

Le groupe $T_{\Gamma(2)}$.

Guillaume Laget

Décembre 2003

Prépublication de l'Institut Fourier n° 629 (2003)
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

Introduction

Soit \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré. On peut identifier $\partial\mathbb{H}$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et S^1 , et l'identification avec le cercle S^1 donne ainsi un ordre cyclique sur cet ensemble.

On appelle $PPSL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des homéomorphismes f de $\partial\mathbb{H}$ tels qu'il existe $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et des $f_i \in PSL_2(\mathbb{Z})$ avec $f_{|(p_i, p_{i+1})} = f_i$, $f_{|(p_n, p_1)} = f_n$; il est isomorphe au groupe de Thompson T (cf [6], [10]).

Découverts dans les années 60, les groupes de Thompson forment une famille de groupes, aux définitions et propriétés analogues, qui apparaissent sous de multiples formes dans divers domaines des mathématiques (logique, algèbre, topologie, ...).

Cette définition projective de T a suggéré à Peter Greenberg au début des années 90 l'étude d'une famille naturelle de sous-groupes de $PPSL_2(\mathbb{Z})$, indexée par certains sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{Z})$: si Γ un sous-groupe d'indice fini sans torsion de $PSL_2(\mathbb{Z})$, on appelle T_Γ le sous-groupe des éléments de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ qui, sur chacun des intervalles entre les points de rupture, coïncident avec un élément de Γ . Alors \mathbb{H}/Γ est une surface de Riemann d'aire finie, de genre g_Γ et ayant v_Γ cusps, et ces deux paramètres caractérisent les groupes T_Γ à isomorphisme près.

$PPSL_2(\mathbb{Z})$ est de présentation finie [6]; en revanche P.Greenberg [8] a prouvé par des techniques homologiques faisant intervenir le classifiant $B\Gamma$ de Haefliger et un théorème de Mather, que si $g_\Gamma > 0$, T_Γ n'est pas de type fini. Mais sa méthode ne s'applique pas au cas $g_\Gamma = 0$.

L'objet de ce papier est l'étude d'un exemple en genre 0, celui du groupe modulaire $\Gamma(2)$ de niveau 2; on prouve en particulier ici que $T_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie.

Pour cela on commence par étudier le groupe $F_{\Gamma(2)} = \{f \in T_{\Gamma(2)} \mid f(\infty) = \infty\}$; on montre par des arguments combinatoires qu'il est conjugué à un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux de $[0, 1]$, $F_{3,4}^{[0,1]}$.

Puis on montre que ce groupe $F_{3,4}^{[0,1]}$ est conjugué à un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux sur $[0, +\infty[$, $F_{3,4}^\infty$, ce dernier groupe étant un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe $H_{3,4}$ engendré par deux groupes isomorphes aux groupes de Thompson F_3 et F_9 , qui sont de type fini. Cela prouve en particulier que $F_{3,4}^\infty$ est de type fini.

Cette propriété d'être engendré par deux sous-groupes bien connus nous permet alors de décrire $H_{3,4}$ par une structure combinatoire (couples de forêts), et de tirer de là une présentation élégante du groupe, qui se ramène à une présentation finie. Ainsi,

Mots-clés : Groupe de Thompson, Homéomorphismes projectifs par morceaux, Homéomorphismes affines par morceaux, Groupes de présentation finie

Mathematical Subject Classification : 20F05, 20F38, 20F38

Théorème A $F_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie.

Enfin, pour démontrer que $T_{\Gamma(2)}$ est lui aussi de présentation finie, on trouve un complexe simplicial sur lequel il agit avec un quotient fini et des stabilisateurs que l'on calcule à partir de $F_{\Gamma(2)}$ et qui sont de présentation finie. Avec l'aide d'un théorème de Haefliger on aura alors prouvé :

Théorème B $T_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie.

Dans la dernière partie on donnera quelques autres propriétés des groupes $F_{\Gamma(2)}$ et $T_{\Gamma(2)}$, et on généralisera ces résultats aux groupes F_{Γ} et T_{Γ} avec $g_{\Gamma} = 0$.

1 Linéarisation du groupe $F_{\Gamma(2)}$

E.Ghys et V.Sergiescu dans leur étude du groupe de Thompson T [7] ont décrit une méthode pour construire de nombreux plongements de ce groupe dans $\text{Homeo}^+(S^1)$; on peut en particulier obtenir ainsi l'isomorphisme entre T et $PPSL_2(\mathbb{Z})$.

Cet isomorphisme n'est pas adapté à notre étude : le sous-groupe de T obtenu en regardant $T_{\Gamma(2)}$ comme sous-groupe de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ ne semble pas avoir de description utilisable.

Dans un esprit voisin de [7] nous allons expliciter une autre bijection entre $\partial\mathbb{H}$ et $[0, 1]$ qui conjugue le groupe $F_{\Gamma(2)}$ à un groupe d'homéomorphismes affines par morceaux plus facile à étudier ; notre présentation est quelque peu différente et ne fait appel aux résultats de [7].

1.1 Le groupe $\Gamma(2)$

On considère le quadrilatère idéal \mathcal{P} de \mathbb{H} de sommets $S_0 = \infty, S_1 = -1, S_2 = 0, S_3 = 1$ dans $\partial\mathbb{H}$, et les applications $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (z \mapsto z + 2)$ et $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (z \mapsto z/(2z + 1))$. Ces applications engendrent alors un sous-groupe $\Gamma(2)$ de $PSL_2(\mathbb{Z})$, dont un domaine fondamental est \mathcal{P} . On a (cf.[11]) :

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid a, d \equiv 1(2), b, c \equiv 0(2) \right\}$$

1.2 Les groupes $T_{\Gamma(2)}$ et $F_{\Gamma(2)}$

On définit $T_{\Gamma(2)}$ comme le groupe des éléments f de $\text{Homeo}^+(\partial\mathbb{H})$ tels qu'il existe $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, et des $f_i \in \Gamma(2)$ vérifiant $f_{|(p_i, p_{i+1})} = f_i, f_{|(p_n, p_1)} = f_n$.

$F_{\Gamma(2)}$ est le stabilisateur de l'infini : $F_{\Gamma(2)} = \{f \in T_{\Gamma(2)} \mid f(\infty) = \infty\}$.

Pour $f \in T_{\Gamma(2)}$, si on reprend les notations précédentes, on dit que $p_i, i \geq 2$ (resp. p_1) est un point de rupture de f si $f_{i-1}f_i^{-1}$ (resp. $f_n f_1^{-1}$) est différent de l'identité.

