Une inégalité de Łojasiewicz arithmétique

Gaël RÉMOND

21 janvier 2004

Prépublication de l'Institut Fourier n° 633 (2004)
http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract. — An explicit lower bound is given for the value of a polynomial P in n variables with integer coefficients at any point x with real coordinates in terms of the distance of x to the real zeroes of P, the norm of x and the size of the coefficients of P.

1 Résultat

Une inégalité de Łojasiewicz minore la valeur $|f(x)|$ d'une fonction analytique $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par une puissance de la distance de x à l'ensemble des zéros de f. Nous nous intéressons ici au cas arithmétique où f est un polynôme à coefficients entiers.

Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme du supremum par

$$|x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Si Z est une partie de $\mathbb{R}^n$, nous écrivons

$$\operatorname{dist}(x,Z) = \inf_{z \in Z} |x - z|.$$

Nous notons encore $|x|^* = \max(1,|x|)$ et $\operatorname{dist}^*(x,Z) = \min(1,\operatorname{dist}(x,Z))$. Si f est une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nous désignons par $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros $f^{-1}(0)$.

Avec ces conventions, notre résultat s'énonce comme suit.

Théorème 1.1 *Soient n, D et H des entiers naturels non nuls. Si P est un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré au plus D et dont les coefficients sont de valeurs absolues au plus H, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$|P(x)| \geq (e^{2nD}H)^{-(n+1)D^n} \left(\frac{\operatorname{dist}^*(x,Z(P))}{|x|^*} \right)^{nD^n}.$$

Cette inégalité se rapproche de résultats dus à W. D. Brownawell dans le cas complexe. Pour ces inégalités sur $\mathbb{C}^n$ ainsi que leurs liens avec le Nullstellensatz, nous renvoyons à l'article [B] et à sa bibliographie. Elles ne semblent pas contenir notre minoration puisqu'un point réel peut se trouver plus loin des zéros réels que des zéros complexes.

Mots-Clefs : Polynômes, inégalité de Łojasiewicz, hauteurs.
Classification : 11C08, 11J25, 11G50.

Signalons encore que, à la différence du cas complexe, nous pouvons facilement donner une minoration de $\max|P_i(x)|$ pour une famille de polynômes $P_1,\ldots,P_m$ à partir du cas d'un seul polynôme P : il suffit de poser $P = P_1^2 + \cdots + P_m^2$.

L'énoncé du théorème 1.1 ne prétend pas être optimal. Les exemples suivants montrent toutefois que la formule serait fausse si l'on remplaçait en exposant de l'une des quantités H, $|x|^*$ ou $\mathrm{dist}^*(x,Z(P))$ le facteur D^n par $D^{n-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$.

Exemples. Dans les trois cas nous utilisons une modification d'un exemple dû à D. Masser et P. Philippon (voir [B]). Nous choisissons deux entiers B et d au moins égaux à 2 et nous écrivons $D = 2d$.

1. Nous posons $P = X_1^{2d} + (1 - X_{n-1}X_n^{d-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-2}(X_iX_n^{d-1} - X_{i+1}^d)^2$ puis $x_i = B^{1-d^{n-i}}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n = B$. De la sorte, nous avons $H = 2$, $\mathrm{dist}^*(x,Z(P)) = 1$ et $|x|^* = B$ avec
$$P(x) = (|x|^*)^{-2(D/2)^n+D}.$$
2. Nous posons $P = X_1^{2d} + \sum_{i=1}^{n-1}(X_i - X_{i+1}^d)^2$ puis $x_i = B^{-d^{n-i}}$ pour $1 \leq i \leq n$. De la sorte, nous avons $H = 2$, $|x|^* = 1$ et $\mathrm{dist}^*(x,Z(P)) = B^{-1}$ avec
$$P(x) = \mathrm{dist}^*(x,Z(P))^{2(D/2)^n}.$$
3. Nous posons $P = X_1^{2d} + (1 - BX_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(BX_i - X_{i+1}^d)^2$ puis $x_i = B^{-(d^{n-i+1}-1)/(d-1)}$ pour $1 \leq i \leq n$. De la sorte, nous avons $H = B^2$, $\mathrm{dist}^*(x,Z(P)) = 1$ et $|x|^* = 1$ avec
$$P(x) = H^{-d(d^n-1)/(d-1)} \leq H^{-(D/2)^n}.$$

