VERSIONS COMBINATOIRES DE $\mathrm{Diff}(S^1)$. GROUPES DE THOMPSON

Vlad SERGIESCU

Prépublication de l'Institut Fourier n° 630 (2003)

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

En souvenir de Sasha Reznikov

1. Introduction

Le but de cet article de synthèse est double : introduire trois versions combinatoires continues du groupe des difféomorphismes du cercle et présenter quelques aspects des groupes de Thompson qui s'y rattachent. Ceux-ci peuvent être perçus comme des analogues discrets dénombrables de $\mathrm{Diff}(S^1)$.

Les versions continues dont il s'agit sont d'abord le groupe $\mathrm{PL}(S^1)$ des homéomorphismes linéaires par morceaux de S^1 et le groupe CPP des homéomorphismes projectifs par morceaux de classe $\mathscr{C}^1$ de la droite projective réelle $\mathbb{R}P^1$. Nous mentionnerons aussi le groupe N des homéomorphismes de la droite projective 2-adique $\mathbb{Q}_2 P^1$ qui proviennent de certains automorphismes partiels de l'arbre de Bruhat-Tits.

Les groupes de Thompson F, T, V sont des sous-groupes dénombrables des groupes ci-dessous ayant un caractère binaire. Les deux premiers F et T se plongent comme sous-groupes discrets de $\mathrm{Diff}(S^1)$. En suivant ce point de vue, nous décrirons diverses propriétés cohomologiques et géométriques.

Nous aborderons aussi les groupes $\mathrm{PL}(S^1)$, CPP et N du point de vue cohomologique. En particulier, nous insisterons sur le rôle de l'analogue discret $\overline{gv}$ de la classe de Bott-Thurston-Virasoro.

Enfin, nous indiquerons quelques relations avec la théorie de Teichmüller en dimension infinie.

Des compléments divers concluent cet article.

Il n'est pas question, faute de place, de donner des démonstrations. Cependant, nous essayons d'en donner quelques idées et arguments.

Classification math. : 20, 57, 58, 81.

Mots-clés : difféomorphismes, Thompson, cercle, S^1, groupe.

Dorénavant, tous les homéomorphismes sont supposés préserver l'orientation.

2. Trois versions combinatoires de Diff (S^1)

Nous définissons trois groupes d'homéomorphismes du cercle S^1, de la droite projective $\mathbb{R}P^1$ et de la droite projective 2-adique $\mathbb{Q}_2P^1$.

DÉFINITION 2.1. — i) On désigne par $\mathrm{PL}(S^1)$ le groupe des homéomorphismes de S^1 qui sont linéaires par morceaux.

ii) On désigne par CPP le groupe des homéomorphismes de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}P^1$.

iii) Soit $\mathscr{T}_2$ un arbre régulier trivalent. Son bord, $\partial\mathscr{T}_2$, est l'ensemble des chemins allant à l'infini, muni de la relation d'équivalence coïncidence asymptotique. Un automorphisme partiel de $\mathscr{T}_2$ est un homéomorphisme combinatoire entre les complémentaires de deux sous-arbres finis ayant le même nombre d'extrémités. On désigne par N le groupe des extensions au bord $\partial\mathscr{T}_2$ des automorphismes partiels de $\mathscr{T}_2$.

Remarques.

i) Le groupe CPP a été introduit et étudié par P. Greenberg dans [Gr1]. Son origine remonte à l'exemple de Moulton de plan non-désarguien [BW]. La condition $\mathscr{C}^1$ assure que ce groupe agit sur les horocycles du disque de Poincaré.

ii) Le groupe N a été introduit par Neretin [Ne] comme analogue 2-adique de $\mathrm{Diff}(S^1)$. Notons que le bord $\partial\mathscr{T}_2$ est homéomorphe à la droite projective $\mathbb{Q}_2P^1$. C'est, topologiquement, un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un compact totalement discontinu, sans points isolés.

Les groupes que l'on vient de définir sont essentiellement simples.

THÉORÈME 2.2. — *i) Le groupe* $\mathrm{PL}(S^1)$ *est simple* ([E]).

ii) Le groupe CPP *a un commutateur simple. Son abélianisé est isomorphe à* $\mathbb{R}$ ([BW]).

iii) Le groupe N *est simple* ([K1]).

Voici en revanche une propriété qui distingue les groupes Diff et PL. Un sous-groupe $\mathrm{G} \subset \mathrm{Diff}(S^1)$ (resp. $\mathrm{PL}(S^1)$) est un cercle exotique s'il existe un homéomorphisme h tel que $h\mathrm{G}h^{-1} = \mathrm{SO}(2)$ et tel que $h \notin \mathrm{Diff}(S^1)$ (resp. $h \notin \mathrm{PL}(S^1)$).

On a alors le théorème suivant dû à Montgomery-Zippin et a Minakawa (voir [Mi2]).

THÉORÈME 2.3. — *i) Il n'existe pas de cercle exotique dans* $\mathrm{Diff}(S^1)$.

ii) Il existe des cercles exotiques dans $\mathrm{PL}(S^1)$.

Remarquons que des résultats similaires ne sont pas connus pour CPP.

3. Les groupes de Thompson

Cette section introduit les groupes de Richard J. Thompson. Il s'agit de 3 groupes F, T et V qui présentent une grande ubiquité. Aussi il n'est pas surprenant que nous disposions de plusieurs définitions (équivalentes !).

Nous choisissons de commencer avec le point de vue PL (voir aussi [CFP]).

DÉFINITION 3.1. — i) On note F le groupe des homéomorphismes PL de $[0,1]$ qui ont des points singuliers sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ et qui sont localement de la forme $2^n x + \frac{p}{2^q}$, $n,p,q \in \mathbb{Z}$.

ii) On désigne par T le sous-groupe de $\mathrm{PL}(S^1)$ vérifiant les mêmes conditions que dans i) et tel que l'image de $0 = 1 \in S^1$ est un dyadique de S^1.

iii) Un échange affine d'intervalles est une bijection de $[0,1]$ qui est affine en dehors d'un nombre fini de points.

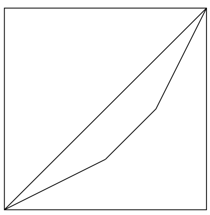
On désigne par V le groupe des échanges de $[0,1]$ qui sont de la forme $2^n x + \frac{p}{2^q}$ sur chaque intervalle échangé (qui est d'extrémités dyadiques), quitte à les identifier lorsqu'ils coïncident presque partout.

Remarques.

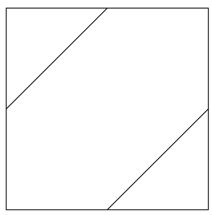
i) Le groupe F s'identifie au stabilisateur de $0 = 1 \in S^1$ dans T. En particulier $\mathrm{F} \subset T$.

ii) Le groupe V peut être aussi regardé comme groupe d'échanges d'intervalles sur S^1. On voit alors que $\mathrm{T} \subset \mathrm{V}$. D'où $\mathrm{F} \subset \mathrm{T} \subset \mathrm{V}$.