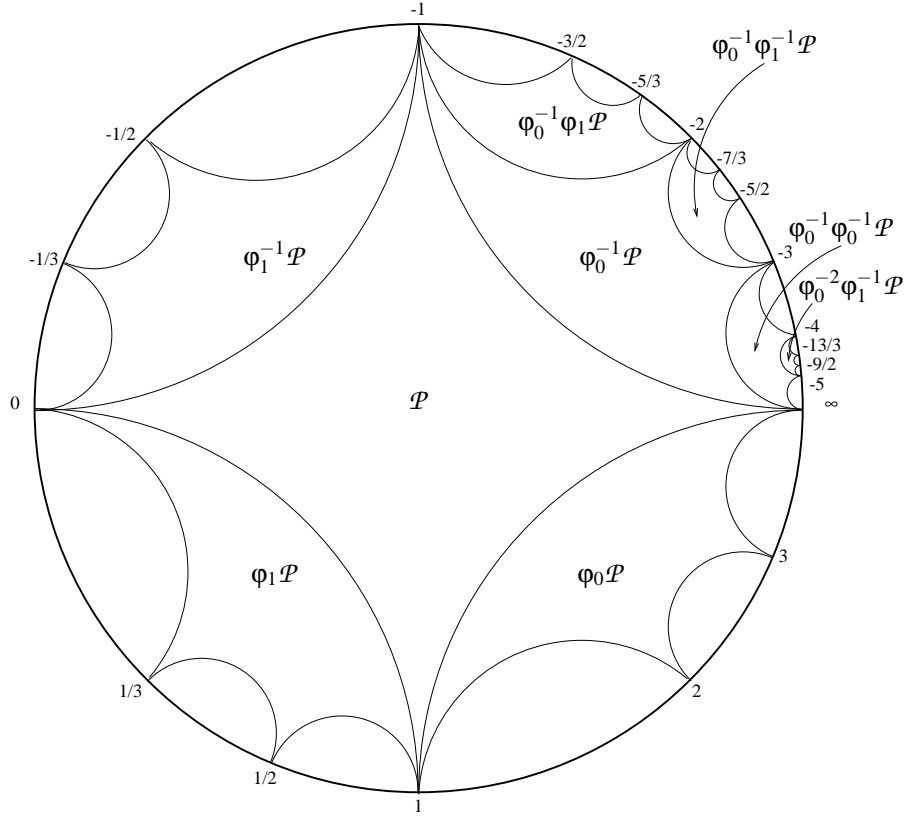
Nous allons pour étudier ces groupes commencer par trouver une structure combinatoire qui les décrit, et pour cela nous avons besoin d'étudier le groupe $\Gamma(2)$.

1.3 Les intervalles standard

Notons $\text{Gen}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\varphi_0, \varphi_0^{-1}, \varphi_1, \varphi_1^{-1}\}$.

On appelle polygone standard de rang 0 le polygone \mathcal{P} , et pour tout $k \geq 0$, un polygone standard de rang $k + 1$ est l'image par l'un des éléments de $\text{Gen}(\Gamma)$ d'un polygone standard de rang k . On obtient ainsi une énumération du pavage $\Gamma.\mathcal{P}$ de \mathbb{H} .

On peut représenter le polygone de rang 0, \mathcal{P} , les 4 polygones de rang 1, $\varphi_0\mathcal{P}, \varphi_1\mathcal{P}, \varphi_0^{-1}\mathcal{P}, \varphi_1^{-1}\mathcal{P}$, trois des polygones de rang 2, $\varphi_0^{-1}\varphi_0^{-1}\mathcal{P}, \varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1}\mathcal{P}, \varphi_0^{-1}\varphi_1\mathcal{P}$, et un polygone de rang 3, $\varphi_0^{-1}\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1}\mathcal{P}$:



On définit les intervalles standard de rang 0 comme les intervalles de $\partial\mathbb{H}$ délimités par le polygone de rang 0 : $[\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty]$.

Considérons un polygone standard de rang $k + 1$, avec $k \geq 0$. Alors un de ses cotés C appartient à un polygone standard de rang k ; les autres cotés définissent 3 intervalles de $\partial\mathbb{H}$, que l'on appellera intervalles standard de rang $k + 1$, et qui subdivisent l'intervalle standard de rang k défini par le coté C .

Sur la figure précédente on a ainsi représenté tous les intervalles standard de rang 0, tous les intervalles standard de rang 1 : $[\infty, -3]$, $[-3, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}]$, $[-\frac{1}{3}, 0]$, $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, \infty]$, les intervalles $[\frac{-3}{2}, -1]$, $[\frac{-5}{3}, \frac{-3}{2}]$, $[-2, \frac{-5}{3}]$, $[\frac{-7}{3}, -2]$, $[\frac{-5}{2}, \frac{-7}{3}]$, $[-3, \frac{-5}{2}]$, $[-4, -3]$, $[-5, -4]$ et $[\infty, -5]$ de rang 2 et les intervalles $[-\frac{13}{3}, -4]$, $[-\frac{9}{2}, -\frac{13}{3}]$, $[-5, -\frac{9}{2}]$ de rang 3.

1.4 Le marquage des intervalles standard

On va maintenant définir un marquage sur les intervalles standard, application qui a un intervalle associe un élément de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, qui nous permettra de caractériser les éléments de $F_{\Gamma(2)}$.

Commençons par remarquer :

Proposition 1 *Le groupe $\Gamma(2)$ agit librement sur l'ensemble des intervalles standard, et les orbites des intervalles standard de rang 0 forment une partition de l'ensemble des intervalles standard.*

Démonstration:

Il est clair par construction qu'un intervalle standard est l'image par un élément de $\Gamma(2)$ d'un intervalle standard de rang 0.

Réciproquement si on se donne $\gamma \in \Gamma(2) \setminus \{Id\}$, on peut l'écrire $\gamma = \gamma_k \gamma_{k-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$, chaque γ_i étant dans $\text{Gen}(\Gamma(2))$. Mais alors si on se donne un intervalle standard I de rang 0, on voit successivement que $\gamma_1 \cdot I$ est un

intervalle standard de rang 1, $\gamma_2\gamma_1.I$ est un intervalle standard de rang 2, ..., $\gamma.I = \gamma_k\gamma_{k-1}\dots\gamma_2\gamma_1.I$ est un intervalle standard de rang k .

On a au passage prouvé que l'image par $\gamma \in \Gamma(2)$ d'un intervalle standard de rang 0 n'est de rang 0 que si $\gamma = Id$, et donc les intervalles standard de rang 0 sont d'orbites disjointes. ■

$S_i, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ désignant toujours les quatres sommets 0, 1, ∞ , -1 du polygone de rang 0, on définit le marquage m d'un intervalle standard de rang 0 par $m([S_i, S_{i+1}]) = i$ pour $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Si I est un intervalle standard de rang non nul, on définit $m(I)$ comme le marquage de l'unique intervalle standard de rang 0 qui est dans l'orbite de I .

Alors cette application m a les propriétés :

Proposition 2 – Si I_1 et I_2 sont deux intervalles standard, il existe $\gamma \in \Gamma(2)$ tel que $\gamma I_1 = I_2$ si et seulement si $m(I_1) = m(I_2)$.
– Si on subdivise un intervalle de marquage m , les marquages des intervalles obtenus sont $-m, -m + 1, -m + 2$.

Démonstration:

Le premier point est immédiat ; pour le deuxième, par le mode de construction des intervalles standard, il suffit de prouver le résultat pour un intervalle de rang 0.

Soit $[S_i, S_{i+1}]$ un intervalle de rang 0, on le subdivise en des intervalles qui sont images par φ_{3-i} (si $i = 2$ ou 3) ou φ_i^{-1} (si $i = 0$ ou 1) des intervalles de rang 0 $[S_{4-i}, S_{4-i+1}], [S_{4-i+1}, S_{4-i+2}], [S_{4-i+2}, S_{4-i+3}]$, et alors les marquages des intervalles obtenus sont $-i, -i + 1, -i + 2$. ■

1.5 Description de $F_{\Gamma(2)}$

On a défini plus haut la notion d'intervalles standard ; on va dans la suite appeler partition standard une suite d'intervalles standard $I_1 = [\infty, a_2], I_2 = [a_2, a_3], \dots, I_k = [a_k, \infty]$ qui recouvrent une seule fois le cercle (i.e ∞ n'est dans aucun des I_2, \dots, I_{k-1}).

