Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II

Gaël RÉMOND

26 janvier 2004

Prépublication de l'Institut Fourier n° 634 (2004)
http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract. — We study the intersection of a subvariety X of an abelian variety A over $\bar{\mathbb{Q}}$ with the union of all the subgroups obtained as a sum of a given finite rank subgroup Γ and an algebraic subgroup of A of given dimension d. Our main result states that if we remove a suitable exceptional subset from X then the intersection is a set of bounded height. In some cases, this combines with the output of Part I to yield finiteness. In terms of boundedness of the height, we get an optimal statement for a curve X with $d = 2$. We also deal with the fattenings Γ_ε introduced by B. Poonen. The proof rests on a suitably uniform generalisation of the method of P. Vojta and on computations of intersection numbers of real cycles on A.

1 Introduction

Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ de dimension g munie d'une hauteur de Néron-Tate h. Lorsque Γ est un sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, ε un réel positif et r un entier avec $0 \leq r \leq g$ nous posons

$$\Gamma_{\varepsilon,r} = \bigcup_{\mathrm{codim} B \geq r} \Gamma_\varepsilon + B(\bar{\mathbb{Q}})$$

où l'union porte sur toutes les sous-variétés abéliennes de A vérifiant la condition de codimension et où

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{\varepsilon,g} = \{x + y \mid x \in \Gamma,\, y \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \text{ et } h(y) \leq \varepsilon\}.$$

L'objectif consiste ici à étudier l'intersection d'un sous-schéma fermé X de A avec les ensembles $\Gamma_{\varepsilon,r}$. Idéalement, nous aimerions donner des conditions aussi minimales que possible sur X et r pour assurer l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon,r}$ n'est pas dense dans X.

Remarquons immédiatement que ce problème contient comme cas particulier avec $r = g$ l'énoncé appelé « Mordell-Lang plus Bogomolov » par B. Poonen (voir [Po]). Là, nous disposons d'une solution complètement satisfaisante. Nous savons que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ n'est pas dense dans X pour $\varepsilon > 0$ assez petit dès que X n'est pas le translaté d'une sous-variété abélienne de A. Ceci peut se déduire des faits suivants, si Z_X désigne l'union des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles de A qui sont contenus dans X :

1. $Z_X = X$ si et seulement si le stabilisateur de X est infini,

Mots-Clefs : Variétés abéliennes, hauteurs, produit de Pontrjagin.
Classification : 11G10, 11G50, 14K12.

2. Z_X est fermé et
3. $(X \setminus Z_X)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon$ est fini.

Nous cherchons à imiter cette stratégie, autrement dit à identifier pour chaque entier r un ensemble exceptionnel idoine $Z_{X,r}$ de sorte que l'on puisse (en subdivisant la troisième étape) :

1. trouver une condition simple pour que $Z_{X,r} \neq X$;
2. montrer que $Z_{X,r}$ est fermé ;
3. montrer que l'ensemble des points de $(X \setminus Z_{X,r})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon,r}$ de hauteur bornée est fini ;
4. montrer que $(X \setminus Z_{X,r})(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon,r}$ est de hauteur bornée.

Disons d'emblée qu'un tel ensemble $Z_{X,r}$ reste mystérieux. Nous envisagerons plus bas deux propositions $Z^{(r)}_{X,\bar{\mathbb{Q}}} \subset Z^{(r)}_X$ entre lesquelles la bonne réponse doit se situer et, de plus, nous ne répondrons aux questions 1 et 2 que dans des cas très particuliers de sous-schémas X. Dans le premier volet de cet article (voir [R3]), nous avons examiné le troisième point pour $\varepsilon = 0$, tandis qu'ici nous nous intéressons à la quatrième étape.

Le résultat principal de [R3] montre que si r' est suffisamment grand par rapport à r alors les points de hauteur bornée de $(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z^{(r)}_{X,\Gamma}) \cap \Gamma_{0,r'}$ forment un ensemble fini. Nous rappelerons plus bas la définition de $Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ qui semble quasi-optimal si l'on peut prendre $r = r'$ (comparer avec la proposition 1.2 et le lemme 1.1 ci-dessous). Inconditionnellement, l'inégalité entre r et r' que nous obtenons entraîne $r' > r$ mais nous avons montré qu'une conjecture de S. David sur le problème de Lehmer abélien permettrait de prendre $r = r'$. Cette étape suit une stratégie inspirée de celle de E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier (voir [BMZ]) à base notamment de géométrie des nombres et tout à fait différente des méthodes du présent travail.

Dans ce qui suit, pour montrer que la hauteur est bornée, nous autorisons $\varepsilon > 0$ et il n'y a pas de décalage d'indices r et r'. En revanche, nous n'avons pas de raison de penser que l'ensemble $Z^{(r)}_X$ apparaissant soit optimal. Celui-ci semble difficile à contrôler en dehors de cas particuliers. Si X est une courbe, toutefois, le problème disparaît et nous obtenons un résultat optimal (dans le cadre de notre quatrième étape) qui généralise l'argument de [RV] (valable si A est la puissance d'une courbe elliptique). Nous présenterons également un résultat partiel pour les surfaces.

Nous donnons maintenant les définitions nécessaires pour énoncer le théorème principal.

Soit $Z_d(A)$ l'espace vectoriel réel engendré par les fermés irréductibles de A de dimension d modulo l'équivalence numérique. Un tel cycle $Z \in Z_d(A)$ est dit effectif s'il s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fermés irreductibles et numériquement effectif si $Z \cdot Y \geq 0$ pour tout cycle effectif Y de codimension d. Nous désignons par $Z^+_d(A)$ le cône des cycles numériquement effectifs de $Z_d(A)$. Pour faire apparaître la codimension, nous écrirons $Z^d(A) = Z_{n-d}(A)$ et $Z^d_+(A) = Z^+_{n-d}(A)$ de sorte que, par exemple, $Z^1(A) = \mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$.

Étant donné un élément $\mathcal{N}$ de $Z^1(A)$, nous définissons son rang comme le plus grand entier naturel r tel que $\mathcal{N}^{\cdot r} \neq 0$ (ce nombre s'appelle parfois la dimension de Kodaira numérique).

Définition 1.1 *Soient d et r des entiers avec $0 \leq d,r \leq g$.*

1. *Soient Y un élément effectif de $Z_d(A)$ et $\mathcal{N} \in Z^1_+(A)$. On dit que Y et $\mathcal{N}$ sont supertransverses si, pour tout couple $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2 \in Z^1_+(A)$ tel que $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$ et tout entier naturel a avec $\mathrm{rang}\,\mathcal{N}_1 - 1 \leq a \leq d$, on a*
$$\mathcal{N}^{\cdot a} \cdot \mathcal{N}_2^{\cdot d-a} \cdot Y > 0.$$
2. *Un élément effectif Y de $Z_d(A)$ est dit r-supertransverse si, pour tout $\mathcal{N} \in Z^1_+(A)$ vérifiant $\mathrm{rang}\,\mathcal{N} \geq r$, Y et $\mathcal{N}$ sont supertransverses.*

3. *Si X est un sous-schéma fermé intègre de A, on définit $Z_X^{(r)}$ comme l'union de tous les fermés irréductibles Y de X qui ne sont pas r-supertransverses.*

Ceci posé, notre résultat s'énonce aisément.

Théorème 1.1 *Pour tout sous-schéma fermé intègre X de A, tout entier r avec $0 \leq r \leq g$ et tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble*

$$(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap \Gamma_{\varepsilon,r}$$

est de hauteur bornée.

Il nous faut bien sûr revenir sur la définition 1.1, *a priori* peu naturelle. Pour la motiver et expliquer comment elle interviendra dans la démonstration, nous la rattachons à une notion plus simple et surtout plus clairement liée au problème de départ. Nous obtenons cette dernière en remplaçant partout dans la définition $Z_+^1(A)$ par $Z_+^1(A) \cap (\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q})$. Nous parlerons dans ce cas de $\mathbb{Q}$-supertransversalité, de cycle r-$\mathbb{Q}$-supertransverse et noterons $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)}$ l'ensemble exceptionnel correspondant. Cette variation apparaît plus satisfaisante car, d'une part, elle admet une reformulation géométrique simple en termes de sous-variétés abéliennes (voir lemme 7.2) et, surtout, nous pouvons montrer que l'ensemble $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)}$ est incontournable au sens suivant.

Proposition 1.2 *Étant donné X et r comme dans le théorème, si un fermé Z de X est tel que, pour tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de type fini, l'ensemble $(X \setminus Z)(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{0,r}$ est de hauteur bornée, alors $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)} \subset Z$.*

Une partie de la difficulté de la définition 1.1 (avec $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$) provient, comme dans [R3], du fait qu'une variété abélienne A n'admet pas en général de sous-variétés abéliennes de toutes dimensions. Ce problème disparaît pour un produit de courbes elliptiques, cas où nous disposons de versions simplifiées des définitions et d'une comparaison avec les ensembles exceptionnels $Z_{X,\Gamma}^{(r)}$ de [R3] (dont la définition sera rappelée dans la partie 7).

Lemme 1.1 *Supposons que A soit isogène à un produit de courbes elliptiques et que d et r soient des entiers avec $0 \leq d,r \leq g$.*

(1) Un cycle effectif Y de $Z_d(A)$ est r-supertransverse si et seulement si $\mathcal{N}^{\cdot d} \cdot Y > 0$ pour tout $\mathcal{N} \in Z_+^1(A)$ vérifiant $\mathrm{rang}\mathcal{N} \geq r-1$.

(2) Un fermé irréductible Y de A est r-$\mathbb{Q}$-supertransverse si et seulement si $\dim Y + B = \dim Y + \dim B$ pour toute sous-variété abélienne B de A vérifiant $\mathrm{codim} B \geq r-1$.

(3) Pour un sous-schéma fermé intègre X de A, nous avons $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)} = \bigcup_\Gamma Z_{X,\Gamma}^{(r)}$ où l'union porte sur tous les sous-groupes de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$.

Signalons que la première assertion ci-dessus vaut également si A est une variété abélienne à multiplications complexes. La troisième, quant à elle, permet de combiner le théorème 1.1 avec le résultat de [R3] et d'obtenir la finitude d'ensembles de la forme $(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap \Gamma_{0,r'}$.

Nous revenons maintenant au cas d'une variété abélienne quelconque et examinons la situation si $\dim X = 1$. Les problèmes d'ensembles exceptionnels disparaissant alors, le théorème 1.1 fournit alors un résultat optimal (généralisant celui de [RV]).

Théorème 1.3 *Si C est une courbe intègre de A qui n'est contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de A différente de A, alors, pour tout sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{\varepsilon,2}$ est de hauteur bornée.*

Comme précédemment, ceci se combine avec [R3] pour donner la finitude de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{0,r'}$ pour r' convenable (et égal à 2 sous la conjecture 1.1 de [R3]). Par ailleurs, ce résultat sur la hauteur raffine celui du lemme 2.3 de [R3] et permet d'obtenir, par un argument donné dans [RV], le résultat plus fin suivant.

Corollaire 1.1 *Si C est une courbe intègre sur A qui n'est contenue dans aucun sous-schéma en groupes de A distinct de A alors $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap (A_{\mathrm{tors}})_{0,2}$ est de hauteur bornée et, si A vérifie la conjecture 1.1 de [R3], fini.*

Signalons que $(A_{\mathrm{tors}})_{0,2}$ était noté $A^{[2]}$ dans [R3].

Nous terminons par un résultat beaucoup plus partiel pour une surface.

Proposition 1.4 *Soient A une variété abélienne de dimension $g \geq 3$ isogène à un produit de courbes elliptiques et r un entier avec $r \geq (g+3)/2$. Si X est une surface 3-supertransverse contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de A différente de A alors $Z_X^{(r)} = Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)}$ est fermé et différent de X. En particulier, sous la conjecture 1.1 de [R3], l'ensemble $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{0,r}$ n'est pas dense dans X.*

Remarquons qu'il n'est pas trop difficile de trouver une surface X 3-supertransverse : il suffit par exemple que X ne soit pas au bord du cône effectif de $Z_2(A)$; ainsi une intersection complète de diviseurs amples convient.

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème 1.1 à l'exception de la partie 7 qui établit les autres énoncés ci-dessus. Au cœur de cette démonstration, se trouve une inégalité de Vojta uniforme (voir partie 5) qui s'appuie sur le résultat de [R2]. Elle fournit une comparaison de hauteurs qui permet d'établir le théorème 1.1 (voir partie 6). Avant cela, pour pouvoir appliquer [R2], nous avons besoin, comme dans les autres incarnations de la méthode de Vojta, de minorer un certain nombre d'intersection. Sans entrer ici dans les détails (qui seront donnés partie 4, ce nombre fait intervenir un faisceau $\mathcal{N} \in \mathrm{NS}(A)$ et la minoration doit présenter une uniformité en $\mathcal{N}$. Il se trouve que cette uniformité est équivalente à une non-annulation sur $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$. Ainsi, au lieu de $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)}$ qui permet d'assurer la non-nullité sur $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q}$, nous voyons apparaître l'ensemble $Z_X^{(r)}$. Cette version forte de la non-annulation est établie dans la partie 3 à l'aide du produit de Pontrjagin sur les cycles de A et nous donnons les préliminaires nécessaires sur ceux-ci dans la partie 2, notamment en termes cohomologiques.

2 Cycles numériquement effectifs

Nous rassemblons dans cette partie divers résultats auxiliaires sur $Z_+^1(A)$ et $Z_1^+(A)$.

Nous commençons par remarquer que, sur une variété abélienne, un cycle effectif (de dimension quelconque) est toujours numériquement effectif : en effet, pour deux sous-schémas fermés irréductibles de A de dimensions complémentaires Y et Z, le nombre d'intersection $Y \cdot Z$ est positif car il s'interprète comme le degré du morphisme $Y \times Z \to A$ induit par l'addition (qui est nul lorsque le morphisme n'est pas génériquement fini). De manière équivalente, cela s'écrit $Y \star Z = (Y \cdot Z)A$ en termes du produit de Pontrjagin (voir partie suivante).

En particulier, sachant que $Z_+^1(A)$ est l'adhérence du cône ample, nous en déduisons qu'il coïncide également avec l'adhérence du cône effectif de $Z^1(A)$. Nous aurons besoin dans la suite de la notion suivante.