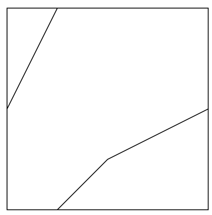
Exemples.



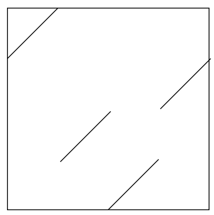
$\alpha \in F$



$\beta \in T$



$\gamma \in T$



$\delta \in V$

Les éléments β, γ sont dessinés sur l'intervalle. Le lecteur observera les identifications à faire.

Commentaire historique Les groupes F, T, V apparaissent pour la première fois dans les travaux de R.J. Thompson en logique et théorie des groupes [MT], [Th] (voir [Bro1]). On lui doit, entre autres le :

THÉORÈME 3.2. — *i) Les groupes* F, T *et* V *sont de présentation finie.*

ii) Les groupes $[\mathrm{F},\mathrm{F}]$, T *et* V *sont simples.*

On trouvera dans [CFP] des preuves proches de celles de Thompson (voir aussi [Bro1]).

Remarque. —

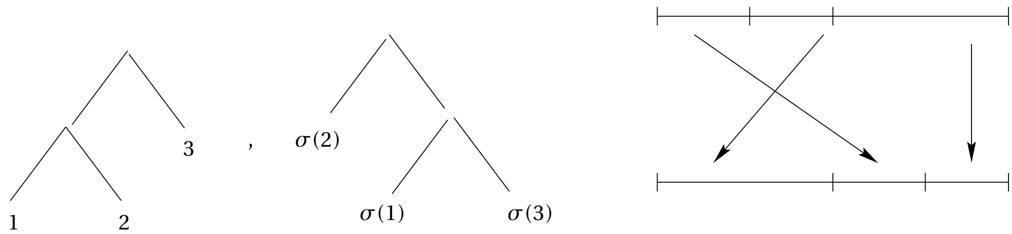
i) Les groupes T et V sont les premiers groupes de présentation finie simples (infinis !) connus. Une propriété de finitude plus forte apparaîtra plus loin.

ii) Il existe relativement peu de tels groupes. Des exemples nouveaux sont dus à Röver [Ro], Nekrashevich [N] et Burger-Mozes [BM]

iii) Les groupes F, T et V ont été redécouverts un certain nombre de fois. En particulier, une présentation infinie de F joue un rôle important : $\mathrm{F} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots \mid \alpha_i^{-1}\alpha_j\alpha_i = \alpha_{j+1}, i < j\rangle$. L'élément α_0 est α dans l'exemple 3. L'élément α_i est semblable à α : son support est dans $\left[1 - \frac{1}{2^i}, 1\right]$ (voir [CFP]).

D'autres définitions des groupes F, T et V s'avèrent utiles et intéressantes. Nous allons indiquer quelques-unes d'entre elles (voir [Bro1], [CFP], [I] pour leur équivalence, ainsi que pour plus de détails).

Définition 3.3. — i) Un élément de V et un triplet (t_1, t_2, σ) où t_1, t_2 sont des arbres binaires enracinés et σ une bijection entre les extrémités. Cette représentation est unique à une équivalence près.

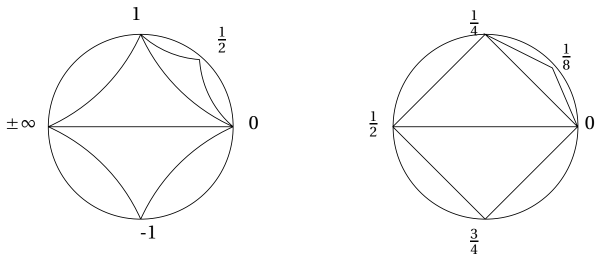


Les groupes F et T correspondent au choix σ croissante et σ cyclique, respectivement.

ii) Un élément de V définit uniquement un homéomorphisme de l'ensemble de Cantor triadique. En effet, la donnée (t_1, t_2, σ) définit un « échange » des intervalles dans la définition inductive habituelle de cet ensemble.

iii) Supposons que les arbres t_1, t_2 soient des sous-arbres sans racine de l'arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{T}_2$. La donnée (t_1, t_2, σ) définit encore un élément de V. En passant au complémentaire, on définit un automorphisme partiel de $\mathcal{T}_2$ et donc un élément de N. Ceci produit alors une inclusion $\mathrm{V} \subset \mathrm{N}$.

iv) Soit $\overline{\mathrm{T}}$ le groupe des homéomorphisme de $\mathbb{R}P^1$ qui sont $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ par morceaux avec rupture sur $\mathbb{Q}P^1$. Remarquons que $\overline{\mathrm{T}} \subset \mathrm{CPP}$: ceci provient du fait que le stabilisateur d'un rationnel dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est formé d'élements paraboliques, dont la dérivée est égale à 1.
Le fait remarquable est que $\overline{\mathrm{T}}$ est isomorphe à T. Voici une esquisse de démonstration de ce résultat :
Considérons la mosaïque de Farey τ du disque hyperbolique D^2, dont le bord est $\mathbb{R}P^1$ et dont les sommets s'identifient aux rationnelles $\mathbb{Q}P^1 \subset \mathbb{R}P^1$. Considérons aussi le modèle du pavage de Farey, dont les sommets sont les dyadiques.



Soit $h : S^1 \to \mathbb{R}P^1$ l'homéomorphisme qui envoie les dyadiques sur les rationnels tels que $0 \mapsto 0$, $\frac{1}{2} \mapsto \pm\infty$, $\frac{1}{4} \mapsto 1$, $\frac{1}{8} \mapsto \frac{1}{2}$, *etc.* : il s'agit de respecter le « milieu ».

Affirmation $h\mathrm{T}h^{-1} = \overline{\mathrm{T}}$. Cette remarque est due à Thurston.

Remarquons aussi que si a et b sont les générateurs de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ tels que $a^2 = e$, $b^3 = e$, il est possible d'engendrer T avec deux éléments a' et b, où $a'^2 = a$ ([LS]).

v) R. Penner [P] a introduit un groupe (et un groupoïde) de Ptolémée à partir de l'approche hyperbolique à l'espace de Teichmüller (universel) (voir aussi [I]). Il se trouve que le groupe de Ptolémée est isomorphe au groupe de Thompson T.

vi) Une dernière définition qui paraîtra très abstraite mais est néanmoins utile se trouve dans le contexte de l'algèbre universelle. On appelle algèbre de Tarski-Jonsson un ensemble X muni d'une bijection $X \times X \to X$. On peut démontrer que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Tarski-Jonsson libre sur un élément est identique à V.

4. Cohomologie des groupes continus

La nature combinatoire des groupes $\mathrm{PL}(S^1)$, CPP et N fait que leur cohomologie est plus facile à comprendre que celle de $\mathrm{Diff}(S^1)$. Pour les deux premiers, ceci est dû principalement à l'existence de la méthode de P. Greenberg pour déterminer le classifiant de Haefliger des pseudogroupes associés ([Gr2]).