Une expansion élémentaire d'une partition standard consiste à subdiviser un des intervalles qui la composent en les 3 intervalles standard de rang un de plus correspondants. Une expansion est une suite finie d'expansions élémentaires ; on remarque que toute partition standard est une expansion de la partition constituée des intervalles de rang 0.

On appelle marquage d'une partition standard la suite des marquages des intervalles qui la composent.

Soit $f \in F_{\Gamma(2)}$. Comme les extrémités des intervalles standard sont exactement $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, il existe une partition standard I_1, I_2, \dots, I_k et des éléments de $\Gamma(2)$ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ tels que f coïncide avec γ_i sur chaque I_i ; on dit qu'une telle partition est adaptée à f . Par construction des intervalles standard, chacun des $\gamma_i(I_i)$ est un intervalle standard, et on a ainsi associé à chaque élément de $F_{\Gamma(2)}$ un couple de partitions standard constituées du même nombre d'intervalles, tel que sur chaque intervalle de la première partition f soit un élément de $\Gamma(2)$.

On s'intéresse maintenant à la réciproque : étant données deux partitions standard avec le même nombre d'intervalles, définissent-elles un élément de $F_{\Gamma(2)}$? La réponse est facile en utilisant la notion de marquage définie précédemment : deux intervalles standard s'envoient l'un sur l'autre par un élément de $\Gamma(2)$ si et seulement si ils ont même marquage.

Ainsi $F_{\Gamma(2)}$, envoie une partition standard adaptée sur une partition standard de même marquage, et réciproquement deux partitions standard de même marquage définissent un élément de $F_{\Gamma(2)}$ en 'recollant' les éléments de $\Gamma(2)$ obtenus pour chaque couple d'intervalles se correspondant dans les deux partitions.

Proposition 3 $F_{\Gamma(2)}$ est l'ensemble des couples de partitions standard de même marquage, modulo la relation d'expansion.

1.6 Description de $F_{3,4}^{[0,1]}$

On considère l'ensemble des homéomorphismes de $[0, 1]$ fixant 0 et 1, affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$ et des pentes dans $\langle 3 \rangle$. Ils forment un groupe

que l'on note $\mathcal{F}_{3,4}^{[0,1]}$.

On va construire une notion de partition standard ici aussi, qui nous permettra de définir un sous-groupe $F_{3,4}^{[0,1]}$. Pour cela on part du polygone régulier de sommets $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, et on découpe chacun de ces intervalles de manière régulière en 3, et on répète l'opération. On construit ainsi une énumération de $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cap [0, 1] / \{0 = 1\}$, et on définit dans ce cadre de manière analogue les intervalles standard, la notion d'expansion, et les partitions standard.

Soit $f \in \mathcal{F}_{3,4}^{[0,1]}$; on peut la représenter par un couple de partitions standard ayant le même nombre d'intervalles, tel que f envoie dans l'ordre et de manière affine les intervalles de la première partition sur ceux de la seconde. Sur chaque intervalle standard (pour une partition adaptée) f est de la forme $f(x) = 3^k x + \frac{p}{4 \cdot 3^q}$ avec $k, p \in \mathbb{Z}$ et q entier positif.

Définition 1 $F_{3,4}^{[0,1]}$ est le sous-groupe des $f \in \mathcal{F}_{3,4}^{[0,1]}$ où, avec les notations précédentes, sur chaque intervalle, p est un multiple de 4.

On remarque que l'application affine qui envoie $[\frac{k}{4 \cdot 3^a}, \frac{k+1}{4 \cdot 3^a}]$ sur $[\frac{k'}{4 \cdot 3^{a'}}, \frac{k'+1}{4 \cdot 3^{a'}}]$ a pour partie de translation $\frac{k'-k}{4 \cdot 3^{a'}}$, donc le p correspondant (avec les notations ci-dessus) est un multiple de 4 si et seulement si $k = k'$ modulo 4. Ainsi, si l'on associe à chaque intervalle $[\frac{k}{4 \cdot 3^a}, \frac{k+1}{4 \cdot 3^a}]$ la valeur de k modulo 4, et à chaque partition standard un marquage constitué de la suite de ces symboles. On remarque que l'on a la règle de subdivision $(\dots, l, \dots) \rightarrow (\dots, -l, -l+1, -l+2, \dots)$ sur les marquages, et par conséquent :

Proposition 4 Pour $f \in \mathcal{F}_{3,4}^{[0,1]}$, représentée par un couple de partitions standard, f est dans $F_{3,4}^{[0,1]}$ si et seulement si les partitions ont le même marquage.

1.7 Conjugaison entre $F_{3,4}^{[0,1]}$ et $F_{\Gamma(2)}$

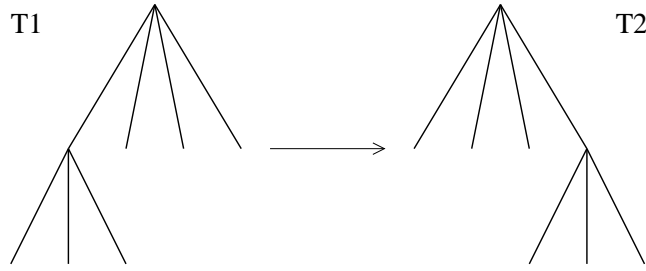
On peut définir une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \rightarrow \frac{1}{4}\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cap [0, 1] / \{0 = 1\}$ en envoyant ∞ sur 0 , -1 sur $\frac{1}{4}$, 0 sur $\frac{1}{2}$, 1 sur $\frac{3}{4}$, puis de proche en proche en associant les points obtenus à chaque nouvelle étape des deux constructions précédentes, dans l'ordre trigonométrique. La construction des intervalles standard dans $\partial\mathbb{H}$ nous donne tous les éléments de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, et la construction affine tous les éléments de $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cap [0, 1] / \{0 = 1\}$. φ étant une bijection strictement croissante d'un ensemble dense dans S^1 sur un ensemble dense dans S^1 , elle se prolonge en un homéomorphisme de S^1 .

Proposition 5 L'application φ préserve la structure de partition standard : l'image par φ d'une partition standard de $\partial\mathbb{H}$ est une partition standard de $[0, 1] / \{0 = 1\}$ de même marquage, et φ respecte l'opération d'expansion.

Comme $F_{\Gamma(2)}$ et $F_{3,4}^{[0,1]}$ peuvent être décrits comme des couples de partitions standard de même marquage, et que φ envoie les partitions standard sur les partitions standard en conservant le marquage, φ conjugue ces deux groupes.

On peut représenter une partition standard par un arbre qui décrit comment on subdivise la partition standard de rang 0 ($[\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, \infty]$ dans le cas projectif, $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$ dans le cas affine) : pour la partition de rang 0 on utilise un arbre à une racine et 4 arêtes, chacune des feuilles représentant un des intervalles de la partition, et pour chaque subdivision d'un intervalle de la partition on pose un arbre à une racine et 3 arêtes sur la feuille correspondante.