Définition 2.1 *Un élément $Z \in Z_d^+(A)$ est dit indécomposable s'il est non nul et si pour toute écriture $Z = Z_1 + Z_2$ avec $Z_1, Z_2 \in Z_d^+(A)$ on a $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}Z$.*

Nous nous intéressons aux indécomposables de $Z^1_+(A)$ et $Z_1^+(A)$. Pour les décrire, rappelons que l'on peut trouver un isomorphisme (voir [Mu, pages 208–210]) de la forme

$$\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{R}\simeq\prod_{i=1}^m\mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{K}_i)$$

où $\mathbb{K}_i$ est l'un des trois corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (quaternions) et où $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ désigne les matrices $r\times r$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ stables par transconjugaison $M\mapsto {}^t\bar{M}$ (c'est-à-dire symétriques pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et hermitiennes si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Dans cette décomposition, $Z^1_+(A)$, adhérence du cône ample, correspond aux m-uplets de matrices dont toutes les valeurs propres sont positives (voir [Mu, page 210]). Il est alors clair qu'un tel élément est indécomposable si et seulement s'il admet une seule valeur propre non nulle autrement dit s'il est de la forme

$$(0,\ldots,0,x{}^t\bar{x},0,\ldots,0)$$

pour un élément non nul $x\in\mathbb{K}_i^{r_i}$ (vu comme vecteur colonne). Par dualité, nous pouvons également choisir un isomorphisme

$$Z_1(A)\simeq\prod_{i=1}^m\mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{K}_i)\ ;$$

si le précédent est donné, nous fixons celui-là en imposant que si $C\in Z_1(A)$ correspond à $(M_i)_{1\leq i\leq m}$ et $\mathcal{N}\in Z^1(A)$ à $(N_i)_{1\leq i\leq m}$ alors

$$C\cdot\mathcal{N}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\mathrm{Tr}(M_iN_i+N_iM_i).$$

Maintenant, en vertu de ce qui précède ($Z^1_+(A)$ étant l'adhérence du cône effectif), C est un élément de $Z_1^+(A)$ si et seulement si

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M_ix{}^t\bar{x}+x{}^t\bar{x}M_i)\geq 0$$

pour tout i, $1\leq i\leq m$, et $x\in\mathbb{K}_i^{r_i}$. On vérifie facilement que ceci s'écrit $\mathrm{Tr}({}^t\bar{x}M_ix)\geq 0$ et donc si $M_i={}^t\bar{U}DU$ avec D diagonale et U inversible, $U^{-1}={}^t\bar{U}$ on obtient

$$\mathrm{Tr}({}^t\bar{x}M_ix)=\mathrm{Tr}({}^t(\overline{Ux})D(Ux))=\sum_{j=1}^{r_i}d_j|(Ux)_j|^2\geq 0.$$

Ceci est vérifié si toutes les valeurs propres de M_i (les d_j) sont positives. Nous avons donc la même description pour $Z_1^+(A)$ que pour $Z^1_+(A)$. Elle permet d'établir les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1 *Si $C\in Z_1^+(A)$ est indécomposable, tout élément non nul $\mathcal{N}\in Z^1_+(A)$ s'écrit $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$ avec $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2\in Z^1_+(A)$, $\mathcal{N}_1$ indécomposable et $C\cdot\mathcal{N}_2=0$.*

DÉMONSTRATION : Il s'agit de vérifier qu'étant donné $x\in\mathbb{K}^r$ toute matrice $M\in\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ positive et non nulle peut s'écrire $M=y{}^t\bar{y}+M'$ avec $y\in\mathbb{K}^r\setminus\{0\}$ et $M'\in\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ positive telle que ${}^t\bar{x}M'x=0$. Ceci est tout à fait classique (au moins si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si ${}^t\bar{x}Mx\neq 0$, par un changement de base approprié, on peut supposer que x est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^r$. On choisit alors y tel que les premières ligne et colonne de M et de $y{}^t\bar{y}$ coïncident. La matrice $M'=M-y{}^t\bar{y}$ est positive car si $z\in\mathbb{K}^r$ il existe $w\in\mathbb{K}^r$ ne différant de z que par la première coordonnée tel que ${}^t\bar{y}w=0$ et donc ${}^t\bar{z}M'z={}^t\bar{w}M'w={}^t\bar{w}Mw\geq 0$. Si jamais ${}^t\bar{x}Mx = 0$, il existe au moins un vecteur x' auquel le raisonnement précédent s'applique et le couple (y,M') obtenu convient aussi pour x. □

Ce lemme implique que tout élément de $Z^1_+(A)$ est somme d'indécomposables. Ce fait peut aussi s'obtenir plus directement à l'aide des propriétés des cônes de $\mathbb{R}^n$. La même chose vaut bien sûr pour $Z_1^+(A)$.

Lemme 2.2 *Le cône $Z_1^+(A)$ est l'adhérence de l'ensemble des éléments de la forme $\mathcal{N}^{\cdot g-1}$ où $\mathcal{N} \in \mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q}$ est ample. En particulier, $Z_1^+(A)$ coïncide avec l'adhérence du cône effectif de $Z_1(A)$.*

Démonstration : Nous nous basons sur la formule (III) de [Mu, page 209] que nous écrivons pour $\mathcal{N} \in Z^1(A)$ associé à $(N_1,\dots,N_m)$ comme ci-dessus

$$\mathcal{N}^{\cdot g} = g!\chi(\mathcal{N}) = c\prod_{i=1}^{m} \det{}_i(N_i)^{\alpha_i}$$

où c est une constante, $\det_i$ est le déterminant si $\mathbb{K}_i = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la « Haupt Norm » si $\mathbb{K}_i = \mathbb{H}$ (la racine carrée de la norme réduite sur $\mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{H})$) et les α_i sont des entiers (notés $a_i/2$, b_i et c_i par Mumford). Remarquons que si t est une indéterminée et N,N' des éléments de $\mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{K}_i)$ avec N inversible nous avons en ne conservant que les termes de degré au plus 1

$$\det{}_i(N+tN') = \det{}_i(N)\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(N^{-1}N' + N'N^{-1})t + \cdots\right)$$

(pour le cas $\mathbb{K}_i = \mathbb{H}$ écrire la norme réduite comme $\det\circ\rho$ où $\rho\colon \mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}_{2r_i}(\mathbb{C})$ découle de $\mathbb{H} \hookrightarrow M_2(\mathbb{C})$ et appliquer la formule sur $\mathbb{C}$). Maintenant si $\mathcal{N}$ est ample et $\mathcal{N}'$ quelconque alors

$$\begin{aligned}
(\mathcal{N}+t\mathcal{N}')^{\cdot g} &= c\prod_{i=1}^{m}\det{}_i(N_i+tN_i')^{\alpha_i}\\
&= c\prod_{i=1}^{m}\det{}_i(N_i)^{\alpha_i}\left(1+\frac{\alpha_i}{2}\mathrm{Tr}(N_i^{-1}N_i' + N_i'N_i^{-1})t+\cdots\right)\\
&= \mathcal{N}^{\cdot g}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathrm{Tr}(N_i^{-1}N_i' + N_i'N_i^{-1})t+\cdots\right)
\end{aligned}$$

et donc par identification du coefficient de t nous avons

$$\mathcal{N}^{\cdot g-1}\cdot\mathcal{N}' = \frac{1}{2}g^{-1}\mathcal{N}^{\cdot g}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Tr}(\alpha_i N_i^{-1}N_i' + N_i'\alpha_i N_i^{-1}).$$

Ceci signifie que, par l'isomorphisme fixé plus haut, le cycle $\mathcal{N}^{\cdot g-1} \in Z_1(A)$ correspond à

$$(g^{-1}\mathcal{N}^{\cdot g}\alpha_i N_i^{-1})_{1\le i\le m} \in \prod_{i=1}^{m}\mathcal{H}_{r_i}(\mathbb{K}_i).$$

Les éléments ainsi obtenus forment une partie dense de l'ensemble des m-uplets de matrices positives (identifié à $Z_1^+(A)$) donc le lemme est établi. □

Nous terminons cette partie par une description cohomologique de $Z^1_+(A)$ et $Z_1^+(A)$. Nous utiliserons constamment le fait que sur une variété abélienne l'équivalence numérique et l'équivalence homologique coïncident et donc que l'application canonique $Z^d(A) \to H^2(A,\mathbb{C})$ est injective pour tout d (voir [Li]).

Nous ferons usage des propriétés de base de la cohomologie d'un tore complexe que nous rappelons maintenant (et qui sont prouvées par exemple pages 8 à 20 de

[Mu]). Ayant choisi un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$, nous écrivons $A \times \mathbb{C} \simeq V/\Lambda$ pour un espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$ de dimension g et Λ un réseau de V.

En premier lieu, pour tout entier n avec $0 \leq n \leq 2g$ nous avons un isomorphisme

$$H^n(A,\mathbb{C}) \simeq \bigwedge^n H^1(A,\mathbb{C})$$

(à travers lequel l'application cycle transporte le produit d'intersection sur le produit extérieur). De plus $H^1(A,\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \simeq T \oplus \bar{T}$ où $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ et $\bar{T} = \mathrm{Hom}_{1/2}(V,\mathbb{C})$ (formes semi-linéaires sur V). Ainsi nous avons

$$H^2(A,\mathbb{C}) \simeq \bigwedge^2 T \oplus (T \otimes \bar{T}) \oplus \bigwedge^2 \bar{T}.$$

Dans cette décomposition, $T \otimes \bar{T}$ s'identifie avec l'espace vectoriel des formes sesquilinéaires $V \times V \to \mathbb{C}$. On sait alors que l'application canonique $\mathrm{NS}(A) \to H^2(A,\mathbb{C})$ se factorise à travers le sous-espace des formes hermitiennes $\mathrm{Herm}(V) \subset T \otimes \bar{T} \subset H^2(A,\mathbb{C})$, associant à un faisceau inversible sa forme de Riemann. Nous en déduisons une injection $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R} \to \mathrm{Herm}(V)$.

Si $\mathcal{N} \in Z^1(A)$, son image dans $H^2(A,\mathbb{C})$ s'écrit donc

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{m} \pm t_i \wedge \bar{t}_i$$

où $(t_1, \ldots, t_m)$ est une famille libre de T et $t \mapsto \bar{t}$ est l'application semi-linéaire canonique $T \to \bar{T}$ donnée par $\bar{t}(v) = \overline{t(v)}$ pour $v \in V$. Ici l'entier m est à la fois le rang de $\mathcal{N}$ et celui de la forme hermitienne associée.

Pour énoncer notre résultat, notons encore $\bar{V}$ l'espace vectoriel déduit de V en faisant agir $\mathbb{C}$ par conjugaison et $v \mapsto \bar{v}$ l'application semi-linéaire canonique. Alors $\bigwedge^{g-1} T \otimes \bigwedge^{g-1} \bar{T} \subset H^{2g-1}(A,\mathbb{C})$ s'identifie à $V \otimes \bar{V}$ par

$$(s \wedge \bar{t}) \wedge (u \wedge \bar{v}) = s(u)\overline{t(v)}A \in H^{2g}(A,\mathbb{C})$$

pour $s,t \in T$ et $u,v \in V$.

Lemme 2.3 *Si $\mathcal{N} \in Z^1_+(A)$ et $C \in Z_1^+(A)$ alors il existe $v_1, \ldots, v_m \in V$ et $t_1, \ldots, t_n \in T$ de sorte que*

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n} t_i \wedge \bar{t}_i \qquad et \qquad C = \sum_{i=1}^{n} v_i \wedge \bar{v}_i.$$

DÉMONSTRATION : Pour $Z^1_+(A)$, cela résulte simplement, par adhérence, du fait que la forme de Riemann d'un faisceau ample est définie positive (voir le théorème de Lefschetz, [Mu, pages 29–30]). Quant à $Z_1^+(A)$, grâce au lemme 2.2, il est obtenu comme adhérence des éléments de la forme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \wedge \bar{t}_i\right)^{\wedge g-1} = \sum_{i_1,\ldots,i_{g-1}} (t_{i_1} \wedge \cdots \wedge t_{i_{g-1}}) \wedge (\bar{t}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{t}_{i_{g-1}})$$

et la conclusion s'ensuit. □

Finalement, l'introduction du tore complexe V/Λ permet d'équiper $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ d'une notion de rang. En effet, cet espace s'identifie à l'ensemble des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires $\varphi: V \to V$ tels que $\varphi(\Lambda) \subset \mathbb{R}\Lambda$ (voir [Mu, page 238]) et donc hérite de $\mathrm{End}(V)$ une application rang. Bien entendu, si $\varphi \in \mathrm{End}(A)$, le rang de φ coïncide avec la dimension de la sous-variété abélienne $\mathrm{Im}\varphi$. Le lien avec le rang sur $Z^1(A)$ est donné par le

Lemme 2.4 *Si $\mathcal{L} \in \mathrm{NS}(A)$ est ample et $\varphi \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ alors* $\mathrm{rang}\varphi^*\mathcal{L} = \mathrm{rang}\varphi$.

DÉMONSTRATION : Notons $H: V \times V \to \mathbb{C}$ la forme de Riemann de $\mathcal{L}$. La forme hermitienne associée à $\varphi^*\mathcal{L}$ est donc donnée par $H'(v,v') = H(\varphi(v),\varphi(v'))$. Comme H est définie positive, H' est clairement positive de rang égal à rangφ. Puisque les rangs de H' et de $\varphi^*\mathcal{L}$ coïncident, le lemme est acquis. $\square$

3 Produit de Pontrjagin

Nous utilisons dans cette partie le produit de Pontrjagin. Il est défini sur les cycles par $Y \star Z = \mathrm{add}_*(Y \times Z)$, est compatible à l'équivalence numérique et s'étend sur la cohomologie en une application $\mathbb{C}$-bilinéaire

$$\star: H^i(A,\mathbb{C}) \times H^j(A,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{i+j-2g}(A,\mathbb{C})$$

que l'on peut décrire de la manière suivante (voir [Li, pages 372–3]). Soit $e_1,\dots,e_{2g}$ une base de $H^1(A,\mathbb{C})$ telle que $e_1 \wedge \dots \wedge e_{2g} = 1$ (nous notons 1 la classe du cycle A dans $H^{2g}(A,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$) et pour $I \subset \{1,\dots,2g\}$ notons $e_I = \bigwedge_{i\in I} e_i$ (dans l'ordre croissant). Alors, si I et J sont deux parties de $\{1,\dots,2g\}$,

$$e_I \star e_J = 0 \qquad \text{si} \quad I \cup J \neq \{1,\dots,2g\}$$

$$e_I \star e_J = \pm e_{I\cap J} \qquad \text{sinon}$$

le signe étant fixé par la formule

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_t) \star (x_s \wedge \dots \wedge x_{2g}) = x_s \wedge \dots \wedge x_t$$

valable pour toute famille de $H^1(A,\mathbb{C})$ avec $x_1 \wedge \dots \wedge x_{2g} = 1$ et tous indices $1 \leq s \leq t \leq 2g$.