Rappelons que l'espace classifiant BG d'un groupe discret G, est défini, à équivalence homotopique près, par les conditions $\pi_1(\mathrm{BG}) = 0$ et $\pi_k(\mathrm{BG}) = 0$, $k \geqslant 2$. La cohomologie de BG est alors isomorphe à la cohomologie de G (voir [Bro]).

Pour simplifier les énoncés, nous donnons des résultats pour les groupes PL_0 et CPP_0 des éléments égaux à l'identité autour de 0.

Théorème 4.1 ([Gr1], [Gr2]). — *i) La cohomologie du groupe* PL_0 *est isomorphe à celle de l'espace de lacets* $\Omega(\mathrm{B}\mathbb{R} * \mathrm{B}\mathbb{R})$.

ii) La cohomologie du groupe CPP_0 *est isomorphe à celle de l'espace* $\Omega(\mathrm{B}\,\widetilde{\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}}_+)$.

(Rappelons que la construction + de Quillen d'un espace abélianise le groupe fondamental sans modifier l'homologie.)

La partie ii) du théorème a été utilisée dans [GrS1] pour construire une extension acyclique d'un groupe proche de CPP_0 par $\widetilde{\mathrm{PSL}_2}\,\mathbb{R}$. En divisant par le commutateur du noyau, on obtient alors l'extension de Milnor-Steinberg qui définit le groupe de K-théorie $K_2(\mathbb{R})$.

La partie i) permet de calculer explicitement l'homologie de $\mathrm{PL}_0(S^1)$. En particulier $H_1(\mathrm{PL}_0(S^1);\mathbb{Z}) = 0$ et $H_2(\mathrm{PL}_0(S^1);\mathbb{Z}) = \mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Il est remarquable que sur $\mathrm{PL}(S^1)$ il existe une version combinatoire, $\overline{gv}$, du cocycle de Bott-Thurston, introduite dans [GS] et [G1].

Définition 4.2. — Soit $\overline{gv}(f,g) = \sum_{x\in S^1} \begin{vmatrix} \log g'_+(x) & \log(f\circ g)'_+(x) \\ \log g'_-(x) & \log(f\circ g)'_-(x) \end{vmatrix}$.

Alors $\overline{gv}$ est un 2-cocycle sur $\mathrm{PL}(S^1)$. En fait, si on remplace dans le déterminant le produit par le produit tensoriel, la même formule définit un cocycle à valeurs dans $\mathbb{R} \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

De même que pour la classe $\mathbf{BT} \in H^2(\mathrm{Diff}(S^1);\mathbb{R})$, il existe un théorème de variation continue pour la classe $\overline{gv}$; ce pendant au résultat de Thurston est dû à Hashiguchi-Minakawa [HM].

Le groupe $\mathrm{PL}(S^1)$ et la classe $\overline{gv}$ jouent un rôle dans l'étude des feuilletages, même dans le cas différentiable.

Il est connu [R] que la classe de Godbillon-Vey est invariante par conjugaison $\mathscr{C}^1$. On se demande toujours si ceci est vrai en classe $\mathscr{C}^0$.

La réponse partielle suivante est due à Ghys [G1] :

Théorème 4.3. — *Le feuilletage horocyclique de Roussarie est conjugué à un feuilletage suspension* [HH]*, dont l'holonomie globale est contenue dans* $\mathrm{PL}(S^1)$*. Aussi, pour les feuilletages* $\mathscr{C}^\infty$ *par morceaux, la classe* $\mathbf{GV}$*, qui est bien définie, n'est pas invariante par homéomorphisme.*

Remarque. — Une étude détaillée du domaine de définition des classes $\overline{gv}$ et $\mathbf{BT}$ se trouve dans [T] et les références qui s'y trouvent.

Une autre application concerne la question de savoir si un feuilletage $\mathscr{F}$, dont l'invariant $\mathbf{GV}(\mathscr{F}) = 0$ sur une variété compacte de dimension 3 est cobordant à 0.

D'après des résultats de Haefliger et Thurston, ceci est équivalent au fait de savoir si $H_2(\mathrm{Diff}(S^1);\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{R}$. T. Tsuboi a démontré que ceci est « presque » vrai : le feuilletage est approchable par des feuilletages cobordants à zéro dans un sens « convenable ».

L'énoncé exact de ce résultat est trop complexe pour être reproduit ici ; nous renvoyons à [T] pour une introduction exhaustive à ce théorème remarquable.

Terminons par deux résultats sur le groupe N dus à Kapoudjian :

Théorème 4.4 ([K2]). — *i) La cohomologie* $H^*(\mathrm{N};\mathbb{Q})$ *de* N *à coefficients rationnels est triviale.*

ii) $H^2(\mathrm{N};\mathbb{Z}/2) \neq 0$ *: il existe sur* N *une classe généralisant celle de Bott-Thurston dans un sens convenable.*

5. Cohomologie des groupes de Thompson

La cohomologie des groupes de Thompson a diverses propriétés remarquables, dont la première est d'être calculable dans nombre de cas.

Nous commençons avec un résultat général de finitude :

THÉORÈME 5.1. — *Les groupes* F, T, V *sont de type* FP_∞. *En particulier, leur cohomologie à coefficients quelconques est de type fini si le module est finiment engendré comme groupe abélien.*

Nous ne donnons pas la définition un peu technique d'être FP_∞ (voir [Bro]). La situation type correspond aux groupes G qui ont un espace classifiant BG homotopiquement équivalent à un complexe avec un nombre fini de cellules en chaque dimension, par exemple une variété compacte ou bien l'espace $\mathbb{R}P^\infty$.

Dans le cas des groupes de Thompson, divers espaces classifiants sont construits dans [BroG], [St], [Bro1], *etc.*

Signalons aussi le

COROLLAIRE 5.2 ([BroG]). — *Le groupe* F *est à la fois sans torsion, de dimension cohomologique infinie et* FP_∞.

La première propriété vient de ce que F agit sur l'intervalle. Pour la seconde, il suffit de remarquer qu'il contient des groupes abéliens de rang arbitrairement grand.

Passons à présent au calcul de la cohomologie.