Exemple 1 : Considérons, pour les groupes $F_{\Gamma(2)}$ et $F_{3,4}^{[0,1]}$, les arbres T_1 et T_2 suivants :



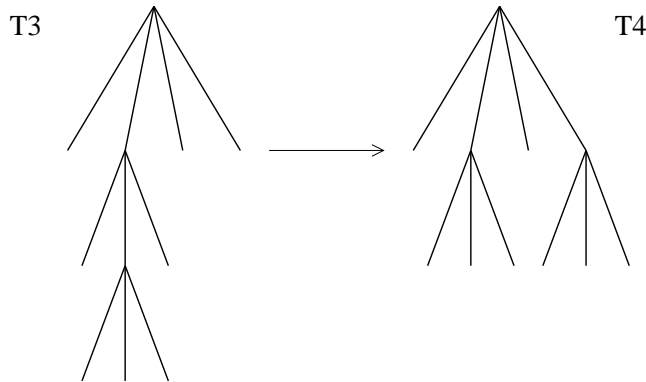
T_1 représente la partition $[\infty, -3], [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/12], [1/12, 2/12], [2/12, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ de $[0, 1]$.

T_2 représente la partition $[\infty, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 10/12], [10/12, 11/12], [11/12, 1]$ de $[0, 1]$.

Ainsi les applications correspondantes, conjuguées par ϕ , sont $z \mapsto z + 2$ dans $F_{\Gamma(2)}$ et $x \mapsto \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, 1/4] \\ (x-2)/3 & \text{si } x \in [1/4, 1] \end{cases}$ dans $F_{3,4}^{[0,1]}$.

On remarque en particulier que le nombre de points de rupture des applications est majoré par le nombre de feuilles des arbres les représentant, mais que certains éléments sans point de rupture de $F_{\Gamma(2)}$ sont nécessairement définis par des couple d'arbres ayant plusieurs feuilles.

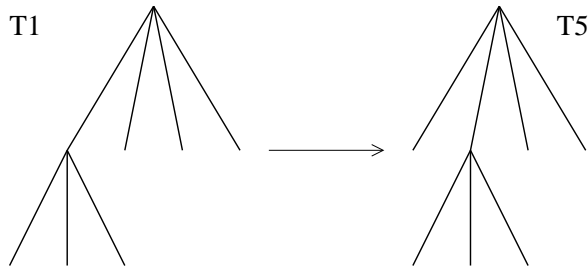
Exemple 2 : De même les arbres T_3 et T_4 :



définissent sur $\partial\mathbb{H}$ et sur $[0, 1]$ les applications

$$z \mapsto \begin{cases} z & \text{sur } [\infty, -\frac{1}{2}] \\ -\frac{5z+2}{8z+3} & \text{sur } [-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}] \\ \frac{5z+2}{2z+1} & \text{sur } [-\frac{2}{5}, 0] \\ z+2 & \text{sur } [0, \infty] \end{cases} \text{ et } x \mapsto \begin{cases} x & \text{sur } [0, \frac{4}{12}] \\ 3x-2/3 & \text{sur } [\frac{4}{12}, \frac{14}{36}] \\ 9x-3 & \text{sur } [\frac{14}{36}, \frac{18}{36}] \\ x+1/3 & \text{sur } [\frac{5}{12}, \frac{1}{2}] \\ (x+2)/3 & \text{sur } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Exemple 3 : En revanche, considérons les arbres T_1, T_5 suivants :



T_5 représente la partition $[\infty, -1], [-1, -1/2], [-1/2, -1/3], [-1/3, 0], [0, 1], [1, \infty]$ de $\partial\mathbb{H}$, et la partition $[0, 1/4], [1/4, 1/3], [1/3, 5/12], [5/12, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]$ de $[0, 1]$.

Alors les applications correspondantes ne sont pas dans $F_{\Gamma(2)}$ ni dans $F_{3,4}^{[0,1]}$ (par exemple l'application affine envoyant $[1/12, 2/12]$ sur $[1/4, 4/12]$ est $x \mapsto x + 1/6$, l'élément (de $PSL_2(\mathbb{Z})$) qui envoie $[-3, -2]$ sur $[-1, -\frac{1}{2}]$ est $z \mapsto \frac{-1}{z+4}$), cela est dû au fait que les marquages des deux partitions définies par T_1 et T_5 ne sont pas identiques.

1.8 Conjugaison entre $F_{3,4}^{[0,1]}$ et $F_{3,4}^\infty$

Le groupe $F_{3,4}^{[0,1]}$ ainsi défini est difficile à étudier à cause de la présence de cette application de marquage qui détermine si un couple d'arbres représente ou non un élément du groupe. Nous allons donc le conjuguer à son tour à un autre groupe, défini sur $[0, +\infty[$, qui sera plus facile à décrire en terme de couples, non pas d'arbres, mais de forêts, mais sans application de marquage.

Définition 2 $F_{3,4}^\infty$ est le groupe des applications affines par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec points de rupture (en nombre fini) dans $\mathbb{Z}[1/3]$, qui sont de la forme $x \rightarrow 3^\alpha x + 4\frac{p}{3^q}$ sur chaque intervalle où elle est affine, et valent $x + 8b$ à l'infini, b entier.

Considérons l'application $\psi : [0, 1[\rightarrow [0, \infty[$ définie par morceaux comme suit : ψ envoie de manière affine, par $\psi(x) = 4.3^{n+1}x + 8(n-3-9-\dots-3^n)$, chaque intervalle $[\frac{3^n-1}{3^n}, \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}]$ sur l'intervalle $[8n, 8(n+1)]$.

Proposition 6 Cette application ψ est un homéomorphisme de $[0, 1[$ sur $[0, \infty[$ qui conjugue $F_{3,4}^{[0,1]}$ et $F_{3,4}^\infty$.

Démonstration:

ψ est continue et strictement croissante, c'est bien un homéomorphisme.

ψ envoie bijectivement $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cap [0, 1[$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cap [0, +\infty[$; c'est immédiat à vérifier car on a la forme explicite de ψ et ψ^{-1} .

Si f est dans $F_{3,4}^{[0,1]}$, au voisinage de 1, f est de la forme $x \rightarrow 3^k(x-1) + 1$ donc pour tout n assez grand et tout k positif, f envoie les intervalles $[\frac{3^n-1}{3^n}, \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}]$ sur $[\frac{3^{n-k}-1}{3^{n-k}}, \frac{3^{n-k+1}-1}{3^{n-k+1}}]$, et par conséquent, au voisinage de l'infini $\psi f \psi^{-1}$ est de la forme $x \rightarrow x - 8k$. Cela montre au passage que $\psi f \psi^{-1}$ a un nombre fini de points de rupture. Et ceux-ci sont dans $\mathbb{Z}[1/3]$.

En chaque point x de $[0, \infty[$ on peut trouver n, n', k, p, q entiers tels que

$$\begin{aligned} (\psi f \psi^{-1})(x) &= 4.3^{n+1} \left(3^k \frac{x - 8(n' - 3 - \dots - 3^{n'})}{4.3^{n'+1}} + \frac{p}{3^q} \right) + 8(n - 3 - \dots - 3^n) \\ &= 3^{n+k-n'} x + \frac{4.3^{n+1}p}{3^q} - 8 \left(\frac{n' - 3 - \dots - 3^{n'}}{3^{n'-n-k}} - n + 3 + \dots + 3^n \right) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue. Ainsi, $\psi f \psi^{-1}$ est dans $F_{3,4}^\infty$.

