k_{l,p}\, d\bar{z}_p).$$

La matrice de la forme de connexion de l'extension $D^\omega_J : \mathcal{E}(T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(T^*_X \otimes_{\mathbb{R}} (T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))$ de la connexion de Chern au complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ par rapport au repère $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)_k$ est

$$A_{\zeta,\bar{\zeta}} = \begin{pmatrix} A_\zeta & 0_n \\ 0_n & \overline{A}_\zeta \end{pmatrix}.$$

On doit maintenant calculer la matrice A_z de la forme de connexion de l'extension de la connexion de Chern par rapport au repère $(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})_k$ du complexifié du fibré tangent $T_X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. La formule (31) nous donne l'expression asymptotique de la matrice g^{-1} du changement de repère $(\zeta_k, \bar{\zeta}_k)_k = (\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})_k \cdot g^{-1}$. Les expressions asymptotiques à l'ordre deux des matrices g et g^{-1} sont les suivantes

$$g = \begin{pmatrix} I_n & -\frac{i}{2}\overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ & \\ \frac{i}{2}\mathbf{jet}_2 B & I_n \end{pmatrix} + O(|z|^3), \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} T & \frac{i}{2}\overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ & \\ -\frac{i}{2}\mathbf{jet}_2 B & \overline{T} \end{pmatrix} + O(|z|^3),$$

où $T_{k,l} = \delta_{k,l} + \frac{1}{4} \sum_{p,h,j} \overline{B}^h_{k,j} B^p_{j,l}\, z_p \bar{z}_h$. La matrice de la forme de connexion qu'on cherche est donné par la formule $A_z = g^{-1}(dg + A_{\zeta,\bar{\zeta}}\, g)$. On a alors les expressions asymptotiques

$$A_z = g^{-1} \begin{pmatrix} A_\zeta & -\frac{i}{2} d\, \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ & \\ \frac{i}{2} d\, \mathbf{jet}_2 B & \overline{A}_\zeta \end{pmatrix} + O(|z|^3) = \begin{pmatrix} E & -\frac{i}{2} d\, \overline{\mathbf{jet}_2 B} \\ & \\ \frac{i}{2} d\, \mathbf{jet}_2 B & \overline{E} \end{pmatrix} + O(|z|^3),$$

ce qui nous donne l'expression voulue de la connexion de Chern. Le fait que le repère $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U)$ soit $\omega(x)$-orthonormé en x implique qu'on dispose de l'égalité (9) au point x. On a donc la formule

$$C_{m,l}(x) = \left(\bar{\partial}_J \partial_J h_{l,m} - \sum_r \bar{\partial}_J h_{r,m} \wedge \partial_J h_{l,r} + \partial_J (A''_\zeta)_{m,l} - \bar{\partial}_J \overline{(A''_\zeta)_{l,m}} \right)(x).$$

pour les coefficients de l'expression locale (20) du tenseur de courbure de Chern du fibré tangent. On a l'expression

$$\bar{\partial}_J \partial_J H = -\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} (\zeta_j\, .H)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|)$$

avec $\zeta_j\, .H = \sum_p (2H^{j,p}\, z_p + H^{j,\bar{p}}\, \bar{z}_p) + O(|z|^2)$. On déduit alors l'expression

$$\bar{\partial}_J \partial_J H = -\sum_{j,k} H^{j,\bar{k}}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

On a aussi l'expression

$$\partial_{_J} A''_\zeta = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} (A''_\zeta)^k \, dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

En rappelant l'expression normale asymptotique (33) de la forme de connexion A''_ζ par rapport au repère normal $(\zeta_k)_k$ on déduit l'expression

$$\partial_{_J} (A''_\zeta)_{m,l} = \frac{1}{4} \sum_{j,k,r} (\overline{B}^k_{m,r} - \overline{B}^r_{m,k}) B^j_{r,l} \, dz_j \wedge d\bar{z}_k + O(|z|).$$

En combinant les expressions ainsi obtenues on a l'expression (30) pour les coefficients $C^{j,k}_{m,l}(x)$ de la courbure au point x. $\square$

Le cas d'une métrique symplectique

Dans le cas symplectique certains des coefficients du lemme précédent se simplifient. On a le lemme suivant.

Lemme 5.0.2 *Soit (X, J) une variété presque-complexe admettant une métrique symplectique $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_{_J} T^*_X)(X)$. Pour tout point x on peut choisir des coordonnées presque-complexes $(z_1, ..., z_n)$ d'ordre $N \geq 2$ en x telles que*

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_l dz_l \wedge d\bar{z}_l + \frac{i}{2} \sum_{l,m,j,k} \Big[H^{j,k}_{l,m} \, z_j z_k + \overline{H}^{j,k}_{m,l} \, \bar{z}_j \bar{z}_k + \Big(H^{j,\bar{k}}_{l,m} + \frac{i}{4} \sum_r B^j_{r,l} \overline{B}^k_{r,m} \Big) z_j \bar{z}_k \Big] \, dz_l \wedge d\bar{z}_m$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{l,m} \mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z) \, dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{\mathbf{jet}_2 B_{l,m}(z)} \, d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^3).$$

Quelque soient les coordonnées presque-complexes $(z_1, ..., z_n)$ d'ordre $N \geq 2$ en x pour lesquelles la métrique ω s'écrit sous la forme précédente on a l'expression suivante pour le tenseur de courbure de Chern.