En particulier, du fait de l'identification $H^{2g}(A,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ choisie et de l'isomorphisme canonique $H^0(A,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, nous pouvons écrire pour $\alpha \in H^i(A,\mathbb{C})$ et $\beta \in H^{2g-i}(A,\mathbb{C})$ l'égalité $\alpha\star\beta = \alpha\wedge\beta$. Notons également la relation $\alpha\star\beta = (-1)^{ij}\beta\star\alpha$ pour tous $\alpha \in H^i(A,\mathbb{C})$ et $\beta \in H^j(A,\mathbb{C})$.

Dans la suite, nous ne considérerons pratiquement que des produits de Pontrjagin avec un cycle (réel) de dimension 1 dont le calcul est donné par le résultat suivant.

Lemme 3.1 *Si $C \in H^{2g-2}(A,\mathbb{C})$ et $y_1,\dots,y_s \in H^1(A,\mathbb{C})$ alors*

$$C \star (y_1 \wedge \dots \wedge y_s) = \sum_{1\leq i<j\leq s} (-1)^{i+j+1}(C \wedge y_i \wedge y_j) \bigwedge_{k\neq i,j} y_k.$$

DÉMONSTRATION : Examinons ce que devient le membre de droite lorsque l'on échange y_ℓ et $y_{\ell+1}$ (pour $1 \leq \ell \leq s-1$). Si $\{i,j\}$ et $\{\ell,\ell+1\}$ sont disjoints, cela change seulement le signe de $\bigwedge_{k\neq i,j} y_k$; si ces ensembles sont égaux, seul change le signe de $C \wedge y_i \wedge y_j$. Pour $i < j = \ell$, le terme correspondant de la somme devient

$$(-1)^{i+\ell+1}(C \wedge y_i \wedge y_{\ell+1}) \bigwedge_{k\neq i,\ell+1} y_k$$

qui est l'opposé du terme d'indice $(i,\ell+1)$. Ainsi chacun des termes d'indices (i,ℓ) et $(i,\ell+1)$ est transformé en l'opposé de l'autre ; de manière entièrement analogue, on constate la même action sur les indices (ℓ,j) et $(\ell+1,j)$ pour $j > \ell+1$. Finalement, le membre de droite est multiplié par -1.

De la sorte, chacun des deux membres de l'égalité à établir est une forme linéaire en C et une forme s-linéaire alternée en $y_1,\dots,y_s$. On en déduit, par multilinéarité, que, ayant fixé une base $e_1,\dots,e_{2g}$ de $H^1(A,\mathbb{C})$ comme ci-dessus avec $e_1\wedge\dots\wedge e_{2g} =$

1, on peut supposer $C = e_I$ et $y_i = e_{\tau(i)}$ pour $I \subset \{1,\dots,2g\}$ et $\tau\colon\{1,\dots,s\} \to \{1,\dots,2g\}$. Quitte à faire des permutations (et éventuellement $e_1 = \pm e_1$), nous imposons même que I soit le complémentaire de $\{1,2\}$ et τ la translation par 0, 1 ou 2. Comme $C \wedge e_i \wedge e_j$ est nul sauf si $\{i,j\} = \{1,2\}$, nous devons vérifier respectivement

$$\begin{aligned} C \star e_1 \wedge \cdots \wedge e_s &= e_3 \wedge \cdots \wedge e_s \\ C \star e_2 \wedge \cdots \wedge e_{s+1} &= 0 \\ C \star e_3 \wedge \cdots \wedge e_{s+2} &= 0 \end{aligned}$$

et ceci résulte bien des formules pour $e_I \star e_J$ (le signe dans la première égalité peut s'obtenir par $C \star (e_1 \wedge \cdots \wedge e_s) = (-1)^{(2g-2)s}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_s) \star C = e_3 \wedge \cdots \wedge e_s$). □

Dans l'énoncé suivant, nous notons $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N}'$ voire $\mathcal{N}\mathcal{N}'$ plutôt que $\mathcal{N} \wedge \mathcal{N}'$ si $\mathcal{N} \in H^i(A,\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}' \in H^j(A,\mathbb{C})$ avec i et j pairs.

Corollaire 3.1 *Si $C \in H^{2g-2}(A,\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_t \in H^2(A,\mathbb{C})$ alors*

$$C \star \left(\prod_{i=1}^{t} \mathcal{N}_i\right) = \sum_{1 \le i < j \le t} (C \star (\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j)) \cdot \prod_{k \ne i,j} \mathcal{N}_k \; - (t-2) \sum_{i=1}^{t} (C \cdot \mathcal{N}_i) \prod_{j \ne i} \mathcal{N}_j.$$

DÉMONSTRATION : La formule cherchée étant clairement multilinéaire, nous nous contentons de la montrer lorsque $\mathcal{N}_i = y_{2i-1} \wedge y_{2i}$ pour des éléments $y_1,\dots,y_{2t}$ de $H^1(A,\mathbb{C})$. Dans la formule du lemme, avec $s = 2t$, nous distinguons selon que le couple (i,j) est ou non de la forme $(2k-1,2k)$ et nous obtenons

$$C \star \left(\prod_{i=1}^{t} \mathcal{N}_i\right) = \sum_{i=1}^{t} (C \cdot \mathcal{N}_i) \prod_{j \ne i} \mathcal{N}_j$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le t} \sum_{m=0}^{1} \sum_{n=0}^{1} (-1)^{m+n+1} (C \wedge y_{2i-m} \wedge y_{2j-n}) y_{2i+m-1} \wedge y_{2j+n-1} \cdot \prod_{k \ne i,j} \mathcal{N}_k.$$

En particulier, nous avons (correspondant à $t = 2$)

$$\begin{aligned} C \star (\mathcal{N}_i \cdot \mathcal{N}_j) = \sum_{m=0}^{1} \sum_{n=0}^{1} (-1)^{m+n+1} (C \wedge y_{2i-m} \wedge y_{2j-n}) y_{2i+m-1} \wedge y_{2j+n-1} \\ + (C \cdot \mathcal{N}_i)\mathcal{N}_j + (C \cdot \mathcal{N}_j)\mathcal{N}_i \end{aligned}$$

et le corollaire découle immédiatement de ces deux expressions. □

Nous pouvons maintenant donner les calculs de produits de Pontrjagin que nous utiliserons.

Lemme 3.2 *(1) Si $C \in Z_1^+(A)$ et $\mathcal{N} \in Z_+^1(A)$ vérifient $C \cdot \mathcal{N} = 0$ alors pour tout $\mathcal{N}' \in H^2(A,\mathbb{C})$ et tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ nous avons*

$$C \star (\mathcal{N}^a \cdot \mathcal{N}'^b) = (C \cdot \mathcal{N}'^b) \cdot \mathcal{N}^a.$$

(2) Si $C \in Z_1^+(A)$ et si $\mathcal{N}$ est un indécomposable de $Z_+^1(A)$ de rang r alors pour tout entier $t \in \mathbb{N}$ nous avons

$$C \star \mathcal{N}^t = \frac{t(r+1-t)}{r} (C \cdot \mathcal{N}) \mathcal{N}^{t-1}.$$

DÉMONSTRATION : En vue du corollaire 3.1, nous commençons par traiter les cas $a=b=1$ et $t=2$. Pour montrer la formule $C\star(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}')=(C\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}$ nous pouvons supposer $\mathcal{N}'=y\wedge z$ (où $y,z\in H^1(A,\mathbb{C})$) par linéarité. Par ailleurs C et $\mathcal{N}$ s'écrivent

$$C=\sum_{i=1}^{m} v_i\wedge\bar{v}_i \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}=\sum_{i=1}^{n} t_i\wedge\bar{t}_i$$

(avec $v_i\in V$ et $t_i\in T$) et $C\cdot\mathcal{N}=0$ se traduit par $t_i(v_j)=0$ pour tous i,j. Par conséquent il vient $C\wedge t_i=0$ et $C\wedge\bar{t}_i=0$ (dans $H^{2g-1}(A,\mathbb{C})$) pour $1\leq i\leq n$. Ainsi par le lemme 3.1 nous avons

$$\begin{aligned}
C\star(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}') &= \sum_{i=1}^{n} C\star(t_i\wedge\bar{t}_i\wedge y\wedge z)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big[(C\wedge t_i\wedge\bar{t}_i)y\wedge z-(C\wedge t_i\wedge y)\bar{t}_i\wedge z+(C\wedge t_i\wedge z)\bar{t}_i\wedge y\\
&\quad +(C\wedge\bar{t}_i\wedge y)t_i\wedge z-(C\wedge\bar{t}_i\wedge z)t_i\wedge y+(C\wedge y\wedge z)t_i\wedge\bar{t}_i\big]\\
&= \sum_{i=1}^{n}(C\wedge y\wedge z)t_i\wedge\bar{t}_i\\
&= (C\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}.
\end{aligned}$$

Nous allons à présent calculer $C\star\mathcal{N}^2$ lorsque $\mathcal{N}$ est indécomposable. Remarquons d'abord que $C\star\mathcal{N}^2\in Z_1^+(A)$ par exemple parce que, pour tout C' effectif, $(C\star\mathcal{N}^2)\cdot C'=(C\star C')\star\mathcal{N}^2=(C\star C')\cdot\mathcal{N}^2\geq 0$ puisque $C\star C'$ est dans l'adhérence du cône effectif de $Z_2(A)$ (car, par le lemme 2.2, c'est le cas de C dans $Z_1(A)$). Maintenant si nous écrivons

$$\mathcal{N}=\sum_{i=1}^{n} t_i\wedge\bar{t}_i$$

et remarquons $C\wedge t_i\wedge t_j=C\wedge\bar{t}_i\wedge\bar{t}_j=0$ pour tous i,j, le calcul précédent devient

$$\begin{aligned}
C\star\mathcal{N}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C\star(t_i\wedge\bar{t}_i\wedge t_j\wedge\bar{t}_j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big[(C\wedge t_i\wedge\bar{t}_i)t_j\wedge\bar{t}_j-(C\wedge t_i\wedge\bar{t}_j)t_j\wedge\bar{t}_i\\
&\quad -(C\wedge t_j\wedge\bar{t}_i)t_i\wedge\bar{t}_j+(C\wedge t_j\wedge\bar{t}_j)t_i\wedge\bar{t}_i\big]\\
&= 2(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C\wedge t_i\wedge\bar{t}_j)t_j\wedge\bar{t}_i.
\end{aligned}$$

Écrivons ceci $C\star\mathcal{N}^2=2(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}-\mathcal{N}''$. Voyons que $\mathcal{N}''\in Z^1_+(A)$: en effet si $C=\sum_{i=1}^m v_i\wedge\bar{v}_i$ et $v\in V$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}''\cdot v\wedge\bar{v} &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} t_i(v_k)\overline{t_j(v_k)}t_j(v)\overline{t_i(v)}\\
&= 2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(v_k)\overline{t_i(v)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{t_j(v_k)}t_j(v)\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{n} t_i(v_k)\overline{t_i(v)}\right|^2 \;\geq\; 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{N}$ est indécomposable et $2(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N} = C\star\mathcal{N}^2 + \mathcal{N}''$, il vient $C\star\mathcal{N}^2 = \alpha(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+$. A présent, avec le corollaire 3.1, nous avons pour tout $t\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} C\star\mathcal{N}^t &= \sum_{1\le i<j\le t}\alpha(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}^{t-1} - (t-2)\sum_{i=1}^{t}(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}^{t-1} \\ &= \left(\alpha\frac{t(t-1)}{2} - t(t-2)\right)(C\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}^{t-1}. \end{aligned}$$

Si $C\cdot\mathcal{N}=0$, le résultat est acquis. Sinon cette formule avec $t=r+1$ montre (puisque $C\star\mathcal{N}^{r+1}$ est nul mais non $\mathcal{N}^r$) que $\alpha r/2-(r-1)$ doit être nul soit $\alpha = 2(r-1)/r$ et comme $(r-1)(t-1)-(t-2)r = r+1-t$ la démonstration de la seconde assertion est terminée.