De même, si $g \in F_{3,4}^\infty$ on vérifie que $\psi^{-1} g \psi$ est dans $F_{3,4}^{[0,1]}$; en effet en chaque point y de $[0, \infty[$ on peut trouver n, n', k, p, q entiers tels que

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} f \psi)(y) &= \frac{1}{4.3^{n+1}} 3^k [4.3^{n'+1} y + 8(n' - 3 - \dots - 3^{n'})] + 4\frac{p}{3^q} - 8(n - 3 - \dots - 3^n) \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} 3^k [3^{n'+1} y + 2(n' - 3 - \dots - 3^{n'})] + \frac{p}{3^q} - 2(n - 3 - \dots - 3^n) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme voulue. Ainsi, $\psi^{-1} g \psi$ est dans $F_{3,4}^{[0,1]}$. ■

1.9 $H_{3,4}$, un sous groupe d'indice 2

Pour l'étude de présentation finie qui nous intéresse, nous allons étudier non pas $F_{3,4}^\infty$ mais un groupe $H_{3,4}$ dans lequel il est d'indice 2 :

Définition 3 $H_{3,4}$ est le groupe des applications affines par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec points de rupture (en nombre fini) dans $\mathbb{Z}[1/3]$, qui sont de la forme $x \rightarrow 3^\alpha x + 4\frac{p}{3^q}$ sur chaque intervalle où elle est affine, et valent $x + 4b$ à l'infini, b entier.

$F_{3,4}$ est le noyau de l'application de $H_{3,4}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui à une fonction valant $x + 4b$ à l'infini associe b modulo 2; $F_{3,4}$ est donc un sous-groupe d'indice 2 de $H_{3,4}$, et par conséquent les groupes seront ou ne seront pas simultanément de type et de présentation finies : on peut donc se contenter d'étudier $H_{3,4}$.

2 Génération de $H_{3,4}$

L'avantage de ce groupe $H_{3,4}$ par rapport à son sous-groupe $F_{3,4}$ est qu'il peut être décrit à l'aide des groupes de Thompson classiques F_3 et F_9 :

Proposition 7 $H_{3,4}$ est engendré par le sous-groupe F_9 des applications dont les pentes sont des puissances de 9, et le sous-groupe \overline{F}_3 des applications ayant leurs points de rupture dans $2\mathbb{Z}[1/3]$, isomorphe, par la conjugaison $x \rightarrow 2x$ au groupe de Thompson classique F_3 .

On adopte les notations suivantes pour désigner un élément f de $H_{3,4}$: il existe $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n \in \mathbb{Z}[1/3]$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}[1/3]$, $b_n \in \mathbb{Z}$, tels que

$$f(t) = \begin{cases} 3^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ 3^{a_1}t + 4b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1}}t + 4b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + 4b_n & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}, \text{ et } p'_i = f(p_i).$$

Par abus de langage, on dit que $u/3^v \in \mathbb{Z}[1/3]$ est divisible par 2 s'il est dans $2\mathbb{Z}[1/3]$, autrement dit si 2 divise u .

Proposition 8 Si $f \in H_{3,4}$, il existe une application $T(f) \in H_{3,4}$ telle que :

- $T(f)$ est le produit de f par des éléments de \overline{F}_3
- Les points de rupture de $T(f)$ sont entiers
- $T(f)$ et f ont le même nombre de points de rupture non divisibles par 2, et leurs premier point de rupture non divisible par 2 ont le même ordre
- $T(f)$ est l'identité au voisinage de 0

Démonstration:

On commence par associer d'abord à toute $f \in H_{3,4}$ une application $T_1(f)$ valant l'identité au voisinage de 0. Si f vérifie $a_0 > 0$, on fixe p le plus petit entier positif tel que $2p \geq p_n$ et on pose

$$\Psi(t) = \begin{cases} 3^{a_0}t & \text{sur } [0, 2p] \\ t + 2p(3^{a_0} - 1) & \text{sur } [2p, +\infty[\end{cases}. \text{ Alors } \Psi \in \overline{F}_3, \text{ et}$$

$$f\Psi^{-1}(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, 3^{a_0}p_1] \\ 3^{a_1 - a_0}t + 4b_1 & \text{sur } [3^{a_0}p_1, 3^{a_0}p_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1} - a_0}t + 4b_{n-1} & \text{sur } [3^{a_0}p_{n-1}, 3^{a_0}p_n] \\ 3^{-a_0}t + 4b_n & \text{sur } [3^{a_0}p_n, 3^{a_0}(2p)] \\ t + 4b_n - 2p(3^{a_0} - 1) & \text{sur } [3^{a_0}(2p), +\infty[\end{cases}$$

Si par contre $a_0 < 0$, on fixe p entier tel que $2p > p'_n$ et on pose

$$\Psi(t) = \begin{cases} 3^{-a_0}t & \text{sur } [0, 2p] \\ t + 2p(3^{-a_0} - 1) & \text{sur } [2p, +\infty[\end{cases}. \text{ Alors } \Psi \in \overline{F}_3, \text{ et}$$

$$\Psi f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ 3^{a_1 - a_0}t + 4.3^{-a_0}b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1} - a_0}t + 4.3^{-a_0}b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ 3^{-a_0}t + 4.3^{-a_0}b_n & \text{sur } [p_n, 2p - 4b_n] \\ t + 4b_n + 2p(3^{-a_0} - 1) & \text{sur } [2p - 4b_n, +\infty[\end{cases}$$

On note dans chacun des cas $T_1(f)$ l'application ainsi obtenue.

On va de même définir, si f est dans $H_{3,4}$, $T_2(f)$ à points de rupture entiers. Pour cela on change légèrement les notations en prenant un dénominateur commun aux points de rupture de f : on fixe $\alpha \in \mathbb{N}$, et $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}$ tels que les points de rupture de f s'écrivent $\frac{p_i}{3^{2\alpha}}$. On pose $p'_i = f(p_i/3^{2\alpha})$, le reste des notations étant inchangé.

On prend p le plus petit entier positif tel que $2p + 4b_n \geq p'_n$ et $2p3^{2\alpha} \geq p_n$ et on définit φ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 3^{-2\alpha}t & \text{sur } [0, 2p3^{2\alpha}] \\ t + 2p - 2p3^{2\alpha} & \text{sur } [2p3^{2\alpha}, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Alors } \varphi \in \overline{F}_3 \cap F_9, \text{ et } \varphi^{-1}(t) = \begin{cases} 3^{2\alpha}t & \text{sur } [0, 2p] \\ t - 2p + 2p3^{2\alpha} & \text{sur } [2p, +\infty[\end{cases}.$$

$$\text{On a } f\varphi(t) = \begin{cases} 3^{a_0-2\alpha}t & \text{de } [0, p_1] \text{ dans } [0, p'_1] \\ 3^{a_1-2\alpha}t + 4b_1 & \text{de } [p_1, p_2] \text{ dans } [p'_1, p'_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1}-2\alpha}t + 4b_{n-1} & \text{de } [p_{n-1}, p_n] \text{ dans } [p'_{n-1}, p'_n] \\ 3^{-2\alpha}t + 4b_n & \text{de } [p_n, 2p3^{2\alpha}] \text{ sur } [p'_n, 2p + 4b_n] \\ t - 2p(3^{2\alpha} - 1) + 4b_n & \text{de } [2p \cdot 3^{2\alpha}, +\infty[\\ & \text{sur } [2p + 4b_n, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Si } b_n \geq 0 \text{ on a alors } \varphi^{-1}f\varphi(t) = \begin{cases} 3^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ 3^{a_1}t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1}}t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_n & \text{sur } [p_n, 3^{2\alpha}(2p - 4b_n)] \\ 3^{-2\alpha}t + 2p(3^{2\alpha} - 1) + 4b_n & \text{sur } [3^{2\alpha}(2p - 4b_n), 3^{2\alpha}2p] \\ t + 4b_n & \text{sur } [3^{2\alpha}2p, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{et si } b_n \leq 0, \varphi^{-1}f\varphi(t) = \begin{cases} 3^{a_0}t & \text{sur } [0, p_1] \\ 3^{a_1}t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ \dots & \\ 3^{a_{n-1}}t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_{n-1} & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + 4 \cdot 3^{2\alpha}b_n & \text{sur } [p_n, 3^{2\alpha}(2p)] \\ 3^{2\alpha}t - 2p(3^{2\alpha} - 1) + 4b_n & \text{sur } [3^{2\alpha}2p, 3^{2\alpha}(2p - 4b_n)] \\ t + 4b_n & \text{sur } [3^{2\alpha}(2p - 4b_n), +\infty[\end{cases}$$

On note $T_2(f)$ l'application $\varphi^{-1}f\varphi$.