La démonstration du théorème 1.1 repose sur l'idée suivante : si x n'est pas un zéro de P, l'on peut trouver un pavé A de $\mathbb{R}^n$ le contenant et disjoint de $Z(P)$. Ce pavé est contrôlé en termes de $|x|^*$ et $\mathrm{dist}^*(x,Z(P))$. On cherche ensuite le minimum de $|P|$ sur A : s'il est atteint au bord de A, le problème se ramène par spécialisation au cas de $n-1$ variables ; sinon c'est un minimum local. Maintenant, si $|P|$ atteint un minimum local isolé en y, le point y est solution d'un système d'équations algébriques donné par les annulations des dérivées de P. Il est alors possible de contrôler la hauteur du point algébrique y et de minorer $|P(y)|$ par l'inégalité de Liouville. Ceci vaut également pour un minimum non isolé quitte à changer de point où le minimum est atteint.

Dans la partie suivante, nous introduisons les outils qui permettent de contrôler un point algébrique défini par une intersection de polynômes comme ci-dessus. Ensuite, nous en déduisons la minoration de la valeur d'un minimum local non nul de P puis une borne inférieure pour le minimum de $|P|$ sur un pavé où P ne s'annule pas et nous concluons en associant à chaque point x un tel pavé le contenant.

2 Hauteurs

La preuve du théorème utilise différentes notions de hauteurs dont nous rappelons ici les définitions et les propriétés que nous emploierons. Pour une partie finie F de $\bar{\mathbb{Q}}$ contenant un élément non nul, nous notons

$$h(F) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{x\in F} |x|_v$$

où la somme porte sur toutes les places du corps de nombres $K = \mathbb{Q}(F)$, les valeurs absolues étant normalisées par $|2|_v = 2$ si v est infinie et $|p|_v = p^{-1}$ si v est au-dessus de la place p de $\mathbb{Q}$. La hauteur ainsi définie est projective en vertu de la formule du produit (c'est-à-dire $h(aF) = h(F)$ pour tout $a \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$) et nous permet d'introduire la hauteur $h(y)$ d'un point y de $\mathbb{P}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ comme étant celle de l'un quelconque de ses systèmes de coordonnées. De la même façon, si P est un polynôme non nul à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$ (en un nombre quelconque de variables), $h(P)$ désignera la hauteur de la famille de ses coefficients. Dans les parties suivantes, nous manipulons des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, pour lesquels nous noterons $|P|$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de P de sorte que l'on a facilement $h(P) \leq \log |P|$.

Lorsque a est un élément de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$, nous ferons usage de l'inégalité de Liouville qui assure $\log |a|_v \geq -[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]h(1,a)$ pour toute place v de $\mathbb{Q}(a)$ (cette minoration découle facilement de la définition en écrivant $h(1,a) = h(1,a^{-1})$).

Enfin, nous aurons besoin de la notion de hauteur $h(X)$ d'un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Elle se définit soit à l'aide d'une forme de Chow (en suivant Philippon) soit en termes d'intersection arithmétique dans le cadre de la théorie d'Arakelov (en suivant Faltings, Bost, Gillet et Soulé). Ici nous utilisons [R1] comme référence et nous rappelons dans ce paragraphe toutes les propriétés utilisées plus bas. Considérons d'abord les deux cas extrêmes où $\dim X$ vaut n ou 0. Pour la hauteur de l'espace projectif, nous avons

$$h(\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{2\ell} = \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{n+1}{2\ell} \leq n \log(n+1).$$

Si maintenant y est un point fermé de $\mathbb{P}^n_{\bar{\mathbb{Q}}}$, la hauteur $h(\{y\})$ du sous-schéma fermé ponctuel $\{y\}$ diffère de $h(y)$ définie plus haut seulement en ce qu'elle fait intervenir aux places infinies la norme euclidienne $(|y_0|_v^2 + \cdots + |y_n|_v^2)^{1/2}$ au lieu de $\max |y_i|_v$.