Pour la première, le même corollaire 3.1 donne d'une part (puisque $C\star\mathcal{N}^2=0$)

$$\begin{aligned} C\star(\mathcal{N}^a\cdot\mathcal{N}'^b) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=a+1}^{a+b}(C\star\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}^{a-1}\mathcal{N}'^{b-1} \\ &\quad + \sum_{a+1\le i<j\le a+b}(C\star\mathcal{N}'^2)\mathcal{N}^a\mathcal{N}'^{b-2} \\ &\quad - (a+b-2)\sum_{i=a+1}^{a+b}(C\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}^a\mathcal{N}'^{b-1} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$C\star\mathcal{N}'^b = \sum_{1\le i<j\le b}(C\star\mathcal{N}'^2)\mathcal{N}'^{b-2} - (b-2)\sum_{i=1}^{b}(C\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}'^{b-1}.$$

En combinant à l'aide de $C\star(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}') = (C\cdot\mathcal{N}')\mathcal{N}$ on obtient la formule voulue. □

L'intérêt de l'introduction du produit de Pontrjagin (et le lien avec le reste de l'article) réside dans le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Si Y et $\mathcal{N}$ sont supertransverses alors pour tout $C\in Z_1^+(A)$ vérifiant $C\cdot\mathcal{N}>0$ on a :*

$$(C\star\mathcal{N}^{\cdot\,\dim Y+1})\cdot Y > 0.$$

DÉMONSTRATION : Par linéarité, nous pouvons supposer que C est indécomposable. Grâce au lemme 2.1, nous écrivons $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$ avec $\mathcal{N}_1$ indécomposable et $C\cdot\mathcal{N}_2=0$. Alors avec le lemme 3.2 nous calculons ($d=\dim Y$)

$$\begin{aligned} C\star\mathcal{N}^{d+1} &= \sum_{i=0}^{d+1}\binom{d+1}{i}C\star(\mathcal{N}_1^i\mathcal{N}_2^{d+1-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{d+1}\binom{d+1}{i}(C\star\mathcal{N}_1^i)\mathcal{N}_2^{d+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{d+1}\binom{d+1}{i}\frac{i(r_1+1-i)}{r_1}(C\cdot\mathcal{N}_1)\mathcal{N}_1^{i-1}\mathcal{N}_2^{d+1-i} \end{aligned}$$

où r_1 désigne le rang de $\mathcal{N}_1$. Comme l'intersection avec Y de chacun des termes est positive et que par hypothèse $C\cdot\mathcal{N}_1>0$, il suffit de montrer qu'il existe i avec $0\le i\le d+1$ tel que

$$i(r_1+1-i)\mathcal{N}_1^{i-1}\mathcal{N}_2^{d+1-i}\cdot Y > 0.$$

Maintenant $(r_1+1-i)\mathcal{N}_1^{i-1}$ est nul si $i \geq r_1+1$. Donc le résultat souhaité est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{\min(d+1,r_1)} \mathcal{N}_1^{i-1}\mathcal{N}_2^{d+1-i}\cdot Y > 0$$

ou même si l'on veut, en notant $a=\min(d,r_1-1)$,

$$\sum_{i=1}^{a+1}\binom{a}{i-1}\mathcal{N}_1^{i-1}\mathcal{N}_2^{d+1-i}\cdot Y > 0$$

et ceci s'écrit exactement $\mathcal{N}^a\mathcal{N}_2^{d-a}\cdot Y>0$. Si $r_1 \leq d+1$ cette inégalité fait partie de la définition de supertransverse pour la décomposition $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$. Si $r_1 \geq d+1$, on regarde $\mathcal{N}=0+\mathcal{N}$ et l'on trouve $\mathcal{N}^d\cdot Y>0$. □

Remarque : en fait la proposition donne une condition nécessaire et suffisante de supertransversalité mais nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

Nous notons à présent $\alpha_m\colon A^m \to A^{m-1}$ le morphisme donné sur les points par

$$\alpha_m(x_1,\ldots,x_m)=(x_2-x_1,x_3-x_1,\ldots,x_m-x_1).$$

Corollaire 3.2 *Si $Y_1,\ldots,Y_m$ sont des sous-schémas fermés intègres de A avec $m > \dim Y_1$ et si $\mathcal{N}\in Z^1_+(A)$ est supertransverse à chacun des Y_i alors*

$$\left(\alpha_m^*\bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=1}^m \dim Y_i}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_m > 0.$$

Démonstration : Notons $v=\dim Y_1$. Le nombre à minorer est supérieur à

$$\delta=\left(\alpha_m^*\bigotimes_{i=1}^{v} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=1}^{v+1}\dim Y_i}\cdot\prod_{i=v+2}^{m}(\alpha_m^*p_i^*\mathcal{N})^{\cdot\dim Y_i}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_m.$$

Puisque

$$\left(\alpha_m^*\bigotimes_{i=1}^{v} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=1}^{v+1}\dim Y_i}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_m = Z\times Y_{v+2}\times\cdots\times Y_m$$

où Z est le 0-cycle de $Y_1\times\cdots\times Y_{v+1}$ égal à

$$\left(\alpha_{v+1}^*\bigotimes_{i=1}^{v} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=1}^{v+1}\dim Y_i}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_{v+1},$$

nous avons

$$\delta=\deg Z\prod_{i=v+2}^{m}\mathcal{N}^{\cdot\dim Y_i}\cdot Y_i.$$

Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur u, $1\leq u\leq v+1$ que

$$\gamma_u=\left(\alpha_u^*\bigotimes_{i=1}^{u-1} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=2}^{u}(1+\dim Y_i)}\cdot(p_1^*\mathcal{N})^{\cdot v-u+1}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_u > 0.$$

Le cas $u=1$ soit $\mathcal{N}^{\cdot v}\cdot Y_1>0$ est vrai par transversalité de Y_1 et $\mathcal{N}$. Soit à présent u avec $1\leq u\leq v$. Supposons $\gamma_u>0$ et montrons $\gamma_{u+1}>0$. Notons W sur $Y_1\times\cdots\times Y_u$ le cycle (effectif) de dimension 1

$$W=\left(\alpha_u^*\bigotimes_{i=1}^{u-1} p_i^*\mathcal{N}\right)^{\cdot\sum_{i=2}^{u}(1+\dim Y_i)}\cdot(p_1^*\mathcal{N})^{\cdot v-u}\cdot Y_1\times\cdots\times Y_u.$$

Par hypothèse de récurrence, $p_1^*\mathcal{N} \cdot W > 0$. D'autre part

$$\gamma_{u+1} \geq (\alpha_{u+1}^* p_u^* \mathcal{N})^{\cdot \dim Y_{u+1}+1} \cdot W \times Y_{u+1}.$$

En écrivant $p_u \circ \alpha_{u+1} = \mathrm{diff} \circ p_{1,u+1}$ (si $\mathrm{diff}\colon A \times A \to A$ est la différence) et, pour alléger, $w = \dim Y_{u+1} + 1$, cette dernière quantité vaut

$$\begin{aligned}(\mathrm{diff}^*\mathcal{N})^{\cdot w} \cdot (p_{1,u+1})_*(W \times Y_{u+1}) &= (\mathrm{diff}^*\mathcal{N})^{\cdot w} \cdot ([-1]^*C \times Y_{u+1}) \\ &= \mathcal{N}^{\cdot w} \cdot (C \star Y_{u+1})\end{aligned}$$

où $C = [-1]^*(p_1)_*W$ est numériquement effectif. Finalement

$$\mathcal{N}^{\cdot w} \cdot (C \star Y_{u+1}) = \mathcal{N}^{\cdot w} \star Y_{u+1} \star C = (\mathcal{N}^{\cdot w} \star C) \cdot Y_{u+1} > 0$$

d'après la proposition puisque $p_1^*\mathcal{N} \cdot W = \mathcal{N} \cdot C > 0$. Nous avons donc bien montré par récurrence que $\gamma_{v+1} > 0$. Or $\deg Z = \gamma_{v+1}$ et $\mathcal{N}^{\cdot \dim Y_i} \cdot Y_i > 0$ pour $i > v+1$ donc $\delta > 0$ et ceci termine la démonstration. □

4 Minoration d'un nombre d'intersection

Le but de cette partie est de transformer le résultat du corollaire 3.2, c'est-à-dire une non-nullité, en une minoration (voir proposition 4.3). Il s'agira essentiellement d'appliquer le résultat de [R4] mais nous avons auparavant besoin de considérer un sous-ensemble de $\mathrm{End}(A)$ formé des éléments que nous nommons *projecteurs normalisés*. Cette notion interviendra aussi dans la suite de la démonstration. Nous la décrivons maintenant. L'idée générale consiste à remplacer une sous-variété abélienne B (comme dans la définition de $\Gamma_{\varepsilon,r}$) par un élément φ de $\mathrm{End}(A)$ tel que $B = \mathrm{Ker}^0(\varphi)$ et ceci laisse une certaine latitude pour choisir φ (nous notons systématiquement G^0 la composante neutre d'un schéma en groupes G sur $\mathbb{Q}$).

Tout d'abord, nous fixons une norme sur l'espace $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ que nous utiliserons dans toute la suite. Par commodité, nous imposons $\|\varphi\|^2 \in \mathbb{N}$ si $\varphi \in \mathrm{End}(A)$. Nous faisons un tel choix pour toutes les variétés abéliennes.

Si $a \geq 1$ est un entier, c un réel et $\mathcal{B}$ une famille de sous-variétés abéliennes de A, nous dirons qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ est un $(\mathcal{B},a,c)$-projecteur si

$$\mathrm{Im}\varphi \in \mathcal{B}, \qquad \varphi \circ \varphi = a\varphi \qquad \text{et} \qquad \|\varphi\| \leq ca.$$

Notons que $\varphi \circ \varphi = a\varphi$ entraîne $\mathrm{Ker}\varphi + \mathrm{Im}\varphi = A$ et $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}[a]_{\mathrm{Im}\varphi}$ (les points de a-torsion de $\mathrm{Im}\varphi$).

Proposition 4.1 *Il existe une famille finie $\mathcal{B}$ de sous-variétés abéliennes de A et un réel c_0 tels que pour toute sous-variété abélienne B de A il existe $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un $(\mathcal{B},a,c_0)$-projecteur φ tel que $B = \mathrm{Ker}^0\varphi$.*

DÉMONSTRATION : Nous supposons dans un premier temps que A est un produit de variétés abéliennes simples. Écrivons $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ où les A_i sont simples et deux à deux non isogènes. Définissons $\mathcal{B}$ comme l'ensemble de toutes les sous-variétés abéliennes produits (de $n_1 + \cdots + n_m$ facteurs, tous égaux soit à A_i soit à 0). Lorsque B est une sous-variété abélienne quelconque de A, le quotient A/B est isogène à $A' = \prod_{i=1}^m A_i^{n'_i}$ pour certains entiers $0 \leq n'_i \leq n_i$. Nous pouvons donc écrire B comme la composante neutre du noyau d'un certain morphisme $\psi\colon A \to A'$. Celui-ci est un produit de $\psi_i\colon A_i^{n_i} \to A_i^{n'_i}$ et ψ_i est représenté par une matrice $M_i \in \mathrm{Mat}_{n'_i,n_i}(\mathrm{End}(A_i))$. La propriété $B = \mathrm{Ker}^0\psi$ se conserve si l'on multiplie à gauche une ligne par un élément non nul de $\mathrm{End}(A_i)$ ou si on lui ajoute une combinaison linéaire à gauche sur $\mathrm{End}(A_i)$ des autres lignes.

Nous pouvons alors appliquer une méthode de Gauss sur $\mathrm{End}(A_i) \otimes \mathbb{Q}$ en choisissant à chaque étape comme pivot un élément de norme maximale sur la ligne considérée. Nous nous servons des pivots pour faire apparaître des zéros dans leurs colonnes. Finalement, nous multiplions chaque ligne par un élément idoine de sorte que d'une part M_i soit à coefficients dans $\mathrm{End}(A_i)$ et d'autre part tous les pivots soient égaux à un même entier $a \geq 1$ (que nous choisissons de plus indépendant de i).

Ceci fait, il existe donc une matrice carrée d'ordre n'_i extraite de M_i égale à aI et tous les coefficients de M_i sont de norme majorée par $c_i a$. Le caractère explicite du procédé permet de borner facilement c_i : par exemple si $c'_i > 0$ est un réel tel que ${c'_i}^{-1}\|\chi\|\,\|\chi'\| \leq \|\chi \circ \chi'\| \leq c'_i\|\chi\|\,\|\chi'\|$ pour $\chi,\chi' \in \mathrm{End}(A_i)$ alors $c_i = n'_i {c'_i}^5$ convient. Nous créons maintenant une matrice N_i carrée d'ordre n_i en positionnant les lignes de M_i de sorte que les pivots a soient sur la diagonale de N_i et en complétant par $n_i - n'_i$ lignes nulles. De la sorte N_i représente un morphisme $\varphi_i \colon A_i^{n_i} \to A_i^{n_i}$ tel que $\varphi_i \circ \varphi_i = a\varphi_i$. Il est alors clair que le produit $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ des φ_i répond à la question pour un certain réel c_0 aisément calculable à partir des c_i et d'une comparaison entre la norme choisie sur $\mathrm{End}(A)$ et celle induite par les normes sur les $\mathrm{End}(A_i)$. Ainsi l'énoncé est établi lorsque A est un produit de variétés abéliennes simples.

Pour A quelconque, nous fixons une isogénie $f\colon A \to A'$ où A' est du type précédent. Nous disposons donc de $\mathcal{B}'$ et c'_0 associés à A'. Définissons alors $\mathcal{B}$ comme l'ensemble des $f^{-1}(B')^0$ où $B' \in \mathcal{B}'$. Si maintenant B est une sous-variété abélienne de A, alors $f(B)$ en est une de A' et donc il existe $a' \geq 1$ et un $(\mathcal{B}',a',c'_0)$-projecteur $\varphi' \in \mathrm{End}(A')$ tel que $\mathrm{Ker}^0\varphi' = f(B)$. En particulier, $f(B) + \mathrm{Im}\varphi' = A'$ et $f(B) \cap \mathrm{Im}\varphi'$ est fini. Par suite, $B + f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0 = A$ et $B \cap f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0$ est fini. Prenons pour a un multiple de a' tel que $B \cap f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0 \subset \mathrm{Ker}[a]$. Nous pouvons alors définir $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ par la formule

$$\varphi(b_1 + b_2) = ab_2$$

si $b_1 \in B$ et $b_2 \in f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0$, qui est non ambiguë par le choix de a. Bien sûr, nous avons $\varphi \circ \varphi = a\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi = f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0 \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, la construction montre que $f \circ \varphi = (a/a')\varphi' \circ f$ (ces deux morphismes coïncident sur B et sur $f^{-1}(\mathrm{Im}\varphi')^0$). Comme f induit un isomorphisme $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{End}(A') \otimes \mathbb{Q}$, la norme de φ est majorée par un multiple de $\|(a/a')\varphi'\| \leq c'_0 a$. □

La propriété de ces projecteurs que nous utilisons dans cette partie est donnée par l'énoncé suivant.