Alors $T(f) = T_2(T_1(f))$ a les propriétés voulues. ■

On note $\chi_1(f)$ le nombre de points de rupture de f non divisibles par 2, et $\chi_2(f)$ le nombre de points de rupture strictement inférieurs au premier point non divisible par 2 (0 si $\chi_1(f) = 0$).

On pose enfin $\chi(f) = (\chi_1(f), \chi_2(f))$ et on ordonne $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par l'ordre lexicographique $[(a, b) \leq (c, d)]$ si et seulement si $(a < c)$ ou $(a = c \text{ et } b \leq d)$.

On remarque que si f a pour points de rupture $p_1, \dots, p_n, p'_i = f(p_i) = 3^{a_i}p_i + 4b_i$, donc p'_i est divisible par 2 si et seulement si p_i l'est. Mais alors, les p'_i étant les points de rupture de f^{-1} et f étant croissante, $\chi(f^{-1}) = \chi(f)$. De plus $\chi(T(f)) = \chi(f)$ car $\chi_1(T(f)) = \chi_1(f)$ et les points de rupture supplémentaires de $T(f)$ sont strictement supérieurs au dernier point de rupture de f , donc $\chi_2(T(f)) = \chi_2(f)$.

On peut maintenant prouver la proposition 7 :

Démonstration:

On remarque que si $\chi(f) = (0, 0)$, $f \in \overline{F}_3$; cela nous permet d'initialiser une récurrence sur $\chi(f)$: on fixe $f \in H_{3,4}$, on suppose que toute $g \in H_{3,4}$ telle que $\chi(g) < \chi(f)$ est un produit d'éléments de F_9 et \overline{F}_3 , et on veut montrer que f a la même propriété.

On peut remplacer f par $T(f)$, c'est à dire supposer que f est à points de rupture entiers et vaut l'identité au voisinage de 0, grâce aux propriétés de T décrites plus haut.

On distingue deux cas selon p_1 , le premier point de rupture de f (qui est donc entier) :

Si 2 divise p_1

$$\text{Notons } \sigma(f) : t \rightarrow f(t + p_1) - p_1, \text{ et } \tau(f) : t \rightarrow \begin{cases} t & \text{si } t \leq p_1 \\ f(t - p_1) + p_1 & \text{si } t \geq p_1. \end{cases}$$

$\sigma(f)$ est dans $H_{3,4}$: en un point t tel que $f(t + p_1) = 3^\alpha(t + p_1) + 4\beta$, $\sigma(f)(t) = 3^\alpha t + 4\beta + (3^\alpha - 1)p_1 = 3^\alpha t + 4[\beta + \frac{(3^\alpha - 1)p_1}{4}]$, et les points de rupture de $\sigma(f)$ sont $p_2 - p_1, \dots, p_n - p_1$.

Ainsi, $\chi_1(\sigma(f)) = \chi_1(f)$, $\chi_2(\sigma(f)) = \chi_2(f) - 1$ et donc $\chi(\sigma(f)) < \chi(f)$; on peut ainsi écrire $\sigma(f) = \prod f_i$, f_i étant dans F_9 ou \overline{F}_3 .

Alors $f = \tau(\sigma(f)) = \tau(\prod f_i) = \prod \tau(f_i)$, et un calcul analogue à celui effectué pour σ montre que si f_i est dans \overline{F}_3 ou F_9 , $\tau(f_i)$ aussi.

On a donc bien écrit f sous la forme voulue.

Si p_1 n'est pas divisible par 2 : supposons tout d'abord a_1 positif.

On montre que a_1 est pair et $b_1/2$ entier : par continuité en p_1 , $4b_1 = (1 - 3^{a_1})p_1 = -2(1 + 3 + 9 + \dots + 3^{a_1-1})p_1$, et en simplifiant par 2 : $2b_1 = -(1 + 3 + 9 + \dots + 3^{a_1-1})p_1$. En écrivant b_1 sous la forme $\frac{u}{3^v}$, en multipliant cette égalité par $2 \cdot 3^v$ puis en réduisant modulo 4, on obtient finalement $0 = (-1)^v(1 + (-1) + 1 + \dots + (-1)^{a_1-1})[2p_1]$, ce qui n'est possible, $[2p_1]$ étant non nul, que si a_1 est pair. Maintenant, a_1 étant pair, l'égalité initiale nous dit que $b_1/2 = -\frac{3^{a_1}-1}{8}p_1$ est entier.

Définissons $\pi(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_1] \\ 3^{a_1}t + 4b_1 & \text{sur } [p_1, p_2] \\ t + (3^{a_1} - 1)p_2 + 4b_1 & \text{sur } [p_2, +\infty[\end{cases}$. π est dans F_9 et on a :

$$\pi^{-1}f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0, p_2] \\ 3^{a_2}t + 4b_2 - (3^{a_1} - 1)p_2 - 4b_1 & \text{sur } [p_2, p_3] \\ \dots & \dots \\ 3^{a_{n-1}}t + 4b_{n-1} - (3^{a_1} - 1)p_2 - 4b_1 & \text{sur } [p_{n-1}, p_n] \\ t + 4b_n - (3^{a_1} - 1)p_2 - 4b_1 & \text{sur } [p_n, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\chi_1(\pi^{-1}f) = \chi_1(f) - 1$, donc $\chi(\pi^{-1}f) < \chi_1(f)$ et on peut écrire grâce à l'hypothèse de récurrence $\pi^{-1}f$ et donc f sous la forme voulue.

Si a_1 est négatif, on applique ce qui précède à $T(f^{-1}) : \chi(T(f^{-1})) = \chi(f)$, et $T(f^{-1})$ vaut l'identité au voisinage de 0, est à points de rupture entiers et sa deuxième pente (son ' a_1 ') est positif. Mais si $T(f^{-1})$ est un produit d'éléments de F_9 et \bar{F}_3 , c'est aussi le cas pour f^{-1} et donc pour f . ■

Comme les groupes F_3 et F_9 sont tous les deux de type fini, on a donc prouvé :

Proposition 9 $H_{3,4}$ est de type fini.

Nous allons maintenant décrire et étudier ce groupe plus en détail pour en trouver une présentation infinie 'naturelle' qui se ramènera à une présentation finie.

3 Une description forestière de $H_{3,4}$

Belk et Brown, dans leur travail [1] sur les éléments de longueur minimale du groupe de Thompson $F = F_2$ utilisent une description du groupe par des couples de forêts, analogue sur $[0, \infty[$ de la description classique de F sur $[0, 1]$ par des couples d'arbres.

Nous allons ici de la même manière donner une représentation en termes de forêts de notre groupe $H_{3,4}$, sur laquelle il sera facile de 'lire' une présentation du groupe.