Les hauteurs de sous-schémas apparaîtront essentiellement à travers le résultat d'intersection (ou de Bézout arithmétique) suivant, énoncé pour simplifier uniquement avec des schémas sur $\mathbb{Q}$ (dont la hauteur est par définition celle de leur extension à $\bar{\mathbb{Q}}$). On y note $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ pour une partie $\mathcal{P} \subset \mathbb{Q}[X_0, \ldots, X_n]$ le fermé de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ défini par l'idéal homogène engendré par $\mathcal{P}$.

Lemme 2.1 *Soient V un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{P}$ une famille de polynômes homogènes de $\mathbb{Q}[X_0, \ldots, X_n]$. On note δ un entier et H un réel tels que $\deg P \leq \delta$ et $h(P) \leq H$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Alors pour toute composante irréductible X du fermé $V \cap \mathcal{V}(\mathcal{P})$ on a*

$$\deg X \leq \deg V \delta^{\dim V - \dim X} \qquad \text{et}$$

$$h(X) \leq h(V)\delta^{\dim V - \dim X} + (\dim V - \dim X) \deg V \delta^{\dim V - \dim X - 1}(H + \sqrt{n}).$$

DÉMONSTRATION : Imaginons d'abord que la famille $\mathcal{P}$ soit réduite à un polynôme P. Dans ce cas, ou bien $V \cap \mathcal{V}(P) = V$ et les formules sont claires ou bien $V \cap \mathcal{V}(\mathcal{P})$ est équidimensionnel de dimension $\dim V - 1$. Dans cette dernière situation, le théorème 3.4 de [R1, p. 112] combiné avec le corollaire 3.6 qui le suit [R1, p. 116] montre

$$\deg X \leq \delta \deg X \qquad \text{et} \qquad h(X) \leq \delta h(V) + (\deg V) h_m(P)$$

avec la hauteur modifiée introduite dans [R1, p. 111]. Maintenant, grâce au lemme 5.2 de [R2, p. 300], nous avons $h_m(P) \leq h(P) + \sqrt{n} \leq H + \sqrt{n}$ et cela donne bien les formules de l'énoncé.

Dans le cas général, nous procédons par récurrence sur $d = \dim V - \dim X$. A nouveau, il n'y a rien à faire si $d = 0$. Si $d \geq 1$, on peut trouver une famille $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, un élément $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ et une composante Y de $V \cap \mathcal{V}(\mathcal{P}')$ de sorte que $\dim Y = \dim X + 1$ et X est une composante de $Y \cap \mathcal{V}(P)$. D'après ce qui précède

$$\deg X \leq \delta \deg Y \qquad \text{et} \qquad h(X) \leq \delta h(Y) + (\deg Y)(H + \sqrt{n})$$

tandis que par hypothèse de récurrence

$$\deg Y \leq \deg V \delta^{d-1} \qquad \text{et}$$

$$h(X) \leq h(V)\delta^{d-1} + (d-1) \deg V \delta^{d-2}(H + \sqrt{n}).$$

En combinant, nous obtenons exactement le résultat. □

Pour notre dernier énoncé préliminaire, nous utilisons le fait élémentaire suivant : si f est un polynôme non nul (sur un corps de caractéristique 0) de degré au plus d en chacune de ses variables, il existe un point x à coordonnées dans $\{0,1,\ldots,d\}$ tel que $f(x) \neq 0$.