Le théorème suivant est dû à Brown et Geoghegan (voir [Bro1]) :

THÉORÈME 5.3. — *On a* $H^*(\mathrm{G};\mathbb{Z}[\mathrm{G}])=0$ *si* G *est l' un des trois groupes de Thompson.*

La cohomologie à coefficients triviaux de F et T est abordable par le schéma indiqué pour le groupe $\mathrm{PL}(S^1)$. Quant à V, la méthode est différente. Voici quelques résultats significatifs :

THÉORÈME 5.4 ([GS], [Bro2], [K2]). — *i) La cohomologie de* F *à coefficients* $\mathbb{Z}$ *est celle de l'espace* $\Omega S^3\times S^1\times S^1$.

ii) La cohomologie de T *est celle de l'espace de lacets libres non paramétrés* $\mathrm{L}S^3=\Lambda S^3\underset{S^1}{\times}\mathrm{E}S^1$.

iii) La cohomologie de V *à coefficients rationnels* $H^*(\mathrm{V};\mathbb{Q})$ *est triviale. De plus,*

$$H^3(\mathrm{V};\mathbb{Z})=H^2(\mathrm{V};\mathbb{Z})=H^1(\mathrm{V};\mathbb{Z})=0.$$

Le corollaire suivant est particulièrement intéressant pour nous :

COROLLAIRE 5.5. — *La cohomologie* $H^*(\mathrm{T};\mathbb{R})$ *est isomorphe multiplicativement à l'algèbre* $\frac{\mathbb{R}[\overline{gv},Eu]}{\overline{gv}\cdot Eu=0}$. *Elle est donc isomorphe à la cohomologie continue* $H^*_c(\mathrm{Diff}(S^1))$.

Nous reviendrons plus tard sur ce résultat.

Pour finir, nous allons décrire la cohomologie entière $H^*(\mathrm{T};\mathbb{Z})$. Son calcul résulte essentiellement du théorème 5.4 et d'un théorème de Carlson-Cohen (voir [H]).

Remarquons que la classe d'Euler Eu est à coefficients entiers. De même, la cochaîne $\overline{gv}_2$, donnée par la même formule que $\overline{gv}$ en remplaçant log par $\log_2$ (logarithme en base 2), est à coefficients entiers.

On a alors :

$$H^{2n+1}(\mathrm{T};\mathbb{Z}) = 0\,,\ n \geqslant 0$$
$$H^{2n}(\mathrm{T};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n-1\,,\ n \geqslant 3$$

où la partie libre est engendrée par Eu^n et par $\frac{\overline{gv}_2^n}{2^n n!}$ (qui est une classe entière !).

6. T est-il un réseau de Diff (S^1) ?

Dans ce chapitre, nous discutons des propriétés du groupe T à partir de son analogie avec un éventuel réseau de $\mathrm{Diff}(S^1)$.

Le théorème de lissage suivant se trouve dans [GS].

THÉORÈME 6.1 ([GS]). — *Il existe des plongements de* T *dans* $\mathrm{Diff}(S^1)$. *Ils dépendent d'un paramètre fonctionnel. On peut en choisir de telle façon que l'image soit discrète.*

Le paramètre mentionné est une application de degré 2 de S^1 *qui fixe* 0 *et est tangente à l'identité.*

Remarquons que ce théorème ne dit rien sur le quotient $\frac{\mathrm{Diff}(S^1)}{\mathrm{T}}$.

Cependant, T ressemble à un sous-groupe cocompact dans la mesure où, comme on l'a vu, la cohomologie $H^*(\mathrm{T};\mathbb{R}) \simeq H^*_c(\mathrm{Diff}(S^1))$. Cette propriété est proche de celle donnée par un théorème de Borel-Matsushima sur la cohomologie des sous-groupes discrets d'un groupe de Lie ([Bo]).

La situation pourra davantage intriguer en notant que l'isomorphisme ci-dessus ne provient pas des lissages (qui induisent 0 en cohomologie) mais du calcul indépendant des deux termes.

Notons aussi que la propriété d'annulation $H^*(\mathrm{T};\mathbb{Z}[\mathrm{T}]) = 0$ est à rapprocher de la dualité de Poincaré pour les groupes [Bro].

L'analogie avec les réseaux des groupes de Lie est soulignée par le théorème :

THÉORÈME 6.2 (Brin, [B1]). — *Le groupe des automorphismes extérieurs de* T *est égal à l'identité.*

La même analogie a conduit à se demander [GS] si le groupe T a la propriété de Kazhdan.

La réponse est due à Reznikov [Re] (voir aussi [Na], [F]).

THÉORÈME 6.3. — *Le groupe* T *n'a pas la propriété de Kazhdan, i.e. il existe un* T*-module unitaire* $\mathscr{H}$*, tel que* $H^1(\mathrm{T};\mathscr{H}) \neq 0$.

Dans le même contexte, la question suivante a reçu beaucoup d'attention :

Problème (Von Neumann) Le groupe F est-il moyennable ? En fait, ce qui est remarquable est que F ne contient pas de sous-groupe libre à 2 générateurs (voir [CFP]) tout en étant de présentation finie.

Quelques résultats de moyennabilité « faible » sont connus. On pense cependant (y compris l'auteur) que F n'est pas moyennable.

Notons que dans un article difficile Olshanski et Sapir, [OS] viennent de construire un groupe non-moyennable de présentation finie, sans sous-groupe libre non-cyclique..

Terminons ce paragraphe avec quelques conséquences de l'existence de lissages $\mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{Diff}(S^1)$.

THÉORÈME 6.4 ([GS]). — *Le nombre de rotation des éléments de* T *est rationnel.*

Ceci est l'application du théorème de Denjoy (voir [HH]) à certains lissages qui laissent invariant un ensemble de Cantor.

THÉORÈME 6.5 ([GS], [Mi1]). — *Il existe des morphismes* $\pi_1(\Sigma_g) \xrightarrow{\mathscr{S}} \mathrm{Diff}(S^1)$ *avec ensemble de Cantor invariant tel que la classe d'Euler* $\mathrm{Eu}(\mathscr{S})$ *évaluée sur* $[\Sigma_g]$ *prend toute valeur strictement inférieure à* $|\chi(\Sigma_g)|$.

Un théorème de type Milnor-Wood dû à Ghys [G2] dit que, dans notre situation, l'inégalité de Milnor-Wood est stricte. Aussi ce résultat montre que cette inégalité stricte est optimale.

7. Le groupe T, le groupe modulaire et l'espace de Teichmüller

Dans un sens cette section complète la précédente. On sait depuis les années 80 que le groupe modulaire de Teichmüller, c'est-à-dire le groupe des isotopies d'une surface se rapproche lui aussi d'un réseau arithmétique (Harvey, Harer, Ivanov). Pour fermer la boucle, nous regardons ici le groupe de Thompson par analogie au groupe modulaire de Teichmüller.

Un des faits essentiels sur le groupe modulaire est qu'il agit sur l'espace de Teichmüller, avec l'espace des modules des surfaces de Riemann comme quotient. Nous allons définir un espace de Teichmüller associé au groupe T. Remarquons d'abord que l'analogue combinatoire CPP introduit dans 4est inclus dans le groupe $\mathbb{Q}S(S^1)$ puisqu'il consiste d'homéomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$.

DÉFINITION 7.1. — Soit $\mathrm{CPP}_{\mathbb{Q}}$ le sous-espace de CPP des homéomorphismes dont les singularités sont dans $\mathbb{Q}P^1$. On définit l'espace de Greenberg $\mathcal{G}_r = \mathrm{CPP}_{\mathbb{Q}}\,/\,\mathrm{PSL}_2\ \mathbb{R}$ que l'on appelle aussi espace de Teichmüller associé au groupe de Thompson.