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J}) = \sum_{j,k,m,l} C^{j,k}_{m,l}(0) \, dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes dz_l \otimes_{_{J_0}} \frac{\partial}{\partial z_m} + O(|z|)$$

avec

$$C^{j,k}_{m,l}(0) = -H^{j,\bar{k}}_{l,m} + \frac{1}{4} \sum_r \Big[(\overline{B}^k_{m,r} - \overline{B}^r_{m,k}) B^j_{r,l} + (B^j_{l,r} - B^r_{l,j}) \overline{B}^k_{r,m} \Big].$$

Contrairement au cas Kählerien, (voir [B-D-I-P]) on ne peut pas éliminer les termes $H^{j,k}_{l,m} \, z_j z_k$ et $\overline{H}^{j,k}_{m,l} \, \bar{z}_j \bar{z}_k$. L'obstruction dérive des termes d'ordre un du jet de la torsion de la structure presque-complexe.

Preuve

Soient $(z_1, ..., z_n)$ des coordonnées presque-complexes d'ordre un au point x et $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)^{1,0}_{_J}$ un repère $\omega(x)$-orthonormé. En considérant l'expression du jet d'ordre un du repère $(\zeta^*_k)_k$ on obtient l'expression locale suivante de la métrique

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_l dz_l \wedge d\bar{z}_l + \frac{i}{2} \sum_{l,m,p} \Big(H^p_{l,m} \, z_p + \overline{H}^p_{m,l} \, \bar{z}_p \Big) \, dz_l \wedge d\bar{z}_m$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{l,m,p} B^p_{l,m} \, z_p \, dz_l \wedge dz_m - \frac{1}{4} \sum_{l,m} \overline{B}^p_{l,m,p} \, \bar{z}_p \, d\bar{z}_l \wedge d\bar{z}_m + O(|z|^2).$$

Le fait que la métrique ω soit symplectique implique l'égalité $H^p_{l,m} = H^l_{p,m}$. En effectuant le changement de variables

$$Z_m = z_m + \frac{1}{2}\sum_{p,l} H^p_{l,m}\, z_p z_l$$

on obtient, d'après le corollaire 2, des coordonnées presque-complexes $(Z_1, ..., Z_n)$ à l'ordre un en x avec les mêmes coefficients $B^{*,*}_{*,*}$ du jet d'ordre un de la structure presque-complexe. L'expression de la métrique par rapport aux nouvelles coordonnées est

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_l dZ_l \wedge d\bar{Z}_l - \frac{1}{4}\sum_{l,m,p} B^p_{l,m}\, Z_p\, dZ_l \wedge dZ_m - \frac{1}{4}\sum_{l,m} \overline{B}^p_{l,m,p}\, \bar{Z}_p\, d\bar{Z}_l \wedge d\bar{Z}_m + O(|Z|^2).$$

A partir des coordonnées ainsi obtenues on peut construire (d'après la preuve de la proposition 4.1) des coordonnées presque-complexes d'ordre $N \geq 2$ en x tout en conservant les coefficients $B^{*,*}_{*,*}$ du jet d'ordre un de J. En tenant compte de l'expression (32) du jet d'ordre deux du repère $(\zeta^*_k)_k$ par rapport aux coordonnées en question on déduit facilement que la métrique ω s'écrit sous la forme donné dans l'énonce du lemme. $\square$

6 Interprétation géométrique de la notion de courbure de Chern du fibré tangent d'une variété presque-complexe

Le lemme fondamental suivant est une version presque-complexe d'un lemme classique de la géométrie hermitienne complexe ([Dem]).

Lemme 6.0.3 *Soit (X, J) une variété presque-complexe et $\omega \in \mathcal{E}(\Lambda^{1,1}_J T^*_X)(X)$ une métrique hermitienne. Pour tout choix de coordonnées presque-complexes $(z_1, ..., z_n)$ d'ordre $N \geq 2$ en un point x telles que le repère normal $(\zeta_k + \bar{\zeta}_k)_k \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\zeta_k = (\partial/\partial z_k)^{1,0}_J$ soit $\omega(x)$-orthonormé on peut trouver un repère $(\xi_k + \bar{\xi}_k) \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\xi_k \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel la métrique ω s'écrit sous la forme*

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_l \xi^*_l \wedge \bar{\xi}^*_l + \frac{i}{2}\sum_{j,k,l,m} H^{j,\bar{k}}_{l,m}\, z_j \bar{z}_k\, \xi^*_l \wedge \bar{\xi}^*_m + O(|z|^3).$$

Quelque soit le choix du repère $(\rho_k)_k = (\xi_k + \bar{\xi}_k) \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$, $\xi_k \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U_x)$ presque-holomorphe spécial au point x pour lequel la métrique ω s'écrit sous la forme précédente on a les expressions suivantes pour le tenseur de courbure et la courbure de Chern au point x ;

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})_{|x} = -\sum_{j,k,l,m} H^{j,\bar{k}}_{l,m}\, \zeta^*_j \wedge \bar{\zeta}^*_k \otimes \xi^*_l \otimes_J \xi_m \tag{34}$$

$$\mathcal{C}^\omega_{X,J}(\mu \otimes \rho_k, \eta \otimes \rho_l)_{|x} = \bar{\partial}_J \partial_J\, h_\omega(\rho_k, \rho_l)(\mu^{1,0}, \eta^{0,1})_{|x}, \tag{35}$$

pour tout champs de vecteurs réels $\mu, \eta \in \mathcal{E}(T_X)(U_x)$ et tout indice k.