Lemme 2.2 *Soient V un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ et Z un hyperplan de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ ne contenant pas V. Alors il existe un sous-schéma fermé irréductible X de dimension 0 de V ne rencontrant pas Z tel que $\deg X \leq \deg V$ et $h(X) \leq h(V) + (\dim V)(\deg V)(\log \deg V + \sqrt{n})$.*

Démonstration : Remarquons que la condition $X \cap Z = \emptyset$ entraîne $\dim X \leq 0$. Notons f une forme éliminante de V, L_0 une forme linéaire telle que $Z = V(L_0)$ et $L_1,\ldots,L_{\dim V}$ des formes linéaires telles que

$$f(L_0,L_1,\ldots,L_{\dim V}) \neq 0.$$

Il en existe car $V \not\subset Z$ et nous pouvons même les choisir à coefficients dans $\{0,\ldots,\deg V\}$. Alors n'importe quelle composante irréductible X de l'intersection $V \cap \mathcal{V}(L_1,\ldots,L_{\dim V})$ répond à la question car $\dim V \cap \mathcal{V}(L_1,\ldots,L_{\dim V}) \geq 0$ (dimension d'une intersection dans $\mathbb{P}^n$) et $X \cap Z = \emptyset$ par le théorème de l'élimination. Ainsi $\dim X = 0$ et les formules pour $\deg X$ et $h(X)$ découlent du lemme précédent avec $\delta = 1$ et $H = \log \deg V$. □

3 Minimum local

Nous établissons ici l'énoncé suivant.

Lemme 3.1 *Soient n et D deux entiers naturels. Si un polynôme P de degré au plus D de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ admet un minimum local en $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $P(x) > 0$ alors*

$$\log P(x) \geq -((n+1)D^n - 1) \log |P| - 2n^2 D^{n+1}.$$

Démonstration : Le cas d'un polynôme constant est clair et un polynôme de degré exactement 1 n'a pas de minimum local donc nous pouvons supposer $D \geq 2$ et $n \geq 1$.

Par hypothèse, nous avons clairement $(\partial P/\partial X_i)(x) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous considérons alors le sous-schéma fermé Y de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ défini par les homogénéisés Q_i des $\partial P/\partial X_i$ puis une composante irréductible (sur $\mathbb{Q}$) Y_1 de Y telle que $Y_1 \times \mathrm{Spec}\mathbb{R}$ contienne le point fermé $(1 : x)$. D'après les formules d'intersection du lemme 2.1 (puisque $\deg Q_i \leq D - 1$ et $|Q_i| \leq D|P|$) nous trouvons

$$\deg Y_1 \leq (D-1)^{\mathrm{codim} Y_1} \qquad \text{et}$$

$$h(Y_1) \leq (D-1)^{\mathrm{codim} Y_1} n \log(n+1) + (\mathrm{codim} Y_1)(D-1)^{\mathrm{codim} Y_1 - 1}(\log D|P| + \sqrt{n})$$

(rappelons $h(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}) \leq n \log(n+1)$). Par conséquent, par le lemme 2.2, il existe un sous-schéma fermé X de Y_1 irréductible sur $\mathbb{Q}$ de dimension 0, ne rencontrant pas l'hyperplan à l'infini et tel que

$$\deg X \leq (D-1)^n \qquad \text{et}$$

$$h(X) \leq (D-1)^n n \log(n+1) + (\mathrm{codim} Y_1)(D-1)^{n-1}(\log D|P| + \sqrt{n})$$
$$+ (\dim Y_1)(D-1)^{n-1}((n-1)\log(D-1) + \sqrt{n})$$

(nous avons majoré codimY_1 par n dans les exposants sauf dans le dernier terme car si $\dim Y_1 \neq 0$ on a $\mathrm{codimY}_1 \leq n-1$). Pour conclure, nous allons vérifier qu'il existe un point $y \in X(\mathbb{C})$ tel que, si $y = (1 : y_1 : \cdots : y_n)$, alors $P(y_1, \ldots, y_n) = P(x)$. Il suffit pour cela de choisir y dans la même composante irréductible Z de $Y_1 \times \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ que $(1 : x)$. Ceci est possible car X est défini sur $\mathbb{Q}$ et Y_1 irréductible sur $\mathbb{Q}$. Maintenant P est constant sur $Z \cap \mathbb{C}^n$ puisque toutes ses dérivées y sont nulles.