Proposition 4.2 *Pour toute sous-variété abélienne B de A et tout réel c, il existe un sous-espace vectoriel E_B de $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$, une partie bornée K_B de E_B et $\varphi_B \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ tels que*

1. *si φ est un $(\{B\},a,c)$-projecteur alors $a^{-1}\varphi - \varphi_B \in K_B$;*
2. *si $\psi \in E_B \otimes \mathbb{R}$ alors $\mathrm{rang}(\psi + \varphi_B) = \dim B$.*

DÉMONSTRATION : Nous choisissons une sous-variété abélienne B' de A vérifiant $B + B' = A$ et $B \cap B'$ fini. Si a' est un entier ≥ 1 tel que $B \cap B' \subset \mathrm{Ker}[a']$, nous pouvons définir un endomorphisme φ' de A comme dans la démonstration précédente par $\varphi'(b + b') = a'b$ où $b \in B$ et $b' \in B'$. Nous posons alors $\varphi_B = (a')^{-1}\varphi' \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Si maintenant E' est le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathrm{End}(A)$ des éléments ψ tels que $\mathrm{Im}\psi \subset B \subset \mathrm{Ker}\psi$, nous écrivons $E_B = E' \otimes \mathbb{Q}$. Finalement soit K_B la partie de E_B formée des éléments de norme au plus $c + \|\varphi_B\|$. Avec ces définitions, la première assertion est claire : l'endomorphisme $a'\varphi - a\varphi'$ est un élément de E' et $\|a'\varphi - a\varphi'\| \leq a'(ca) + a(a'\|\varphi_B\|)$ donc $a^{-1}\varphi - \varphi_B \in K_B$. Pour la seconde, il suffit de constater que $\psi + \varphi_B$ comme endomorphisme de V est un projecteur d'image le sous-espace vectoriel complexe associé à B. □

Nous fixons $\mathcal{B}$ et c_0 comme dans la proposition 4.1 et nous dirons que φ est un projecteur normalisé s'il existe $a \geq 1$ tel que φ est un $(\mathcal{B},a,c_0)$-projecteur (noter que a est déterminé par φ sauf si $\varphi = 0$; nous l'appellerons le paramètre de φ). Nous fixons également pour chaque B dans $\mathcal{B}$ un triplet (E_B,K_B,φ_B) dont l'existence est assurée par la proposition 4.2 avec $c = c_0$.

Pour préparer la démonstration du résultat principal de cette partie, nous introduisons encore un certain nombre de notations qui joueront un rôle central dans la partie suivante. En premier lieu, parallèlement au morphisme α considéré dans le corollaire 3.2, nous définissons $\alpha_m^+ \colon A^m \to A^{m-1}$ par la formule

$$\alpha_m^+(x_1,\ldots,x_m) = (x_i + x_1)_{2 \leq i \leq m}.$$

Lorsque $\mathcal{L}'$ est un faisceau inversible symétrique sur A nous avons

$$\alpha_m^* \left(\bigotimes_{k=1}^{m-1} p_k^* \mathcal{L}' \right) \otimes \alpha_m^{+*} \left(\bigotimes_{k=1}^{m-1} p_k^* \mathcal{L}' \right) = p_1^* \mathcal{L}'^{\otimes 2(m-1)} \otimes \bigotimes_{k=2}^{m} p_i^* \mathcal{L}'^{\otimes 2}.$$

Pour unifier l'écriture, nous posons $\eta_1 = 2(m-1)$ et $\eta_k = 2$ si $k \geq 2$.

Si $s \in \mathbb{Z}^m$, nous abrégeons $[s] = [s_1] \times \cdots \times [s_m] \colon A^m \to A^m$ et pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ nous définissons un morphisme de A^m vers A^{m-1} par

$$\beta_{s,\varphi} = \alpha_m \circ [s] \circ \varphi^m = \alpha_m \circ \varphi^m \circ [s] = \varphi^{m-1} \circ \alpha_m \circ [s]$$

ainsi que, de manière analogue, $\beta_{s,\varphi}^+ = \varphi^{m-1} \circ \alpha_m^+ \circ [s]$.

Nous choisissons une base quelconque de $\mathrm{End}(A)$ sur $\mathbb{Z}$, disons $\tau_1,\ldots,\tau_d$. Dès que $\mathcal{L}$ est un faisceau ample, il existe un entier q_1 tel que, pour $1 \leq i \leq d$, le faisceau $\mathcal{Q}_i = \mathcal{L}^{\otimes q_1} \otimes \tau_i^* \mathcal{L}^{\otimes -1}$ est engendré par ses sections globales. Choisissons encore un entier q_2 associé à la base des τ_i tel que pour tout $b = (b_1,\ldots,b_d) \in \mathbb{Z}^d$ nous ayons

$$||b||^2 = \sum_{j=1}^{d} b_j^2 \leq q_2 \left\| \sum_{j=1}^{d} b_j \tau_j \right\|^2 .$$

Nous associons maintenant à $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ une famille d'endomorphismes de la manière suivante. Si φ s'écrit dans la base fixée de $\mathrm{End}(A)$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{d} b_j \tau_j,$$

alors la famille $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{2^d}$ avec $\varphi_1 = \varphi$ correspond à toutes les écritures de la forme

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{d} \pm b_j \tau_j.$$

L'intérêt de cette famille découle de l'isomorphisme suivant, pour un faisceau inversible symétrique $\mathcal{L}$ sur A, que l'on déduit sans peine du théorème du cube

$$\bigotimes_{i=1}^{2^d} \varphi_i^* \mathcal{L} \simeq \bigotimes_{j=1}^{d} (\tau_j^* \mathcal{L})^{\otimes 2^d b_j^2}.$$

En particulier, si $\mathcal{L}$ est ample et si q_1 lui est attaché comme ci-dessus, il existe un faisceau $\mathcal{N}_\varphi$ engendré par ses sections globales tel que

$$\varphi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{N}_\varphi \simeq \mathcal{L}^{\otimes 2^d q_1 q_2 ||\varphi||^2}.$$

La forme précise de $\mathcal{N}_\varphi$ interviendra dans la partie suivante mais son existence suffit ici pour établir le résultat suivant.

Proposition 4.3 *Étant donné une variété abélienne polarisée* $(A,\mathcal{L})$ *t un entier* $m \geq 1$*, il existe deux entiers* $\theta \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *de sorte que si* $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ *est un projecteur normalisé et si* $Y_1,\ldots,Y_m$ *sont des sous-schémas fermés ntègres de* A $(\mathrm{rang}\varphi)$*-supertransverses avec* $m > \dim Y_1$ *alors*

$$\left(\alpha_m^* \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\varphi^*\mathcal{L}\right)^{\cdot d'} \cdot Y_1 \times \cdots \times Y_m \geq \theta^{-1}\left(\prod_{i=1}^m \deg Y_i\right)^{-\omega} \|\varphi\|^{2d'}$$

où $d' = \sum_{i=1}^m \dim Y_i$.

Démonstration : Nous notons $P_Y(\varphi)$ le membre de gauche de l'inégalité à démontrer. Celui-ci a un sens pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{R}$ et, si nous identifions $\mathrm{End}(A)$ avec $\mathbb{Z}^d$ grâce à la base fixée, P_Y est un polynôme à coefficients entiers de degré $2d'$. De plus, $P_Y(\varphi)$ est majoré par

$$\left(\left(\alpha_m^* \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\varphi^*\mathcal{L}\right) \otimes \left(\alpha_m^{+\,*} \bigotimes_{i=1}^{m-1} p_i^*\varphi^*\mathcal{L}\right)\right)^{\cdot d'} \cdot Y_1 \times \cdots \times Y_m = \prod_{i=1}^m \eta_i \deg_{\varphi^*\mathcal{L}} Y_i.$$

L'existence de $\mathcal{N}_\varphi$ montre que $\deg_{\varphi^*\mathcal{L}} Y_i$ est inférieur à $2^d q_1 q_2 \|\varphi\|^{2\dim Y_i} \deg Y_i$. Donc

$$0 \leq P_Y(\varphi) \leq 2^m(m-1)(2^d q_1 q_2)^m \|\varphi\|^{2d'} \prod_{i=1}^m \deg Y_i.$$

Par suite, le maximum $|P_Y|$ des valeurs absolues des coefficients de P_Y est majoré par un multiple de $\prod_{i=1}^m \deg Y_i$.

Soit à présent φ comme dans l'énoncé ; notons B son image et a son paramètre. Si $\varphi' \in \mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{R}$ et si $\mathrm{rang}\varphi' \geq \mathrm{rang}\varphi = \dim B$ alors, puisque $\mathrm{rang}\varphi'^*\mathcal{L} = \mathrm{rang}\varphi'$ nous savons grâce au corollaire 3.2 que $P_Y(\varphi') > 0$. En particulier, si nous utilisons la proposition 4.2 pour B, nous avons $P_Y(\psi + \varphi_B) > 0$ pour tout $\psi \in E_B \otimes \mathbb{R}$.

Nous fixons un isomorphisme $E_B \cap \mathrm{End}(A) \simeq \mathbb{Z}^{\dim E_B}$ et $N \geq 1$ tel que $N\varphi_B \in \mathrm{End}(A)$. Ainsi $R = N^{2d'}P_Y(\psi + \varphi_B)$ devient un polynôme (en les coordonnées de ψ) à coefficients entiers de valeurs absolues majorées par un multiple de $|P_Y|$ et R ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{\dim E_B}$. D'après le résultat principal de [R4], il existe donc $\theta' > 0$ et $\omega \in \mathbb{N}$ telles que si $\psi \in K_B$ alors

$$P_Y(\psi + \varphi_B) \geq \theta'|P_Y|^{-\omega}.$$

Finalement $a^{-1}\varphi - \varphi_B \in K_B$ donc $P_Y(a^{-1}\varphi) \geq \theta'|P_Y|^{-\omega}$ et, comme P_Y est homogène de degré $2d'$ et $a \geq c_0^{-1}\|\varphi\|$ nous avons

$$P_Y(\varphi) \geq \theta' c_0^{-2d'}|P_Y|^{-\omega}\|\varphi\|^{2d'}.$$

Ceci donne le résultat puisque $|P_Y|$ est majoré par un multiple du produit des $\deg Y_i$. Le réel θ obtenu ainsi dépend *a priori* de B mais l'énoncé vaut en le remplaçant par le maximum sur la partie finie $\mathcal{B}$. □

5 Inégalité de Vojta uniforme

Dans cette partie, nous déduisons d'une inégalité de nombres d'intersection une inégalité de hauteurs. Ce procédé s'appuie sur le résultat de [R2]. La démarche généralise celle de [RV], la mise en œuvre se compliquant de la présence d'un $\mathrm{End}(A)$ arbitraire.

Proposition 5.1 *Étant donné une variété abélienne A munie d'une forme quadratique $|\cdot|^2$ de Néron-Tate et un sous-schéma fermé intègre X de A, il existe des constantes réelles $c_1,c_2,c_3>0$ telles que si $x_1,\dots,x_m$ sont des points de $X(\bar{\mathbb{Q}})\setminus Z_X^{(r)}$ (où $m=\dim X+1$ et $0\le r\le \dim A$) avec $|x_i|\ge c_3$ et $\varphi\in\mathrm{End}(A)$ un projecteur normalisé de rang au moins r alors pour $s=(s_1,\dots,s_m)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^m$ avec $s_i\ge c_2 s_{i+1}$ on a*

$$\sum_{i=2}^{m}|s_i\varphi(x_i)-s_1\varphi(x_1)|^2\ge\frac{\|\varphi\|^2}{c_1}\sum_{i=1}^{m}s_i^2|x_i|^2.$$

L'énoncé étant clairement invariant par multiplication de la hauteur de Néron-Tate par une constante, nous pouvons supposer que celle-ci provient d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ très ample et donnant naissance à un plongement j de A dans $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ tel que $\Gamma(\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}},\mathcal{O}(\ell))\to\Gamma(A,\mathcal{L}^{\otimes\ell})$ est surjectif pour tout $\ell\ge0$. Nous notons $\sigma_0,\dots,\sigma_N$ les sections globales de $\mathcal{L}$ images des coordonnées $X_0,\dots,X_N$ de $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

Nous utiliserons la base $\tau_1,\dots,\tau_d$ de $\mathrm{End}(A)$ fixée plus haut ainsi que les entiers q_1,q_2 et les faisceaux $\mathcal{Q}_1,\dots,\mathcal{Q}_d$ associés (pour le faisceau $\mathcal{L}$ ci-dessus). Nous fixons aussi pour chaque indice j avec $1\le j\le d$ une famille $\rho_1^{(j)},\dots,\rho_{\nu_j}^{(j)}$ (où $\nu_j\ge1$) de sections globales de $\mathcal{Q}_j$ qui soit génératrice de ce faisceau.

Pour appliquer le théorème principal de [R2], nous suivons de près les notations de cet article en indiquant point par point à quels objets nous les faisons correspondre dans le présent contexte.

Le schéma en question est bien sûr X plongé dans $\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$ *via* ι composée de $X\hookrightarrow A$ et $j\colon A\hookrightarrow\mathbb{P}^N_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Nous utiliserons ensuite $m=\dim X+1$, $t_1=t_2=2^{d+2}q_1q_2m$ et $M=(N+1)^{(m-1)2^{d+1}+md+1}\prod_{j=1}^{d}\nu_j^m$ tandis que ω et θ sont donnés par la proposition 4.3. Nous indiquerons comment choisir δ plus bas.

Nous posons encore $a=(\|\varphi\|^2s_1^2,\dots,\|\varphi\|^2s_m^2)$ puis $\mathcal{X}=X^m$ et $\pi=\mathrm{id}$ (en particulier $U=\mathcal{X}$). Le faisceau crucial $\mathcal{M}$ est défini comme

$$\beta_{s,\varphi}{}^*\left(\bigotimes_{i=1}^{m-1}p_i^*\mathcal{L}\right).$$

Remarquons que nos choix donnent

$$\mathcal{N}_a=\bigotimes_{i=1}^{m}p_i^*\mathcal{L}^{\otimes\|\varphi\|^2s_i^2}=[s]^*\bigotimes_{i=1}^{m}p_i^*\mathcal{L}^{\otimes\|\varphi\|^2}.$$

Le faisceau $\mathcal{P}$ sera égal à $\mathcal{N}_a^{\otimes t_1}$ et $\iota'\colon X^m\hookrightarrow\mathbb{P}^{N'}_{\bar{\mathbb{Q}}}$ est définie à partir de j grâce à un morphisme de Segre-Veronese (de poids $t_1\|\varphi\|^2s_i^2$). De cette façon, l'identité $j_1\colon\mathcal{P}\to\mathcal{N}_a^{\otimes t_1}$ est effectivement décrite par des monômes.