On sait (cf.[12]) que les applications

$$y_{2i} : t \mapsto \begin{cases} t & \text{sur } [0, 2i] \\ 3t - 4i & \text{sur } [2i, 2(i+1)] \\ t + 4 & \text{sur } [2(i+1), \infty[\end{cases}, i \in \mathbb{N}, \text{ engendrent } \bar{F}_3, \text{ et que les}$$

$$z_k : t \mapsto \begin{cases} t & \text{sur } [0, k] \\ 9t - 8k & \text{sur } [k, k+1] \\ t + 8 & \text{sur } [k+1, \infty[\end{cases}, k \in \mathbb{N}, \text{ engendrent } F_9.$$

Par conséquent, les y_{2i} et les z_k engendrent $H_{3,4}$.

Définition 4 Si $f \in H_{3,4}$, on appelle $f \circ y_{2i}^{-1}$ et $f \circ z_k^{-1}$ des expansions élémentaires de f .

Une expansion de f est une suite d'expansions élémentaires appliquées successivement à f .

Considérons une application $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. Alors

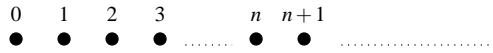
$$f \circ y_{2i}^{-1} : \begin{cases} [0, 2i] & \xrightarrow{Id} & [0, 2i] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [2i, 2(i+3)] & \xrightarrow{/3} & [2i, 2(i+1)] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [2(i+3), \infty[& \xrightarrow{-4} & [2(i+1), \infty[& \xrightarrow{f} & \dots \end{cases}$$

et

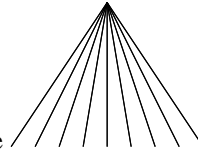
$$f \circ z_k^{-1} : \begin{cases} [0, k] & \xrightarrow{Id} & [0, k] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [k, k+9] & \xrightarrow{/9} & [k, k+1] & \xrightarrow{f} & \dots \\ [k+9, \infty[& \xrightarrow{-8} & [k+1, \infty[& \xrightarrow{f} & \dots \end{cases}$$

On constate que l'expansion par z_k^{-1} remplace à la source de f l'intervalle $[k, k+1]$ par les intervalles $[k, k+1], \dots, [k+8, k+9]$, et que l'expansion par y_{2i}^{-1} remplace les 2 intervalles $[2i, 2i+1], [2i+1, 2i+2]$ par les 6 intervalles $[2i, 2i+1], [2i+1, 2i+2], \dots, [2i+5, 2i+6]$.

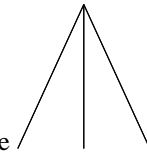
Une application f étant fixée, on peut représenter chacune de ses expansions par une forêt, qui va correspondre à la manière dont on subdivise les intervalles sources de f : pour représenter f elle-même, on prend l'expansion triviale constituée d'une infinité d'arbres réduits à une feuille, indexés par \mathbb{N} ; on numérote les feuilles de gauche à droite.



Pour chaque z_k^{-1} on remplace la k -ième feuille par l'arbre

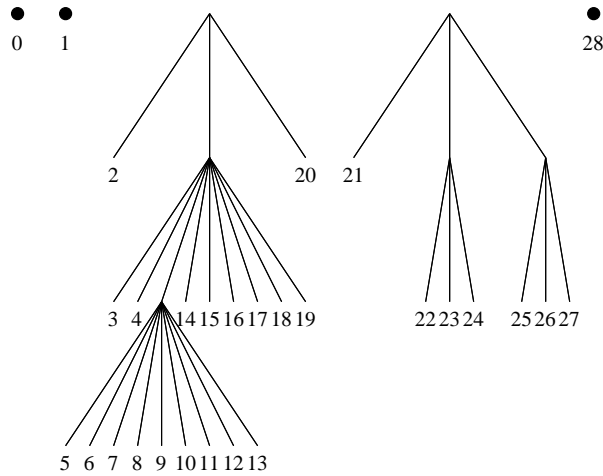


Pour chaque y_{2i}^{-1} on remplace chacune des feuilles $2i, 2i+1$ par l'arbre



Et pour une expansion quelconque, produit d'expansions élémentaires, on répète les opérations précédentes en prenant les expansions élémentaires successives de gauche à droite.

Par exemple à l'expansion $y_2^{-1} z_3^{-1} z_5^{-1} y_{22}^{-1}$ de Id correspond la forêt (on précise l'ordre de chaque feuille) :



En suivant leur définition on peut interpréter les forêts obtenues comme des applications, mais aussi comme une subdivision des intervalles $[0, 1], [1, 2], \dots, [n, n+1], \dots$, la

composition par z_k^{-1} correspondant à diviser en 9 parties égales le k -ième intervalle, et la composition par y_{2i}^{-1} à subdiviser en 3 parties égales chacun des intervalles d'ordre $2i$ et $2i + 1$.

Bien entendu ces deux interprétations sont équivalentes : à une subdivision en intervalles de $[0, \infty[$, correspond l'application qui envoie de manière affine $[0, 1]$ sur le premier intervalle, $[1, 2]$ sur le second, etc...

Définition 5 On appelle partition standard une expansion de Id , c'est-à-dire une forêt du type précédent, ou de manière équivalente, un homéomorphisme de $[0, \infty[$ produit de y_{2i}^{-1} et de z_k^{-1} pour certains $i, k \in \mathbb{N}$.

Etant donnée une partition standard, on appelle $s(i)$ l'opposé du logarithme en base 3 de la longueur de l'intervalle d'ordre i . Cela correspond, si l'on prend en compte toutes les décompositions régulières d'intervalles depuis un intervalle de longueur 1 jusqu'à l'intervalle i , à rajouter 1 pour chaque découpe en 3 morceaux et 2 pour chaque découpe en 9.

Par exemple pour la partition standard y_0^{-1} , $s(0) = s(1) = \dots = s(5) = 1$ et si $i \geq 5$, $s(i) = 0$. Pour z_1^{-1} , $s(0) = 0$, $s(1) = \dots = s(9) = 2$, et ensuite $s(i) = 0$.

Alors :

Proposition 10 (P) : les intervalles d'une partition standard à s impair vont par 2, à partir d'un intervalle d'ordre multiple de 2.

Démonstration:

Fixons une partition standard f vérifiant (P), on va montrer que (P) est vraie pour toute expansion élémentaire de cette partition standard.

– Pour une expansion élémentaire $f \circ y_{2i}^{-1}$:

f vérifiant (P), $s(2i)$ et $s(2i + 1)$ ont la même parité. Chacun de ces intervalles est remplacé par 3 intervalles dont la valeur de s est un de plus que celle de l'intervalle dont on a fait l'expansion : la parité de s est donc constante pour ces 6 nouveaux intervalles. Les intervalles d'ordre strictement inférieur à $2i$ gardent leur ordre et leur valeur de s , les intervalles d'ordre supérieur ou égal à $2(i + 1)$ gardent leur valeur de s alors que leur ordre est augmenté de 4, multiple de 2. Par conséquent la nouvelle partition vérifie bien (P).

– Pour une expansion élémentaire $f \circ z_k^{-1}$:

Il existe un unique i tel que $2i \leq k < 2(i + 1)$, et notre partition vérifiant (P), $s(2i)$, $s(2i + 1)$ ont la parité de $s(k)$.

Dans l'expansion, on remplace l'intervalle d'ordre k par 9 intervalles de longueur divisée par 9, c'est à dire que s augmente de 2 : il garde même parité. Mais la parité de $s(k)$ est alors celle de tous les $s(2i), \dots, s(2i + 9)$.