Remarques.

i) Cette notion n'a rien à voir avec l'espace de Teichmüller d'un groupe fuchsien : dans ce dernier cas le groupe fuchsien n'agit pas sur l'espace.

ii) Par contre, l'espace $\mathcal{G}_r$ se plonge dans l'espace de Teichmüller universel de Bers $\mathbb{Q}S(S^1)\,/\,\mathrm{PSL}_2\ \mathbb{R}$, d'après l'observation ci-dessus.

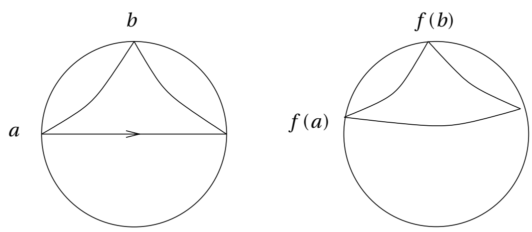
Le théorème suivant est dû à Greenberg. Notre approche ici, ainsi que sa preuve complète, sont dues à X. Martin [Ma] :

Théorème 7.2. — *L'espace $\mathcal{G}_r$ est contractile. Le stabilisateur d'un point de $\mathcal{G}_r$ est conjugué à* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *à moins qu'il soit un groupe fini cyclique.*

La démonstration est basée sur l'approche de Penner de l'espace de Teichmüller universel, dont nous décrivons quelques éléments. Il s'agit de donner des coordonnées globales sur l'espace homogène $\mathrm{Homeo}(\mathrm{RP}^1)\,/\,\mathrm{PSL}_2\,(\mathbb{R}) \supset T(1)$ (cf. [P]).

i) Le premier point est d'identifier ce dernier espace à l'espace Tess des mosaïques hyperboliques idéales avec une arête marquée (modulo $\mathrm{PSL}_2\ \mathbb{R}$). La mosaïque de Farey τ en est un exemple, muni de l'arête allant de ∞ à 0 (voir 3.3).

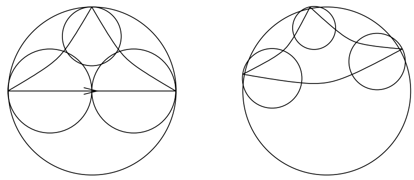
À un homéomorphisme f on associe la mosaïque $f(\tau)$ dont les sommets sont $f(\mathbb{Q})$. L'arête orientée va de $f(\infty)$ à $f(0)$. Pour chaque arête de a à b de τ, on définit une arête $f(\tau)$ qui est la géodésique *hyperbolique* allant de $f(a)$ à $f(b)$.



ii) Penner définit aussi l'espace $\widetilde{\mathrm{Tess}}$ des mosaïques décorées de D^2 : ce sont des mosaïques avec un horocycle en chaque sommet. L'exemple type $\tilde{\tau}$ est la mosaïque de Farey avec la décoration de Ford :

Penner construit ensuite des coordonnées globales $\Lambda : \widetilde{\mathrm{Tess}} \to \mathbb{R}^\infty$, appelées lambda coordonnées : il s'agit de mesurer sur chaque arête, la distance entre les horocycles aux extrémités.

iii) La preuve de X. Martin consiste à remarquer d'abord qu'il existe une section s de la projection naturelle $\pi\ :\ \widetilde{\mathrm{Tess}}\ \to\ \mathrm{Tess}$ au-dessus de $\mathcal{G}_r$. À $f\ \in\ \mathcal{G}_r$, on associe la mosaïque décorée $f(\tilde{\tau})$ en décorant $f(\tau)$ à chaque sommet avec l'image par f d'un cercle de Ford.



Le fait remarquable que cette image *est* un horocycle provient du fait qu'en tout rationnel, les germes à gauche f_g, et à droite f_d diffèrent par un homéomorphisme *parabolique* qui est $f_g^{-1} \circ f_d$.

La partie principale de la preuve consiste à montrer que $\Lambda \circ s$ est un homéomorphisme sur un sous-espace contractile de $\mathbb{R}^\infty$, qui est une limite inductive d'espaces de dimension finie.

Digression L'algèbre de Lie de Malikov-Penner [MP].

Il s'agit de l'algèbre $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs sur RP^1 qui sont $\mathfrak{psl}_2\ \mathbb{R}$ par morceaux, non définis dans un nombre fini de rationnels. La dernière condition assure que le crochet est bien intérieur.

Considérons aussi l'espace vectoriel $\mathfrak{X}$, des champs $\mathfrak{psl}_2\ \mathbb{R}$ par morceaux de classe $\mathscr{C}^1$, avec singularités rationnelles. Le crochet est ici bien défini, sans être intérieur.

Un des principaux résultats de [MP] est que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est « minimale » par rapport à $\mathfrak{X}$ et au crochet.

Question Quelles relations y'a-t-il entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et l'espace de Greenberg $\mathscr{G}_r$?

Remarque. — Dans [FGH], les auteurs décrivent une autre approche de nature quasi-conforme, a la question de savoir comment le groupe F agit en tant que groupe modulaire.

Nous terminons cette section par une autre relation entre le groupe T et la théorie de Teichmüller qui va faire intervenir aussi la classe $\overline{gv}$.

On désigne par Σ_∞ la surface universelle de genre 0. C'est le bord d'un voisinage régulier d'un arbre binaire infini avec racine, plongé dans $\mathbb{R}^3$. De plus, $\Sigma_{\infty,*}$ désigne la même surface avec une piqûre à chaque branchement.