Le lemme nous montre que la courbure de Chern du fibré tangent au point x mesure l'obstruction à l'existence de repères locaux presque-holomorphes spéciaux et orthonormaux à l'ordre deux en x.

Preuve. Considérons l'expression locale de la métrique $\omega = \frac{i}{2}\sum_{l,m} h'_{l,m}\, \zeta^*_l \wedge \bar{\zeta}^*_m$ avec

$$h'_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_p \left(H^p_{l,m}\, z_p + \overline{H}^p_{m,l}\, \bar{z}_p\right) + \sum_{p,h}\left(H^{p,h}_{l,m}\, z_p z_h + \overline{H}^{p,h}_{m,l}\, \bar{z}_p \bar{z}_h + \tilde{H}^{p,\bar{h}}_{l,m}\, z_p \bar{z}_h\right) + O(|z|^3)$$

Considérons le changement de repère $\xi = \zeta \cdot g$ donné par la formule

$$\xi_l = \zeta_l - \sum_{m,j} \Big[H^j_{l,m}\, z_j + \sum_k \Big(G^{j,k}_{m,l}\, z_j z_k + G^{j,\bar{k}}_{m,l}\, z_j \bar{z}_k \Big) \Big] \zeta_m \in \mathcal{E}(T^{1,0}_{X,J})(U_x).$$

avec

$$G^{j,k}_{m,l} := H^{j,k}_{l,m} - \frac{1}{2} \sum_p \Big(H^j_{l,p} H^k_{p,m} + H^k_{l,p} H^j_{p,m} \Big) \quad \text{et} \quad G^{j,\bar{k}}_{m,l} := \frac{1}{4} \sum_r (\overline{B}^r_{m,k} - \overline{B}^k_{m,r}) B^j_{r,l}$$

Un calcul élémentaire un peu pénible montre que la métrique ω s'écrit par rapport à ce repère sous la forme $\omega = \frac{i}{2} \sum_{l,m} h_{l,m}\, \xi^*_l \wedge \bar{\xi}^*_m$ avec

$$h_{l,m} = \delta_{l,m} + \sum_{j,k} H^{j,\bar{k}}_{l,m}\, z_j \bar{z}_k + O(|z|^3).$$

Si A''_ξ désigne la forme de connexion relative au repère $(\xi_k)_k$ on a la formule de changement de matrice de connexion $A''_\xi = g^{-1}(\bar{\partial}_J g + A''_\zeta \cdot g)$. Le fait que $A''_\zeta(x) = 0$ et $\bar{\partial}_J g(x) = 0$ implique alors l'égalité $A''_\xi(x) = 0$. De plus au point x on a l'égalité

$$\partial_J A''_\xi(x) = \partial_J \bar{\partial}_J g(x) + \partial_J A''_\zeta(x).$$

Il est facile de vérifier que le choix de la matrice g est telle que $\partial_J A''_\xi(x) = 0$. On déduit alors d'après les formules 9 et 20 que la courbure de Chern s'écrit au point x sous la forme

$$\mathcal{C}_\omega(T_{X,J})(x) = - \sum_{m,l} \partial_J \bar{\partial}_J h_{l,m}(x) \otimes \xi^*_m \otimes_J \xi_l.$$

laquelle montre la validité de la formule (34). La formule (35) est une conséquence immédiate de l'identité (17). □

Références

[B-D-I-P] J. Bertin, J.-P. Demailly, L.Illusie, C. Peters. Introduction à la théorie de Hodge. Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, 4-111, publication de la SMF, nr3, 1996.

[Dem] Demailly,J.P. Complex analytic and differential geometry, available at : http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr

[Gri-Ha] Griffiths, P.A., Harris, J. (1978) Principles of algebraic geometry, Wiley, New-York

[Hör] Hörmander,L. (1966) An introduction to Complex Analysis in several variables, 3rd edition, North-Holand Math.Libr.,vol.7, Amsterdam,London (1990)

[Pal] Pali,N. (2004) Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs de type $(1,1)$ sur une variété presque-complexe. (En préparation)

[We] Webster,S.M. (1989) A new proof of the Newlander-Nirenberg theorem, Math.Zeit.201,303-316

Nefton Pali
Institut Fourier, UMR 5582, Université Joseph Fourier
BP 74, 38402 St-Martin-d'Hères cedex, France
E-mail : *nefton.pali@ujf-grenoble.fr*