Ainsi il reste à minorer $P(y_1, \ldots, y_n)$. Bien entendu, comme $\dim X = 0$, ce nombre est algébrique de degré au plus $\deg X$. Par suite l'inégalité de Liouville donne $\log P(y_1, \ldots, y_n) \geq -(\deg X) h(1, P(y_1, \ldots, y_n))$ et, d'autre part,

$$h(1, P(y_1, \ldots, y_n)) \leq \log |P| + (D/2)\log(n+1) + Dh(\{y\}).$$

Ainsi

$$\log P(x) \geq -(\deg X)\log|P| - (D/2)(\deg X)\log(n+1) - Dh(X)$$

car $(\deg X)h(\{y\}) = h(X)$ puisque X n'est autre que la réunion des conjugués de y. Si l'on substitue dans cette expression les majorations pour $h(X)$ et $\deg X$ on constate que le coefficient de $\log|P|$ est

$$-(D-1)^n - (\mathrm{codim} Y_1)D(D-1)^{n-1} \geq -(n+1)D^n + 1$$

comme prévu. Pour le reste, il suffit de montrer

$$(D/2)(D-1)^n \log(n+1) + D(D-1)^n n \log(n+1) + (\mathrm{codim} Y_1)D(D-1)^{n-1}(\log D + \sqrt{n})$$
$$+ (\dim Y_1)D(D-1)^{n-1}((n-1)\log(D-1) + \sqrt{n}) \leq 2n^2 D^{n+1}.$$

Si $n = 1$, on remarque que $\dim Y_1 = 0$ et donc ceci équivaut à $(3/2)D(D-1)\log 2 + D(\log D + 1) \leq 2D^2$ facilement vrai. Sinon on majore aussi bien $\log D + \sqrt{n}$ que $(n-1)\log(D-1) + \sqrt{n}$ par $(n-1/2)D$ de sorte que le membre de gauche ci-dessus est au plus

$$(n+1/2)D^{n+1}\log(n+1) + (\mathrm{codim} Y_1 + \dim Y_1)D^n(n-1/2)D.$$

Enfin $\mathrm{codim} Y_1 + \dim Y_1 = n$ et $\log(n+1) \leq n$ donc, en substituant, notre majorant devient exactement $2n^2 D^{n+1}$. □

4 Minimum sur un pavé

Lemme 4.1 *Soient n et D deux entiers naturels puis $r_1, \ldots, r_n$ et $s_1, \ldots, s_n$ des éléments de $\mathbb{Q}$. Notons A le pavé de $\mathbb{R}^n$ donné par*

$$A = \prod_{i=1}^{n} [r_i, s_i].$$

Si un polynôme P de degré au plus D de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ne s'annule pas sur A, alors

$$\min_{x \in A} \log|P(x)| \geq -(n+1)D^n \log|P| - nD^n \eta - 2n^2 D^{n+1}$$

où $\eta = h(1, r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n)$.

DÉMONSTRATION : Nous notons a le plus petit dénominateur commun des r_i,s_i de sorte que $\eta = \log\max(a,|ar_1|,\ldots,|ar_n|,|as_1|,\ldots,|as_n|)$. Considérons maintenant un point $x \in A$ où le minimum est atteint. Quitte à changer P en $-P$, nous supposons $P(x) > 0$. Dans ces conditions, si x est un point intérieur de A, un minimum local de P est atteint en x et le résultat découle immédiatement du lemme 3.1. Sinon x est au bord de A. Quitte à permuter les coordonnées, nous supposons que pour un entier m avec $0 \leq m \leq n-1$ nous avons

$$r_i < x_i < s_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq m$$

$$x_i = r_i \quad \text{ou} \quad x_i = s_i \qquad \text{pour} \quad m < i \leq n.$$