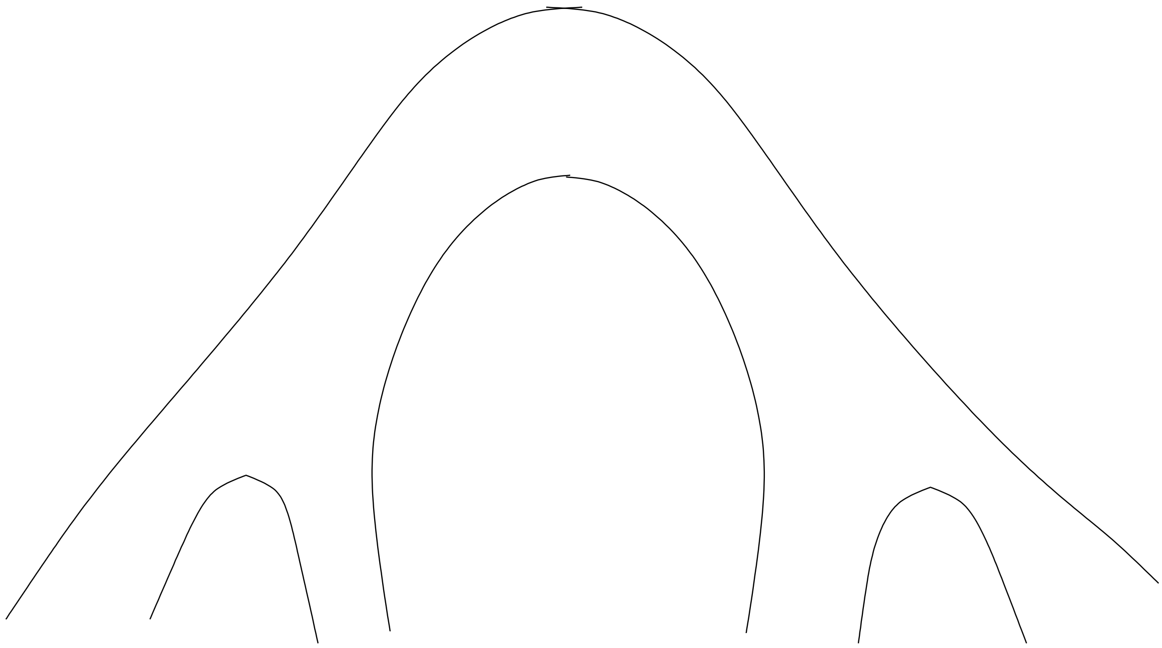
Considérons un automorphisme partiel de l'arbre binaire infini, défini en dehors d'un sous-arbre fini. Il définit alors un homéomorphisme de la surface Σ_∞, en dehors d'une sphère trouée ; cet homéomorphisme s'étend donc à Σ_∞.

Les remarques précédentes mènent au

THÉORÈME 7.3. — *i) Il existe un plongement de* T *comme groupe d'isotopies de* Σ_∞.

ii) Il existe un groupe $\mathrm{A_T}$ *d'isotopies de* $\Sigma_{\infty,*}$ *qui est une extension de* T *par le groupe de tresses infinies* B_∞ *(réunion des groupes de tresses* B_n*) :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{B}_\infty \longrightarrow \mathrm{A_T} \longrightarrow \mathrm{T} \longrightarrow 1\,.$$



iii) L'extension abélianisée

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = \frac{\mathrm{B}_\infty}{\mathrm{B}'_\infty} \longrightarrow \frac{\mathrm{A_T}}{\mathrm{B}'_\infty} \longrightarrow \mathrm{T} \longrightarrow 1$$

est centrale et détectée par la classe $\frac{1}{2}\overline{gv}_2 \in H^2(\mathrm{T};\mathbb{Z})$.

On trouvera dans [GrS1] une démonstration du fait que l'homologie du groupe $\mathrm{A_T}$ est égale à celle de l'espace $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$. De plus, l'extension du théorème est sans homologie (acyclique) au-dessus du commutateur $[F,F]$.

Une construction différente, mais reliée, a été proposée récemment dans[FK]. Les auteurs construisent une extension B du groupe V, qui contient tous les groupes d'isotopies des surfaces à bord de genre 0. De plus, le groupe B est de présentation finie (voir aussi M. Brin, à paraître).

Pour énoncer le théorème suivant, rappelons la suite exacte de groupes de Lie Banachiques associée à un espace de Hilbert polarisé $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$:

$$1 \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow GL^0_{\mathrm{res}} \longrightarrow 1\,.$$

Son image réciproque par l'application naturelle $GL^0_{\mathrm{res}} \longrightarrow GL(\mathscr{H}_+)/\mathscr{D}$ est l'extension

$$1 \longrightarrow \mathscr{D} \longrightarrow GL(\mathscr{H}_+) \longrightarrow \frac{GL(\mathscr{H}_+)}{\mathscr{D}} \longrightarrow 1\,.$$

Rappelons enfin que dans [PS], Presley et Segal ont construit des représentations de $\mathrm{Diff}(S^1)$ dans $GL^0_{\mathrm{res}}(\mathscr{H})$, pour $\mathscr{H} = L^2(S^1)$.

On peut alors énoncer le

THÉORÈME 7.4. — *i) Il existe une représentation d'extensions :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{B}_\infty & \longrightarrow & \mathrm{A_T} & \longrightarrow & \mathrm{T} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathscr{D} & \longrightarrow & GL(\mathscr{H}) & \longrightarrow & \dfrac{GL(\mathscr{H})}{\mathscr{D}} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

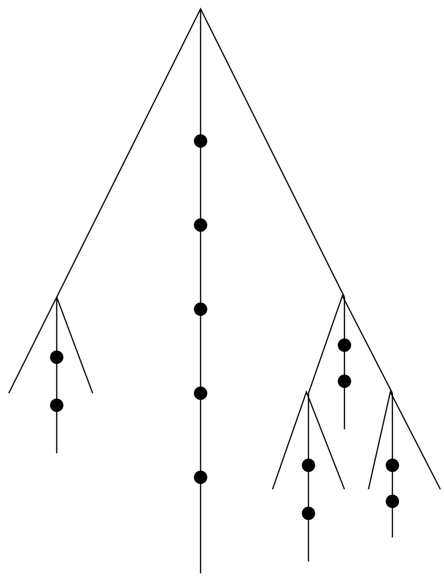
où $\mathscr{H}$ est l'espace de Hilbert $\ell^2(t)$ et t l'arbre binaire infini complété ci-dessous :

ii) L'application $\mathrm{B}_\infty \to \mathscr{D}$ est la représentation de Burau du groupe de tresses (voir [Tu]).

iii) L'application d'abélianisation $\mathrm{B}_\infty \to \mathbb{Z}$ correspond au déterminant $\mathscr{D} \to \mathbb{C}^*$.

iv) La classe $\overline{gv} \in H^2(\mathrm{T};\mathbb{R})$ est l'image réciproque de la classe de l'extension centrale

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \frac{GL(\mathscr{H})}{\ker\det} \longrightarrow \frac{GL(\mathscr{H})}{\mathscr{D}} \longrightarrow 1\,.$$



Remarques.

1. Nous pensons que le théorème ci-dessus constitue un premier pas vers une étude des représentations du groupe T, qui reste à être réalisé.
2. Par rapport à la construction de Presley-Segal, ce théorème ne fait pas intervenir le groupe linéaire restreint.
3. Il suggère la question de chercher l'analogue du groupe B_∞ pour une extension appropriée de $\mathrm{Diff}(S^1)$.

8. Quelques compléments

Nous avons déjà mentionné l'existence de généralisations des groupes de Thompson. Même les plus simples présentent vite des phénomènes nouveaux. Après avoir discuté quelques exemples, nous évoquons brièvement les groupes de Thompson dans différents contextes mathématiques, ce qui éclaire leur remarquable ubiquité.

8.1.. — Une première généralisation est celle ou la pente des éléments est une puissance de k, $k \geqslant 2$. Les groupes T_k restent de présentation finie [Bro1]. Cependant, lorsque $k \geqslant 3$, le groupe $\mathrm{Out}\ \mathrm{T}_k$ n'est plus fini ([BG]) ce qui contraste avec le théorème 6.2.