Nous définissons j_2 comme la multiplication par une section globale de $\mathcal{M}$ de la forme $\beta_{s,\varphi}{}^*(p_1^*\sigma_{\ell_1}\otimes\cdots\otimes p_{m-1}^*\sigma_{\ell_{m-1}})$ (avec $1\le\ell_i\le N$) qui ne s'annule pas en x.

Pour décrire Σ, nous utilisons la famille $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{2^d}$ associée à φ dans la partie précédente et posons

$$\tilde{\mathcal{M}}=\bigotimes_{i=2}^{2^d}\beta_{s,\varphi_i}{}^*\left(\bigotimes_{k=1}^{m-1}p_k^*\mathcal{L}\right)\otimes\bigotimes_{i=1}^{2^d}\beta^+_{s,\varphi_i}{}^*\left(\bigotimes_{k=1}^{m-1}p_k^*\mathcal{L}\right).$$

Nous allons calculer $\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}$ à l'aide de $\tilde{\mathcal{M}}$ pour définir Σ. Dans un premier temps, grâce à l'isomorphisme liant α_m et α_m^+, le faisceau $\mathcal{M}\otimes\tilde{\mathcal{M}}$ est isomorphe à

$$[s]^*\bigotimes_{k=1}^{m} p_k^*\left(\bigotimes_{i=1}^{2^d}\varphi_i^*\mathcal{L}\right)^{\otimes\eta_k}$$

et donc à

$$\bigotimes_{k=1}^{m} p_k^*\bigotimes_{i=1}^{d}(\tau_j^*\mathcal{L})^{\otimes 2^d\eta_k b_j^2 s_k^2}.$$

Nous formons alors $\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}$, que nous pouvons écrire, en utilisant les isomorphismes $\mathcal{L}^{\otimes q_1}\simeq\tau_j^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{Q}_j$ $(1\leq j\leq d)$ sur un nombre idoine de facteurs, comme

$$\tilde{\mathcal{M}}\otimes\bigotimes_{k=1}^{m} p_k^*\left(\bigotimes_{j=1}^{d}\left((\tau_j^*\mathcal{L})^{\otimes 2^d\eta_k b_j^2 s_k^2}\otimes\mathcal{Q}_j^{\otimes 2^{d+1}\eta_k b_j^2 s_k^2}\right)\otimes\mathcal{L}^{\otimes 2^d q_1(4mq_2\|\varphi\|^2-2\eta_k\|b\|^2)s_k^2}\right).$$

Maintenant, Σ est la famille de toutes les sections globales de ce faisceau obtenues en remplaçant dans cette dernière écriture chaque occurence de $\mathcal{L}$ (y compris dans la définition de $\tilde{\mathcal{M}}$) par l'une des sections $\sigma_0,\ldots,\sigma_N$ et chacun des $\mathcal{Q}_j$ par une section $\rho_\ell^{(j)}$ où $1\leq\ell\leq\nu_j$. Il est entendu que $\mathcal{L}$ apparaît $(m-1)(2^{d+1}-1)$ fois dans $\tilde{\mathcal{M}}$ puis md fois précédé d'un τ_j^* et m fois seul tandis que chaque $\mathcal{Q}_j$ apparaît m fois. De cette façon, Σ engendre bien le faisceau $\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}$ et son cardinal vaut M comme prévu.

Il reste à expliquer pourquoi ce choix permet d'affirmer que $j_2(\Sigma)$ fournit une famille de polynômes (de multidegré $t_2 a$) en les sections $p_k^*\sigma_\ell$ de hauteur au plus $\delta|a|$. Nous nous basons sur la proposition 5.2 de [R1] qui nous assure que, pour tout entier naturel u et tout couple (ℓ,ℓ') avec $0\leq\ell,\ell'\leq N$, l'image de $[u]^*\sigma_\ell\otimes\sigma_{\ell'}^{\otimes u^2}$ dans l'isomorphisme $[u]^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{\otimes u^2}\simeq\mathcal{L}^{\otimes 2u^2}$ est un polynôme de hauteur au plus un multiple de u^2 (par rapport à [R1] nous majorons $f(u)$ par u^2).

Puisque j_2 est également définie à partir des sections $\sigma_0,\ldots,\sigma_N$ il s'agit de suivre l'image d'une section de $\mathcal{M}\otimes(\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1})$ à travers les isomorphismes utilisés plus haut jusqu'à $\mathcal{N}_a^{\otimes t_1}$. Dans un premier temps, nous constatons que l'isomorphisme

$$\bigotimes_{i=1}^{2^d}\varphi_i^*\mathcal{L}\simeq\bigotimes_{j=1}^{d}[b_j]^*(\tau_j^*\mathcal{L})^{\otimes 2^d}$$

peut s'écrire à l'aide de polynômes indépendants de φ (qui expriment un produit de $\varphi_i^*\sigma_\ell$ en termes des $[b_j]^*\tau_j^*\sigma_\ell$) et il en va de même de l'isomorphisme mettant en jeu α_m et α_m^+. Par suite, nous pouvons décrire par des polynômes indépendants de φ et s l'isomorphisme

$$\mathcal{M}\otimes\tilde{\mathcal{M}}\simeq\bigotimes_{k=1}^{m}p_k^*\bigotimes_{j=1}^{d}\tau_j^*([b_js_k]^*\mathcal{L})^{\otimes 2^d\eta_k}.$$

Nous sommes alors à même d'utiliser le résultat sus-cité pour $u=b_js_k$ grâce aux termes supplémentaires en $\tau_j^*\mathcal{L}$ que nous avons fait apparaître dans $\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1}$. De cette façon, nous avons transformé *via* des polynômes de hauteur au plus un multiple de $\sum_{j,k}(b_js_k)^2\leq q_2|a|$ le faisceau $\mathcal{M}\otimes(\mathcal{P}\otimes\mathcal{M}^{\otimes -1})$ en

$$\bigotimes_{k=1}^{m}p_k^*\left(\bigotimes_{j=1}^{d}(\tau_j^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{Q}_j)^{\otimes 2^{d+1}\eta_k b_j^2 s_k^2}\otimes\mathcal{L}^{\otimes 2^d q_1(4mq_2\|\varphi\|^2-2\eta_k\|b\|^2)s_k^2}\right).$$

Il reste seulement à utiliser l'isomorphisme $\tau_j^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{Q}_j\simeq\mathcal{L}^{\otimes q_1}$ dans lequel les $\tau_j^*\sigma_\ell\otimes\rho_{\ell'}^{(j)}$ s'envoient sur des polynômes fixés et nous avons ainsi montré l'existence du δ contrôlant la hauteur de $j_2(\Sigma)$ (notons que pour combiner les différentes étapes nous employons $h(PP')\leq h(P)+h(P')+\log\mathrm{nc}(P)$ pour deux polynômes P et P' où $\mathrm{nc}(P)$ est le nombre de coefficients non nuls de P).

Nous en venons donc au théorème principal de [R2]. Remarquons que par définition de j_2 nous avons $x\in U'$. Par ailleurs, l'hypothèse que pour tout sous-produit Y de X^m contenant x

$$\mathcal{M}^{\cdot\dim Y}\cdot Y\geq\theta^{-1}\prod_{i=1}^{m}(\deg Y_i)^{-\omega}a_i^{\dim Y_i}$$

est satisfaite en vertu de la proposition 4.3 et du résultat d'homogénéité de Faltings : en effet, la première s'applique car le fait que $x_i\in Y_i$ et $x_i\notin Z_X^{(r)}$ entraîne que Y_i est r-supertransverse ; elle donne donc l'inégalité pour $s_1=\cdots=s_m=1$ et [F, lemme 4.2] montre

$$\left(\beta_{s,\varphi}{}^*\bigotimes_{i=1}^{m-1}p_i^*\mathcal{L}\right)^{\cdot\dim Y}\cdot Y=\left(\prod_{i=1}^{m}s_i^{2\dim Y_i}\right)\left(\left(\beta_{1,\varphi}{}^*\bigotimes_{i=1}^{m-1}p_i^*\mathcal{L}\right)^{\cdot\dim Y}\cdot Y\right).$$

Par conséquent, si nous notons c_1', c_2' et c_3' les constantes définies dans [R2] nous savons que si $h_{\mathcal{L}}(x_i)\geq c_3'$ pour $1\leq i\leq m$ et $s_i^2\geq c_2's_{i+1}^2$ pour $1\leq i\leq m-1$ alors

$$h_{\mathcal{M}}(x)\geq\frac{\|\varphi\|^2}{c_1'}\sum_{i=1}^{m}s_i^2h_{\mathcal{L}}(x_i).$$

Finalement nous passons à des hauteurs normalisées. Si c_{NT} est une constante majorant la différence entre $h_{\mathcal{L}}$ définie par $\sigma_0,\ldots,\sigma_N$ et la hauteur de Néron-Tate associée $|\cdot|^2$ et si de même $c_{\mathrm{NT}}^{(j)}$ majore la différence entre la hauteur définie par $\rho_1^{(j)},\ldots,\rho_{\nu_j}^{(j)}$ et la hauteur de Néron-Tate associée à $\mathcal{Q}_j$ alors

$$\begin{aligned}\left|h_{\mathcal{M}}(x)-\hat{h}_{\mathcal{M}}(x)\right| &\leq t_1|a|c_{\mathrm{NT}}+(2^{d+1}-1)(m-1)c_{\mathrm{NT}}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{m}(2^d\eta_kb_j^2s_k^2c_{\mathrm{NT}}+2^{d+1}\eta_kb_j^2s_k^2c_{\mathrm{NT}}^{(j)})\\ &\quad+\sum_{k=1}^{m}2^dq_1(4m\|\varphi\|^2-2\eta_k\|b\|^2)s_k^2c_{\mathrm{NT}}.\end{aligned}$$

En majorant ce second membre par $c\|a\|$ pour une constante c (explicitable), nous en déduisons

$$\hat{h}_{\mathcal{M}}(x)\geq\frac{\|\varphi\|^2}{c_1'}\sum_{i=1}^{m}s_i^2(|x_i|^2-c_{\mathrm{NT}}-cc_1').$$

Maintenant la hauteur normalisée $\hat{h}_{\mathcal{M}}(x)$ n'est autre que $|\beta_{s,\varphi}(x)|^2$ pour la hauteur de Néron-Tate $|\cdot|^2$ sur A^{m-1} déduite de celle sur A. Ainsi, si l'on pose $c_3=c_3'+2(c_{\mathrm{NT}}+cc_1')$ et $c_1=2c_1'$, la condition $|x_i|^2\geq c_3$ entraîne

$$|\beta_{s,\varphi}(x)|^2\geq\frac{\|\varphi\|^2}{c_1}\sum_{i=1}^{m}s_i^2|x_i|^2$$

et nous avons donc établi la proposition en prenant $c_2=\sqrt{c_2'}$.

6 Démonstration du théorème principal

Dans cette partie, nous montrons comment la proposition 5.1 entraîne le théorème 1.1. Nous nous appuyons sur deux lemmes préliminaires pour lesquels nous rappelons que si Γ est un sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ alors Γ_{sat} désigne le sous-groupe des $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ tels qu'il existe $N \geq 1$ avec $Nx \in \mathrm{End}(A) \cdot \Gamma$. Par ailleurs, nous notons c_4 un réel tel que pour tout $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ et tout $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ on a $|\varphi(x)| \leq c_4 \|\varphi\| \, |x|$ (l'existence du faisceau $\mathcal{N}_\varphi$ introduit avant la proposition 4.3 montre que $c_4 = (2^d q_1 q_2)^{1/2}$ convient).

Lemme 6.1 *Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Soient ε un réel positif et B une sous-variété abélienne de A. Si $x \in \Gamma_\varepsilon + B(\bar{\mathbb{Q}})$ alors il existe $\gamma \in (\Gamma_{\mathrm{sat}})_{c_0^2 c_4^2 \varepsilon}$ et $P \in B(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que $x = \gamma + P$ et $\max(|\gamma|,|P|) \leq (1 + c_0 c_4)|x|$.*

DÉMONSTRATION : Écrivons $x = y' + z' + P'$ avec $y' \in \Gamma$, $|z'|^2 \leq \varepsilon$ et $P' \in B(\bar{\mathbb{Q}})$ puis B sous la forme $\mathrm{Ker}^0 \varphi$ où φ est un projecteur normalisé de paramètre $a \geq 1$. Il existe $y \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ tel que $ay = \varphi(y')$ et $z \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $az = \varphi(z')$. Posons alors $\gamma = y + z$ et $P = x - \gamma$. Puisque $|\varphi(z')| \leq c_4 \|\varphi\| \, |z'| \leq c_0 c_4 a \varepsilon^{1/2}$ nous avons bien $\gamma \in (\Gamma_{\mathrm{sat}})_{c_0^2 c_4^2 \varepsilon}$. Comme $a\varphi(P) = a\varphi(y' - y + z' - z) = a\varphi(y') - \varphi^2(y') + a\varphi(z') - \varphi^2(z') = 0$ nous avons $P \in A_{\mathrm{tors}} + B(\bar{\mathbb{Q}})$. Ensuite $a\gamma = \varphi(y' + z') = \varphi(x)$ donc $|\gamma| \leq a^{-1}|\varphi(x)| \leq a^{-1} c_4 \|\varphi\| \, |x| \leq c_0 c_4 |x|$ et donc $|P| \leq |x| + |\gamma| \leq (1 + c_0 c_4)|x|$. Il reste à ajouter à P un point de torsion que l'on retranche à γ pour obtenir le résultat. □

Posons $c_5 = 4 c_4 (1 + c_0 c_4) \sqrt{m c_1}$.