Considérons alors le polynôme $R \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m]$ défini par

$$R(X_1,\ldots,X_m) = a^D P(X_1,\ldots,X_m,x_{m+1},\ldots,x_n).$$

Par construction R admet un minimum local au point $(x_1,\ldots,x_m)$. Donc d'après le lemme 3.1 nous avons

$$\log P(x) = \log(R(x_1,\ldots,x_m)a^{-D}) \geq -((m+1)D^m - 1)\log|R| - 2m^2 D^{m+1} - D\log a.$$

A présent, chaque coefficient de R s'obtient en évaluant un polynôme de degré au plus D de $\mathbb{Z}[X_{m+1},\ldots,X_n]$ en $(x_{m+1},\ldots,x_n)$. Comme un tel polynôme a au plus $(D+1)^{n-m}$ coefficients, il vient

$$\log|R| \leq \log|P| + D\eta + (n-m)\log(D+1).$$

Cela entraîne alors (avec $\log a \leq \eta$)

$$\begin{aligned}\log P(x) \geq & -((m+1)D^m - 1)\log|P| - (m+1)D^{m+1}\eta \\ & - 2m^2 D^{m+1} - (n-m)(m+1)D^m \log(D+1).\end{aligned}$$

Finalement $m+1 \leq n$ et $2m^2 + (n-m)(m+1) \leq 2n^2$ donc

$$\log P(x) \geq -nD^{n-1}\log|P| - nD^n\eta - 2n^2 D^n$$

ce qui termine la démonstration. □

5 Conclusion

Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 1.1 et nous posons $\rho = \mathrm{dist}^*(x,Z(P))$. Si $\rho = 0$, nous avons $P(x) = 0$ et le résultat est évident. Nous supposons donc $\rho > 0$ et définissons a comme l'unique entier tel que

$$\frac{1}{\rho} < a \leq \frac{1}{\rho} + 1.$$

Ensuite, pour $1 \leq i \leq n$, nous introduisons b_i comme l'unique entier tel que

$$b_i \leq ax_i < b_i + 1.$$

De cette façon, nous avons

$$x_i - \rho < \frac{b_i}{a} \leq x_i \leq \frac{b_i+1}{a} < x_i + \rho$$

et donc x est élément du pavé

$$A = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{b_i}{a},\frac{b_i+1}{a}\right]$$

dont tout point y vérifie $|x-y|<\rho$. Par suite, P ne s'annule pas sur A et nous pouvons appliquer le lemme 4.1. Il reste à évaluer

$$\eta = \max(a,|b_1|,|b_1+1|,\ldots,|b_n|,|b_n+1|).$$

Or, par définition, $a \leq (1/\rho)+1 \leq 2/\rho$ et $\max(|b_i|,|b_i+1|) \leq a|x_i|+1 \leq (2/\rho)|x|^*+1 \leq 3|x|^*/\rho$. Par conséquent, nous avons $\eta \leq 3|x|^*/\rho$ et finalement

$$|P(x)| \geq \min_{y\in A}|P(y)| \geq |P|^{-(n+1)D^n}\eta^{-nD^n}e^{-2n^2D^{n+1}} \geq (e^{2nD}H)^{-(n+1)D^n}\left(\frac{\rho}{|x|^*}\right)^{nD^n}.$$

Références

[B] W. D. Brownawell. The Hilbert Nullstellensatz, inequalities for polynomials, and algebraic independence. Chapitre 16 de : Introduction to algebraic independence theory (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). *Lecture Notes in Math.* 1752. Springer-Verlag. 2001. p. 239–248.

[R1] G. Rémond. Géométrie diophantienne multiprojective. Chapitre 7 de : Introduction to algebraic independence theory (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon). *Lecture Notes in Math.* 1752. Springer-Verlag. 2001. p. 95–131.

[R2] G. Rémond. Sur le théorème du produit. *J. Théor. Nombres Bordeaux.* 13. 2001. p. 287–302.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France
Gael.Remond@ujf-grenoble.fr