On a aussi considéré les groupes de pentes $2^k 3^\ell$, avec singularités sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$. Ils sont de présentation finie [St]. En revanche, on ne sait rien lorsque la pente est $\frac{2}{3}$ et les singularités sur $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$.

La définition projective intégrale de T s'étend lorsqu'on remplace $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ par un sous-groupe d'indice fini Γ et on considère des homéomorphismes Γ par morceaux. On a démontré que si le genre $g(\Gamma) = 0$, le groupe obtenu est de type fini (Laget, à paraître). Cependant, si $g(\Gamma) > 0$, ce groupe devient de type infini ([Gr3]).

Dans [Ro], C. Röver construit un groupe qui contient à la fois V et un des groupes infinis de torsion de Grigorchuk (problème de Burnside). Ce groupe est de présentation finie simple. Le même auteur a montré qu'il est aussi le commensurateur du groupe de Grigorchuk.

À l'aide des C^*-algèbres de Cuntz-Pimsner, le groupe ci-dessus a été généralisé par Nekrashevich [N].

8.2.. — Le contexte des C^*-algèbres permet une définition de la classe $\mathbf{BT}$ de Bott-Thurston, due à Connes ([C]). Pour la classe $\overline{gv}$, celle-ci a été proposée par C. Oikonomides [O]. Elle peut être utilisée pour aborder, à l'aide de [GS], la conjecture de Novikov sur les hautes signatures dans le cas des groupes de Thompson.

Il est bien connu que la conjecture de Novikov rationnelle est un cas particulier de celle de Baum-Connes : elle revient à l'injectivité de l'application indice (voir [V]). Récemment, D. Farley [F] a réussi à montrer la conjecture de Baum-Connes pour les groupes de Thompson. Il s'agit de prouver à l'aide de la définition 3.3, *vi)* que ces groupes sont $A - T$ menables, puis d'appliquer le théorème de Higson-Kasparov (voir [V].

8.3.. — Le programme de Grothendieck et en particulier son étude du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ fait intervenir de façon essentielle les groupes d'isotopie des surfaces (voir [Gro]). Les groupes de Thompson entrent aussi dans ce cadre : dans [LS], les auteurs construisent le groupoïde de Ptolémée-Teichmüller, sur lequel agit le groupe de Drinfeld GT dont on sait qu'il contient $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$. Le groupe GT agit aussi sur une complétion du groupe modulaire universel en genre 0 que nous avons mentionné dans 7 (Kapoudjian, à paraître).

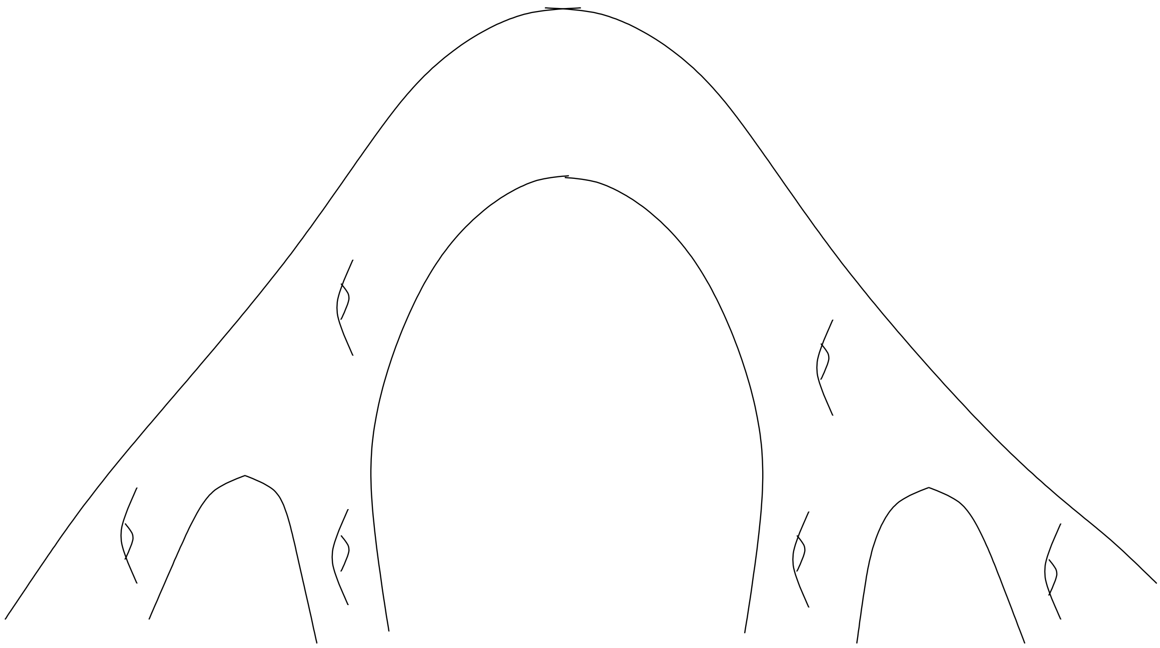
8.4.. — La construction du groupe universel en genre 0 admet une variante naturelle en genre infini, lorsqu'on ajoute une anse à la surface Σ_∞ sur chaque pantalon.

Il est tentant de demander s'il existe une relation entre l'extension de V qui correspond à cette surface et la cohomologie stable du groupe modulaire, voire avec la conjecture de Mumford (cf. [Ti]).

8.5.. — Nous avons déjà mentionné que la découverte des groupes de Thompson s'est fait en logique. Plus récemment, Dehornoy [D] a construit un groupe de l'identité d'associativité $a(bc) = (ab)c$; ce groupe est exactement F. On trouvera par ailleurs dans [B2], une étude des groupes F, T et V dans le contexte des catégories monoïdales et tressées.

8.6.. — Le dernier mot de cet appendice est du côté de la physique mathématique.

Il est bien connu que le groupe et l'algèbre de Virasoro jouent un rôle important en théorie des cordes et notamment en théorie conforme des champs. Il semble également que cette dernière, à partir des articles fondamentaux de Friedan-Shenker et de Moore-Seibert, a de nombreuses relations avec le matériel que nous avons exposé ici.



Bibliographie

[BW] Betten D., Wagner A. *Eine Slückweise projective topologiche Gruppe im Zusammenhang mit den Moulton-Eberen*, Areh. Math., **38** (1982), 280–285 .

[Bo] Borel A., Wallach N.t *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups*, Mathematical Survey and Monographs, **67**, AMS (2000).

[B1] Brin M. *The chameleon groups of R. J. Thompson: automorphisms and dynamics*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math., **84** (1997), 5–33.

[B2] Brin M. *The chameleon groups of R. J. Thompson: II. Categories with multiplications*, prepint (2003).

[BG] BRIN M., GUZMAN F. *Automorphisms of generalized Thompson groups*, J. Algebra, **1** (1998), 285–348.

[Bro] BROWN K. S. *Cohomology of groups*, G. T. M., **87**, Springer-Verlag (1994).

[Bro1] BROWN K. S. *Finiteness properties of groups*, J. Pure App. Algebra, **44** (1987), 47–75.