Lemme 6.2 *(1) De toute suite d'éléments non nuls de $\mathrm{End}(A)$ on peut extraire une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques φ et φ' vérifient*

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} \right\| \leq \frac{1}{c_5}.$$

(2) De même si $\varepsilon \leq (8 c_0 c_4 c_5)^{-2}$ de toute suite d'éléments de $\{\gamma \in (\Gamma_{\mathrm{sat}})_{c_0^2 c_4^2 \varepsilon} \mid |\gamma| \geq 1\}$ on peut extraire une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques γ et γ' vérifient

$$\left| \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right| \leq \frac{1}{c_5}.$$

DÉMONSTRATION : Dans le premier cas, l'assertion résulte facilement de la compacité de la sphère unité de $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ et du principe des tiroirs. Dans le second cas, le même raisonnement s'applique à $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ avec $1/2c_5$ et un calcul direct donne le résultat (voir l'argument identique page 1927 de [RV]). □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1 : Nous allons montrer que si $\varepsilon \leq (8 c_0 c_4 c_5)^{-2}$ alors l'ensemble $(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap \Gamma_{\varepsilon,r}$ est de hauteur bornée. Nous raisonnons par l'absurde en imaginant qu'il existe une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ de points de cet ensemble dont la hauteur tend vers l'infini. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons grâce aux lemmes précédents supposer qu'il existe trois suites $(\gamma_i)_{i \geq 1}$, $(P_i)_{i \geq 1}$ et $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ avec :

- $\gamma_i, P_i \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $x_i = \gamma_i + P_i$;
- $\varphi_i \in \mathrm{End}(A)$ est un projecteur normalisé de rang $\geq r$ et $\varphi_i(P_i) = 0$;
- $|x_i| \geq c_3$ et $\max(|\gamma_i|,|P_i|) \leq (1 + c_0 c_4)|x_i|$;
- pour tous $i,j \geq 1$

$$\left\| \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} - \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \right\| \leq \frac{1}{c_5} \ ;$$

– pour tous $i,j \geq 1$ tels que $|\gamma_i| \geq 1$ et $|\gamma_j| \geq 1$

$$\left| \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} - \frac{\gamma_j}{|\gamma_j|} \right| \leq \frac{1}{c_5}.$$

Ceci fait nous distinguons temporairement deux cas selon que la suite des $|\gamma_i|$ est bornée ou non.

- Si $|\gamma_i| \leq T$ pour tout $i \geq 1$ alors, quitte à faire une nouvelle extraction, nous imposons $|x_1| \geq c_5 T$ et nous définissons pour $1 \leq i \leq m$ l'entier s_i comme $(1+[c_2])^{m-i}$.
- Sinon, encore par extraction, nous imposons que pour $i \geq 1$

$$|\gamma_{i+1}|/|\gamma_i| \geq 1 + c_2 + 2^{m-2} c_5$$

  et nous définissons t_i comme l'entier le plus proche de $|\gamma_{i+1}|/|\gamma_i|$ puis $s_i = \prod_{j=i}^{m-1} t_i$ pour $1 \leq i \leq m$ (ainsi $s_m = 1$).

Vérifions que dans les deux cas nous avons $s_i \geq c_2 s_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq m-1$ et si $2 \leq i \leq m$

$$|s_i \gamma_i - s_1 \gamma_1| \leq \frac{2(1 + c_0 c_4)}{c_5} s_1 |x_1|.$$

Dans le premier cas, c'est clair. Dans le second cas nous calculons

$$\begin{aligned} |s_i\gamma_i - s_1\gamma_1| &= \left| s_1|\gamma_1| \left(\frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} - \frac{\gamma_1}{|\gamma_1|} \right) + \left(\frac{s_i|\gamma_i|}{|\gamma_1|} - s_1 \right) |\gamma_1| \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} \right| \\ &\leq \frac{1}{c_5} s_1 |\gamma_1| + \left| \frac{|\gamma_i|}{|\gamma_1|} - \frac{s_1}{s_i} \right| s_i |\gamma_1| \end{aligned}$$

puis

$$\left| \frac{|\gamma_i|}{|\gamma_1|} - \frac{s_1}{s_i} \right| = \left| \frac{|\gamma_2|}{|\gamma_1|} \cdots \frac{|\gamma_i|}{|\gamma_{i-1}|} - t_1 \cdots t_{i-1} \right| \leq \frac{2^{i-2} t_1 \cdots t_{i-1}}{\min_{1 \leq j \leq i-1} t_j}$$

car si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des réels ≥ 1 et t_i l'entier le plus proche de α_i on a $\alpha_i \leq 2t_i$ et donc

$$\begin{aligned} &|\alpha_1 \cdots \alpha_n - t_1 \cdots t_n| \\ &\quad = |(\alpha_1 - t_1)\alpha_2 \cdots \alpha_n + t_1(\alpha_2 - t_2)\alpha_3 \cdots \alpha_n + \cdots + t_1 \cdots t_{n-1}(\alpha_n - t_n)| \\ &\quad \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\alpha_i - t_i|}{t_i} (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1) t_1 \cdots t_n \\ &\quad \leq \frac{2^{n-1} t_1 \cdots t_n}{\min_{1 \leq i \leq n} t_i}. \end{aligned}$$

Comme $t_j \geq 2^{m-2} c_5$ il vient

$$\left| \frac{|\gamma_i|}{|\gamma_1|} - \frac{s_1}{s_i} \right| \leq \frac{1}{c_5} \cdot \frac{s_1}{s_i}$$

et la majoration annoncée de $|s_i\gamma_i - s_1\gamma_1|$ s'ensuit puisque $|\gamma_1| \leq (1 + c_0c_4)|x_1|$. Nous pouvons désormais traiter les deux cas ci-dessus de manière unifiée.

Remarquons à présent que les propriétés de la suite $(\varphi_i)_{i \geq 1}$ sont inchangées si nous multiplions chaque terme par un entier $N_i \geq 1$. En nous restreignant aux m premiers termes nous pouvons donc faire en sorte que $\big| \|\varphi_i\| - \|\varphi_1\| \big| \leq (1+c_5)^{-1} \|\varphi_1\|$ si $1 \leq i \leq m$; ceci entraîne

$$\begin{aligned} \|\varphi_i - \varphi_1\| &\leq \left\| \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} - \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \right\| \|\varphi_i\| + \left| \frac{\|\varphi_i\|}{\|\varphi_1\|} - 1 \right| \|\varphi_1\| \\ &\leq \left(\frac{1}{c_5} \left(1 + \frac{1}{1+c_5} \right) + \frac{1}{1+c_5} \right) \|\varphi_1\| = \frac{2}{c_5} \|\varphi_1\|. \end{aligned}$$

Finalement nous écrivons pour $2 \leq i \leq m$ avec $\varphi = \varphi_1$

$$\begin{aligned}
|s_i\varphi(x_i) - s_1\varphi(x_1)| &= |\varphi(s_i\gamma_i - s_1\gamma_1) + s_i(\varphi_i - \varphi)(P_i)| \\
&\leq c_4\big(\|\varphi\|\,|s_i\gamma_i - s_1\gamma_1| + \|\varphi_i - \varphi\| s_i |P_i|\big) \\
&\leq c_4\Big(\|\varphi\| \frac{s_1|x_1|}{2c_4\sqrt{mc_1}} + \frac{2\|\varphi\|}{c_5} s_i(1 + c_0c_4)|x_i|\Big) \\
&\leq \frac{\|\varphi\|}{\sqrt{mc_1}} \max(s_1|x_1|, s_i|x_i|).
\end{aligned}$$

Par suite

$$\sum_{i=2}^{m} |s_i\varphi(x_i) - s_1\varphi(x_1)|^2 < \frac{\|\varphi\|^2}{c_1} \max_{1\leq i\leq m} |s_i x_i|^2 \leq \frac{\|\varphi\|^2}{c_1} \sum_{i=1}^{m} s_i^2 |x_i|^2$$

en contradiction avec la proposition 5.1 dont les hypothèses sont pourtant toutes vérifiées. □

7 Ensembles exceptionnels

Nous démontrons ici le reste des énoncés de l'introduction. Nous commençons par un lemme auxiliaire.

Lemme 7.1 *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible ample donné sur A, tout élément de $Z^1_+(A)$ s'écrit $\varphi^*\mathcal{L}$ pour $\varphi \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout élément $\mathcal{N}$ de $Z^1_+(A) \cap \mathrm{NS}(A)$ il existe un quotient de la forme $\varphi: A \to A/B$ où B est une sous-variété abélienne de A et un élément $\mathcal{L}_B \in \mathrm{NS}(A/B)$ ample tel que $\mathcal{N} = \varphi^*\mathcal{L}_B$.*

Démonstration : Rappelons que, lorsque $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$ est plongé dans $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ à l'aide de $\mathcal{L}$ ([Mu, page 190]), l'élément $\varphi^*\mathcal{L}$ s'identifie à $\varphi^\dagger \circ \varphi$ si $\varphi \mapsto \varphi^\dagger$ est l'involution de Rosati ([Mu, page 189]). De plus dans la représentation matricielle de la partie 2, cette involution agit par transconjugaison ([Mu, page 208]). La première partie de l'énoncé résulte donc de ce que toute matrice positive de $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ s'écrit ${}^t\bar{M}M$ (l'on peut même choisir M dans $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ et positive). Pour la seconde, nous définissons $B = \mathrm{Ker}\phi_{\mathcal{N}}$ avec la notation ϕ de [Mu]. Nous considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "0"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{N}}"] & A/B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 & \hat{B} \arrow[l] & \hat{A} \arrow[l, "\hat{\iota}"'] & \widehat{A/B} \arrow[l, "\hat{\varphi}"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(pour obtenir f, vérifier que la définition de B entraîne $\hat{\iota} \circ \phi_{\mathcal{N}} = 0$). En dualisant, il vient $\hat{f} = f$ (car $\hat{\phi}_{\mathcal{N}} = \phi_{\mathcal{N}}$) donc f est de la forme $\phi_{\mathcal{L}_B}$ pour $\mathcal{L}_B \in \mathrm{NS}(A/B)$. Par suite, le diagramme donne $\phi_{\mathcal{N}} = \hat{\varphi} \circ \phi_{\mathcal{L}_B} \circ \varphi = \phi_{\varphi^*\mathcal{L}_B}$ donc $\mathcal{N} = \varphi^*\mathcal{L}_B$ (dans $\mathrm{NS}(A)$). De plus, par construction f est une isogénie (de noyau $\mathrm{Ker}\phi_{\mathcal{N}}/B$) donc $\mathcal{L}_B$, étant numériquement effectif comme $\mathcal{N}$, est ample. □

Nous pouvons alors donner une formulation plus géométrique de la notion de $\mathbb{Q}$-supertransversalité.

Lemme 7.2 *Soient B une sous-variété abélienne de A, $\varphi: A \to A/B$ le morphisme quotient, $\mathcal{L}_B$ un faisceau inversible ample sur A/B et $\mathcal{N} = \varphi^*\mathcal{L}_B$. Alors pour tout fermé irréductible Y de A, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *Y et $\mathcal{N}$ sont $\mathbb{Q}$-supertransverses.*
- *$\dim Y + B = \dim Y + \dim B$ et, pour toute sous-variété abélienne B' de A contenant strictement B, on a $\dim Y + B' > \dim Y + B$.*

– $\dim \varphi(Y) = \dim Y$ *et* $\mathrm{Stab}^0\varphi(Y) = 0$.

DÉMONSTRATION : L'équivalence des deux dernières assertions est claire car nous avons $\dim \varphi(Y) = \dim Y + B - \dim B$ tandis que $Y + B' = Y + B$ équivaut à $B'/B \subset \mathrm{Stab}^0\varphi(Y)$. Pour relier les deux premières, nous notons que

$$\dim Y + B = \dim Y + \dim B \iff \dim \varphi(Y) = \dim Y \iff \mathcal{N}^{\cdot \dim Y} \cdot Y > 0.$$

Comme ceci est conséquence de chacune des assertions, nous pouvons le supposer désormais. Pour B' fixée, nous écrivons $\chi: A/B \to A/B'$ le quotient par B'/B et $\psi = \chi \circ \varphi: A \to A/B'$. La condition de dimension devient alors $\dim \chi(\varphi(Y)) > \dim \varphi(Y) - \dim B'/B$. En choisissant un faisceau ample $\mathcal{L}_{B'}$ quelconque sur A/B', ceci peut s'écrire

$$(\chi^* \mathcal{L}_{B'})^{\cdot \dim \varphi(Y) - \dim B'/B + 1} \cdot \mathcal{L}_B^{\cdot \dim B'/B - 1} \cdot \varphi(Y) > 0$$

(où l'on convient que l'assertion est vraie si $\dim \varphi(Y) - \dim B'/B + 1 < 0$). Autrement dit, comme $Y \to \varphi(Y)$ est génériquement fini, notre seconde assertion équivaut à

$$(\psi^* \mathcal{L}_{B'})^{\cdot \dim Y - a} \cdot \mathcal{N}^{\cdot a} \cdot Y > 0 \qquad \text{pour } \dim B'/B - 1 \leq a \leq \dim Y.$$

Ainsi, si cela est vrai, nous voyons facilement que Y et $\mathcal{N}$ sont $\mathbb{Q}$-supertransverses : en effet, dans toute décomposition $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$, grâce au lemme précédent, nous pouvons écrire $\mathcal{N}_2$ sous la forme $\psi^* \mathcal{L}_{B'}$; alors le rang de $\mathcal{N}_1$ vaut au moins $\mathrm{rang}\mathcal{N} - \mathrm{rang}\mathcal{N}_2 = \dim B'/B$ et nous avons bien $\mathcal{N}_2^{\cdot \dim Y - a} \cdot \mathcal{N}^{\cdot a} \cdot Y > 0$ pour $\mathrm{rang}\mathcal{N}_1 - 1 \leq a \leq \dim Y$.

Réciproquement, supposons que Y et $\mathcal{N}$ soient $\mathbb{Q}$-supertransverses. En définissant C' comme la sous-variété abélienne de A/B orthogonale à B'/B relativement à $\mathcal{L}_B$ (voir [Mu, page 173]) il est possible d'écrire ce dernier sous la forme $\mathcal{L}_B = \chi^* \mathcal{L}_{B'} \otimes \omega^* \mathcal{L}_{C'}$ où $\omega: A/B \to (A/B)/C'$ est le quotient, $\mathcal{L}_{B'}$ ample sur A/B' et $\mathcal{L}_{C'}$ ample sur $(A/B)/C'$. Alors $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$ pour $\mathcal{N}_1 = \varphi^* \omega^* \mathcal{L}_{C'}$ de rang $\mathrm{codim} C' = \dim B'/B$ et $\mathcal{N}_2 = \psi^* \mathcal{L}_{B'}$. D'après ce qui précède, nous obtenons bien la seconde assertion. □

Remarquons qu'en réutilisant le lemme 7.1, ce lemme implique que Y est r-$\mathbb{Q}$-supertransverse si et seulement si les assertions équivalentes sont vérifiées pour toute sous-variété abélienne B avec $\mathrm{codim} B \geq r$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.2 : Choisissons $Y \subset X$ un fermé irréductible qui ne soit pas r-$\mathbb{Q}$-supertransverse et, en application de ce qui précède, une sous-variété abélienne B avec $\mathrm{codim} B \geq r$ telle que les conditions du lemme 7.2 ne soient pas satisfaites. Nous notons à nouveau $\varphi: A \to A/B$. Si, dans un premier temps, nous avons $\dim \varphi(Y) < \dim Y$, alors pour tout $y \in Y(\bar{\mathbb{Q}})$ l'intersection $Y \cap y + B$ est infinie et fermée donc de hauteur non bornée. A plus forte raison, c'est le cas de $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{0,r}$ pour $\Gamma = \mathbb{Z}y$ donc, vu l'hypothèse, Z contient une infinité de points de $Y \cap y + B$ et, finalement, $Y \subset Z$.

Si maintenant $\dim \varphi(Y) = \dim Y$ alors $\mathrm{Stab}^0\varphi(Y) \neq 0$ donc il existe $a \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $\varphi(a)$ est un point d'ordre infini de $\mathrm{Stab}\varphi(Y)$. Nous considérons pour tout $y \in Y(\bar{\mathbb{Q}})$ l'intersection $Y \cap y + \mathbb{Z}a + B$ (incluse dans $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_{0,r}$ pour $\Gamma = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}y$). Comme $\varphi(y + na) \in \varphi(Y)$, chaque $Y \cap y + na + B$ est non vide donc notre intersection est infinie et de hauteur non bornée (car c'est le cas de son image par φ). A nouveau, Z contient donc une infinité de ces points. De la sorte, par adhérence, $\varphi(Z)$ contient tous les $\varphi(y + na)$. Ceci entraîne $\varphi(Y) \subset \varphi(Z)$ puis $Y \subset Z$ car $Y \to \varphi(Y)$ est génériquement fini.

Ainsi de toute manière $Y \subset Z$ et donc par union nous avons bien $Z_{X,\mathbb{Q}}^{(r)} \subset Z$. □

Avant de passer à la démonstration suivante, rappelons que, dans [R3], $Z_{X,\Gamma}^{(r)}$ est défini comme l'ensemble des points $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ pour lesquels il existe une sous-variété abélienne B de A et un élément $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ tels que

$$\dim_x X \cap \gamma + B \geq \max(1, r - \mathrm{codim} B).$$

Par conséquent, l'union sur tous les sous-groupes de rang fini $\bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ peut se décrire comme l'ensemble des $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ tels qu'il existe une sous-variété abélienne B avec

$$\dim_x X \cap x + B \geq \max(1, r - \mathrm{codim} B).$$

Si Y est un fermé de A, notons $\langle Y \rangle$ la sous-variété abélienne engendrée par Y à translation près (définie par exemple en disant que la somme de g copies de Y est un translaté de $\langle Y \rangle$). Dans l'inégalité ci-dessus, toute composante Y de $X \cap x + B$ vérifie $\langle Y \rangle \subset B$ et, réciproquement, si $Y \subset X$ et $\langle Y \rangle \subset B$ il existe $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $x \in Y \subset X \cap (x + B)$. De cette façon, $\bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ coïncide avec l'union des fermés irréductibles Y de X tels que $\dim Y \geq \max(1, r - \mathrm{codim}\langle Y \rangle)$.

Démonstration du lemme 1.1 : (1) Ici, tous les indécomposables de $Z^1_+(A)$ sont de rang 1. De plus, $Z^1(A)$ étant isomorphe à un produit de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ il est facile de constater que tout $\mathcal{N} \in Z^1_+(A)$ s'écrit comme une somme de $\mathrm{rang}\mathcal{N}$ faisceaux de rang 1 et que, si $\mathrm{rang}\mathcal{N} < g$, il existe $\mathcal{N}_1$ de rang 1 tel que $\mathrm{rang}(\mathcal{N} + \mathcal{N}_1) = \mathrm{rang}\mathcal{N} + 1$. En particulier, si Y est r-supertransverse et $\mathrm{rang}\mathcal{N} = r - 1$ alors en choisissant $\mathcal{N}_1$ comme ci-dessus et $a = 0$ dans la définition 1.1 nous avons bien $\mathcal{N}^{\cdot d} \cdot Y > 0$ (si $\mathrm{rang}\mathcal{N} \geq r$ ce même fait découle de la décomposition $\mathcal{N} = 0 + \mathcal{N}$). Réciproquement, supposons que $\mathcal{N}_0^{\cdot d} \cdot Y > 0$ pour tout $\mathcal{N}_0$ avec $\mathrm{rang}\mathcal{N}_0 \geq r - 1$ et fixons $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$ où $\mathrm{rang}\mathcal{N} \geq r$. Si $\mathcal{N}_1$ n'est pas nul nous l'écrivons $\mathcal{N}_1 = \mathcal{M} + \mathcal{M}'$ avec $\mathrm{rang}\mathcal{M} = \mathrm{rang}\mathcal{N}_1 - 1$ et $\mathrm{rang}\mathcal{M}' = 1$. Soit alors $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M} + \mathcal{N}_2$. Clairement $\mathrm{rang}\mathcal{N}_0 \geq r - 1$ donc $\mathcal{N}_0^{\cdot d} \cdot Y > 0$. En développant, il existe un entier s tel que $\mathcal{M}^{\cdot s} \cdot \mathcal{N}_2^{\cdot d-s} \cdot Y > 0$. Ici, $s \leq \mathrm{rang}\mathcal{M}$ donc ce terme apparaît dans le développement de tous les nombres $\mathcal{N}^{\cdot a} \cdot \mathcal{N}_2^{\cdot d-a} \cdot Y$ avec $\mathrm{rang}\mathcal{N}_1 - 1 \leq a \leq d$ et donc nous avons bien démontré leur positivité.

(2) Nous utilisons les caractérisations du lemme 7.2. Il suffit de remarquer que, si nous avons deux sous-variétés abéliennes $B \subset B'$ différentes, il en existe une troisième avec $B \subset B'' \subset B'$ et $\dim B'' = \dim B + 1$. Pour une telle sous-variété abélienne $\dim Y + B'' > \dim Y + B$ signifie nécessairement $\dim Y + B'' = \dim(Y + B) + 1$ d'où le résultat.

(3) Si Y est un fermé irréductible non ponctuel de A, nous pouvons choisir une sous-variété abélienne B de $\langle Y \rangle$ telle que $\dim B = \dim\langle Y \rangle - \dim Y + 1$. Alors toutes les intersections $Y \cap y + B$ sont infinies pour $y \in Y$ et donc Y est recouvert par des courbes C vérifiant $\langle C \rangle \subset B$ donc $\dim C + \mathrm{codim}\langle C \rangle \geq \mathrm{codim}\langle Y \rangle + \dim Y$. Avec la remarque précédant cette démonstration, nous en déduisons que, dans le cas d'un produit de courbes elliptiques, $\bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ est l'union des courbes irréductibles de X telles que $\mathrm{codim}\langle C \rangle \geq r - 1$. Ces courbes ne sont clairement pas r-$\mathbb{Q}$-supertransverses ce qui montre $\bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma} \subset Z^{(r)}_{X,\mathbb{Q}}$. Pour l'inclusion inverse, soit Y non r-$\mathbb{Q}$-supertransverse. Il existe donc B de codimension au moins $r - 1$ avec $\dim Y + B < \dim Y + \dim B$. Par conséquent, toute intersection $Y \cap y + B$ est infinie donc recouverte de courbes C avec $\langle C \rangle \subset B$. Ceci prouve $Y \subset \bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ et conclut la démonstration. □

Remarque : l'on pourrait en fait montrer $Z^{(r)}_{X,\mathbb{Q}} \subset \bigcup_\Gamma Z^{(r)}_{X,\Gamma}$ sans restriction sur A.

Venons-en au cas des courbes.

Démonstration du théorème 1.3 : Bien sûr, au vu du théorème 1.1, il suffit de vérifier $Z^{(2)}_C = \emptyset$. Or, compte tenu de l'hypothèse sur C, nous avons $C \cdot \varphi^*\mathcal{L} > 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(A) \setminus \{0\}$ ($\mathcal{L}$ ample étant fixé) car C n'est pas contenu dans un translaté de $\mathrm{Ker}^0\varphi$. Maintenant, l'application $\varphi \mapsto C \cdot \varphi^*\mathcal{L}$ est une forme quadratique

$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Elle est donc définie positive. Par suite, il en va de même de son extension à $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est-à-dire que $C \cdot \varphi^* \mathcal{L} > 0$ pour $\varphi \in \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'après le lemme 7.1, ceci montre $C \cdot \mathcal{N} > 0$ pour tout $\mathcal{N} \in Z^1_+(A) \setminus \{0\}$ et l'on en déduit facilement que C est 2-supertransverse ce qui équivaut à $Z^{(2)}_C = \emptyset$. □

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1.1 : La première assertion résulte du théorème 1.3 en raisonnant comme dans [RV, page 1930] : si C est contenue dans un translaté $a + A'$ avec $\langle C \rangle = A'$, la courbe $C' = C - a$ de A' est transverse. De plus l'hypothèse sur C entraîne que a engendre A/A'. Si Γ désigne le sous-groupe de $A'(\bar{\mathbb{Q}})$ défini comme le saturé de $\mathrm{End}(A,A')a$ alors tout point P de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap (A_{\mathrm{tors}})_{0,2}$, vu comme point P' de $C'(\bar{\mathbb{Q}})$, appartient à $\Gamma_{0,2}$ (en effet $P = a + P'$ et si $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ annule P, on a $\dim \varphi(A') = \mathrm{rang}\varphi$ puisque a engendre A/A' et donc il existe $\psi \in \mathrm{Hom}(A,A')$ tel que $\psi(P) = 0$ ce qui implique $P' \in \Gamma + \mathrm{Ker}^0 \psi$). La seconde assertion découle alors facilement de [R3] car $Z^{(2)}_{C,0}$ est vide. □

Finalement, voici le cas d'une surface.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.4 : Nous commençons par montrer l'égalité des ensembles exceptionnels (valable dès que $r \geq 3$). Puisque X est 3-supertransverse, seules les courbes de X interviennent et il nous suffit de montrer que toute courbe C est r-supertransverse si et seulement si elle est r-$\mathbb{Q}$-supertransverse. Nous procédons comme dans la démonstration du théorème 1.3 ci-dessus. La forme quadratique $q\colon \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ donnée par $q(\varphi) = \varphi^* \mathcal{L} \cdot C$ est positive, elle ne s'annule que sur son noyau $\mathrm{Ker} q$. Son extension à $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ a pour noyau $(\mathrm{Ker} q) \otimes \mathbb{R}$. Maintenant si C est r-$\mathbb{Q}$-supertransverse, $\mathrm{Ker} q$ ne contient que des éléments de rang $< r-1$. Par adhérence, il en va de même de $(\mathrm{Ker} q) \otimes \mathbb{R}$ donc C est r-supertransverse. Compte tenu des résultats précédents, il reste à voir que X contient seulement un nombre fini de courbes C telle que $\mathrm{codim}\langle C \rangle \geq r - 1$.

Notons Y la somme de $g - r + 1$ copies de X puis $B_1, \ldots, B_n$ les composantes neutres des stabilisateurs des composantes irréductibles du fermé Z_Y (voir introduction). Puisque nous avons $\dim Y \leq (g - r + 1) \dim X = 2(g - r + 1) < g$, nous voyons que Y n'est pas un translaté de sous-variété abélienne (sinon $\dim\langle X \rangle < g$) et donc $\dim B_i \leq g - 2$ pour $1 \leq i \leq n$. Par 3-$\mathbb{Q}$-supertransversalité, il vient $\dim X + B_i = \dim X + \dim B_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Ceci signifie que pour un tel indice i le morphisme quotient $X \to X + B_i/B_i \subset A/B_i$ est génériquement fini et n'a donc qu'un nombre fini de fibres de dimension 1, disons $C_{i,1}, \ldots, C_{i,n_i}$ avec $n_i \geq 0$.

Si maintenant $C \subset X$ satisfait $\mathrm{codim}\langle C \rangle \geq r - 1$, la somme de $g - r + 1$ copies de C est d'une part un translaté de $\langle C \rangle$ et d'autre part contenue dans Y. Par suite, il existe un i avec $1 \leq i \leq n$ et $\langle C \rangle \subset B_i$. Cela entraîne que C est incluse dans un translaté de B_i c'est-à-dire dans une fibre de $A \to A/B_i$. De la sorte C est l'une des courbes $C_{i,j}$ avec $1 \leq j \leq n_i$. □

Références

[BMZ] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices* 20. 1999. p. 1119–1140.

[F] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math.* 133. 1991. p. 549–576.

[Li] D. Lieberman. Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds. *Amer. J. Math.* 90. 1968. p. 366–374.

[Mu] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford University Press. 1974.

[Po] B. Poonen. Mordell-Lang plus Bogomolov. *Invent. math.* 137. 1999. p. 413–425.

[R1] G. Rémond. Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Série IV. 29. 2000. p. 101–151.

[R2] G. Rémond. Inégalité de Vojta généralisée. Prépublication de l'Institut Fourier. 584. 2003.

[R3] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. Prépublication de l'Institut Fourier. 626. 2003.

[R4] G. Rémond. Une inégalité de Łojasiewicz arithmétique. Prépublication de l'Institut Fourier 633. 2004.

[RV] G. Rémond et E. Viada. Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Internat. Math. Res. Notices* 35. 2003. p. 1915–1931.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France
`Gael.Remond@ujf-grenoble.fr`