[Bro2] BROWN K. S. *The geometry of finitely presented infinite simple group*, M.S.R.I. Publications.

[BroG] BROWN K.S., GEOGHEGAN R. *An infinite dimensional torsion free FP_∞ group*, Invent. Math., **77** (1984), 367–381.

[BM] BURGER M., MOZES S. *Finitely presented simple groups and products of trees*, ,C.R.A.S., série I **324** (1997), 747–752.

[CFP] CANNON J., FLOYD W., PARRY W. *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, L'Enseignement Mathématiques, **42** (1996), 215–256.

[C] CONNES A. *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

[D] DEHORNOY P. *The structure group for the associativity identity*, J. Pure Appl. Algebra, **111** (1996), 59–82.

[E] EPSTEIN D.B.A. *The simplicity of certain groups of homéomorphisms*, Compos. Math., **22** (1970), 165–173.

[F] FARLEY D. *A proper isometric action of Thompson's group V on a Hilbert space*, Internation Mathematical Research Notes (à paraître).

[FK] FUNAR L., KAPOUDJIAN C. *On universal mapping class groups in genous zero*, arXiv: math.6T/0210007.

[FGH] DE FARIA E., GARDENER F., HARVEY W. *Thompson's group as a Teichmüller mapping class group*, preprint (2002).

[G1] GHYS É. *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **37** (1987), 59–76.

[G2] GHYS É. *Classe d'Euler et minimal exceptionnel*, Topology, **26** (1987), 93–105.

[G3] GHYS É. *Groups acting on the circle*, Ens. Math., **47** (2001), 329–407.

[Gr1] GREENBERG P. *Pseudogroups of C^1 piecewise projective homeomorphisms*, Pacific J. Math., **129** (1987), 67–75.

[Gr2] GREENBERG P. *Classifying spaces for foliations with isolated singularities*, Transactions A.M S., **304** (1987), 417–429.

[Gr3] GREENBERG P. *Projective actions of the Higman-Thompson group: Group theory from a geometric viewpoint*, World Scientific (1991), 622–623.

[GS] GHYS É., SERGIESCU V. *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helvetici, **62** (1987), 185–239.

[GrS1] GREENBERG P., SERGIESCU V. *An acyclic extension of the braid group*, Comment. Math. Helvetici, **66** (1991), 109–138.

[GrS2] GREENBERG P., SERGIESCU V. *Piecewise projective homeomorphisms and a noncommutative Steinberg extension*, K-Theory, **9** (1995), 529–544

[Gro] GROTHENDIECK A. *Esquisse d'un programme*, Geometric Galois Actions 2, L.M.S., Lecture Notes Series **243** C.U.P. (1997), 5–48.

[HH] Hector G., Hirsch U. *Introduction to the geomety of foliations, Part A: Aspects of Mathematics, 1*, Friedr. Vieweg & Sohn (1981).

[H] Hingston N *An equivariant model for the free loop space of S^n*, Am. J. of Math., **114** (1991), 139–155.

[HM] Hashiguchi N., Minakawa H. *Continuous variation of the discrete Godbillon-Vey invariant*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **39** (1992), 271–278.

[I] Imbert M. *Sur l'isomorphisme du groupe de Richard Thompson avec le groupe de Prolémée*, in Geometric Galois Actions 2 L.M.S., L.N.S. **243** (1997), Cambridge Univ. Press, 313–324.

[K1] Kapoudjian C. *Simplicity of Neretin's group of spheromorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **49** n° 4 (1999), 1225–1240.

[K2] Kapoudjian C. *Virasoro-type extensions for the Higman-Thompson and Neretin groups*, Q.J. Math., **53** (2002), 295–317.

[L] Laget G. *Le groupe $T_{\Gamma(2)}$*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 629, Grenoble (2003).

[LS] Lochak P., Scheps L. *The universal Ptolemey-Teichmüller groupoid*, Geometric Galois Actions 2 L.M.S., Lecture Notes Series **243** C.U.P. (1997).

[MP] Malikov F.-Penner R.C. *The Lie algebra of homeomorphisms of the circle*, Adv. Math. , **140**, n° 2 (1998), 282–322.

[Ma] Martin X. *Sur la géométrie du groupe de Thompson*, C.R.A.S., série I **133** (2001), 773–778.

[MT] McKenzie R., Thompson R.J. *An elementary construction of unsolvable word problems in group theory*, Word Problems, Studies in Logic and Formations of Mathematics, **71**, North-Holland (1973), 457–478.

[Mi1] Minakawa H *Realization fo Ghys inequality*, Topology, **36** (1997), 775–781.

[Mi2] Minakawa H *Exotic circles of* $\mathrm{PL}_+(S^1)$, Hokkaido Math. J., **24** (1995), 567–573.

[Na] Navas A. *Groupes de Neretin et propriété (T) de Kazhan*, C.R.A.S., série I **335** (2002), 789–792.

[N] Nekrashevich V. *Cuntz-Pimsner algebras of group actions*, preprint (2002).

[Ne] Neretin *Combinatorial analogues of the group of diffeomorphisms of the circles*, Russian Acad. Sci. Izv. Math., **41** (1993), 337–349.

[O] Oikonomides C., Thèse Tokyo (2001).

[OS] Olshanskii A., Sapir M. *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, Electon. Res. Announc. Amer. Math. Soc., **7** (2001), 63–71 (electronic).

[P] Penner R. *Universal constructions in Teichmüller spaces*, Adv. in Math., **98** (1993), 143–215.

[PS] Pressley A., Segal G. *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press (1988).

[R] Raby G. *Invariance des classes de Godbillon-Vey par $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **38** (1988), 205–218.

[Re] Reznikov A. *Analytic topology*, E.C.M. vol. I, Progr. Math. **201** Birkhäuser, Basel (2001), 519–532.

[Ro] Röver C. *Constructing finitely presented groups that contain Grigorchuk groups*, J. Algebra, 220 (1999), 214–313.

[St] STEIN M. *Groups of piecewise linear homeomorphisms*, Trans. Am. Math. Soc., **332** (1992), 447–514.

[Th] THOMPSON R.J. *Embeddings into finitely generated simple groups which preserve the word problem*, Word Problems II, North-Holland (1980), 401–441.

[Ti] TILLMANN U *Strings and the stable cohomology of the mapping class groups*, Proc. ICM , **II** (2002), 447–456.

[T] TSUBOI T *A characterization of the Godbillon-Vey invariant*, Sugaku, **45** (1993), 128–140.

[Tu] TURAEV *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki vol. 1999/2000, Astérisque, **276** (2002), 389–409.

[V] VALETTE A. *Introduction to the Baum-Connes conjecture*, E.T.H. Zurich, Lectures in Math., Birkhäuser Verlag, Basel (2002).

Nous recommandons particulièrement les références [G3] et [CFP] comme introduction aux groupes d'homéomorphismes du cercle et aux groupes de Thompson, respectivement.