Les intervalles d'ordre strictement inférieur à $2i$ gardent leur ordre et leur valeur de s , les intervalles d'ordre supérieur ou égal à $2(i + 1)$ gardent leur valeur de s alors que leur ordre est augmenté de 8, multiple de 2.

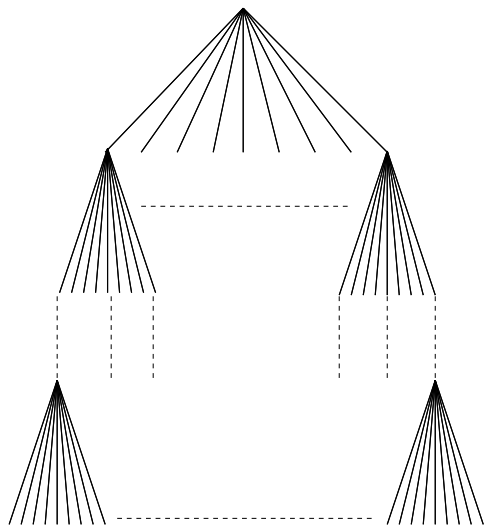
Ainsi $f \circ z_k^{-1}$ vérifie (P).

(P) est donc vérifiée pour l'identité et pour chaque expansion élémentaire d'une application f vérifiant (P) ; comme toute partition standard est une suite finie d'expansions élémentaires, (P) est vérifiée pour toutes les partitions standard. ■

Corollaire 1 Deux partitions standard ont une expansion commune.

Démonstration:

Commençons par prouver que toute partition standard a une expansion de la forme suivante : on accole k fois consécutives à partir de la première feuille l'arbre de hauteur n :



(cela revient à découper régulièrement $[0, 1], \dots, [k-1, k]$ en intervalles de même longueur 3^{-2n} , en laissant inchangés les autres intervalles $[i, i+1], i \geq k$.)

En effet, d'après la proposition précédente, il suffit de rajouter sur chaque suite de 2 intervalles ayant s impair des expansions de type y pour se ramener à une partition ayant tous les $s(i)$ pairs. Puis d'effectuer des expansions de type z pour se ramener à avoir, pour un certain N bien choisi, les N premiers intervalles ayant le même $s(i)$, et les suivants ayant $s(i) = 0$, ce qui est bien la forme souhaitée.

Comme il est clair que deux telles partitions ont une expansion commune, le résultat est prouvé. ■

Ce dernier point va nous permettre de donner une nouvelle interprétation de $H_{3,4}$ en terme de couples de forêts : on considère \mathcal{H} l'ensemble des pq^{-1} pour p, q des partitions standard (vue comme des applications). Alors :

- \mathcal{H} est un sous-groupe de $H_{3,4}$; pour le montrer il suffit de vérifier que si p et r^{-1} sont dans \mathcal{H} , $r^{-1}p$ aussi. Mais p et r étant des partitions standard, ils ont une expansion commune, i.e il existe q et s des partitions standard telles que $pq = rs$. Mais alors $r^{-1}p = sq^{-1}$, d'où le résultat.
- \mathcal{H} contient \overline{F}_3 et F_9 car par définition il contient les générateurs y_{2i}^{-1} de \overline{F}_a et z_k^{-1} de F_9 . Comme \overline{F}_3 et F_9 engendrent $H_{3,4}$, on en déduit que $\mathcal{H} = H_{3,4}$.

Une conséquence est que l'on peut représenter tout élément de $H_{3,4}$ comme un couple de forêts, ou de partitions standards (F_1, F_2) , et le choix se fait à une expansion près : pour toute expansion F , les couples (F_1, F_2) et (F_1F, F_2F) représentent le même élément du groupe $H_{3,4}$.

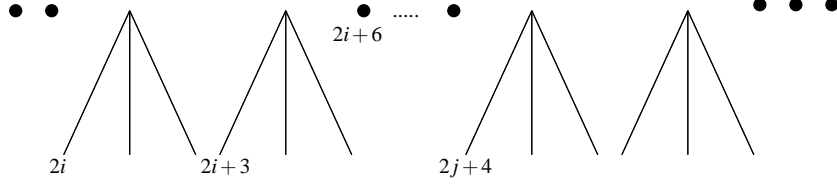
Cela nous permet de faire des calculs de composés grâce à la règle $(F_1, F_2)(F_2, F_3) = (F_1, F_3)$: pour composer (G_1, G_2) et (G_3, G_4) on considère une expansion commune de G_2 et G_3 : G et G' tels que $G_2G = G_3G'$. Alors $(G_1, G_2)(G_3, G_4) = (G_1G, G_4G')$.

4 $F_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie

4.1 Relations dans le groupe $H_{3,4}$

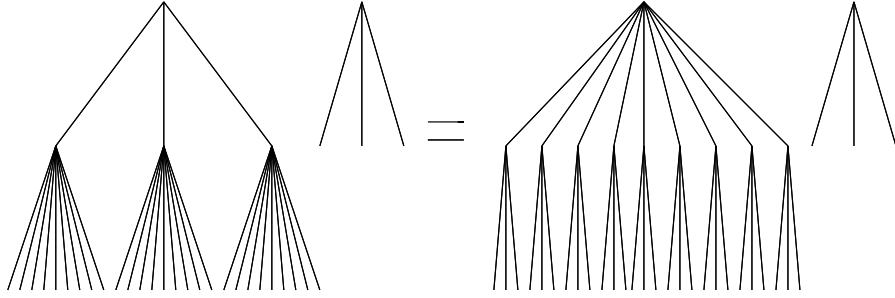
On remarque que si l'on obtient de deux manières différentes à partir d'expansions élémentaires une partition standard, on obtient une relation entre les générateurs y_{2i} et z_k de $H_{3,4}$.

Par exemple, la même forêt



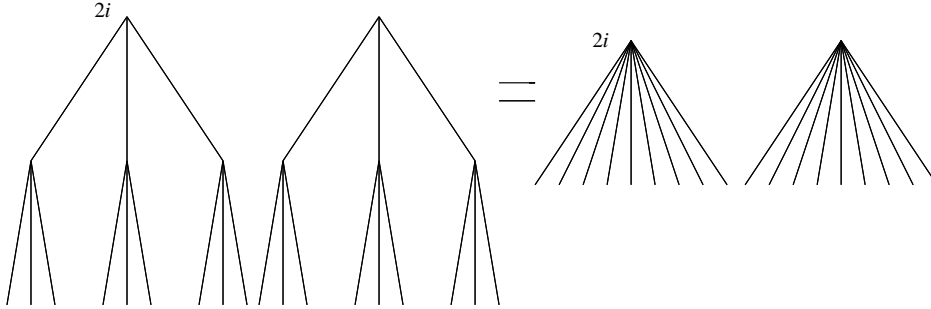
est obtenue par $y_{2j}^{-1}y_{2i}^{-1}$ et $y_{2i}^{-1}y_{2j+4}^{-1}$, donc on a la relation $y_{2i}y_{2j} = y_{2j+4}y_{2i}$ si $i < j$.

De même, l'égalité forestière (ou plutôt, l'égalité entre les intervalles représentés par les forêts)



fournit la relation : $y_{2i}^{-1}z_{2i+2}^{-1}z_{2i+1}^{-1}z_{2i}^{-1} = z_{2i}^{-1}y_{2i+8}^{-1}y_{2i+6}^{-1}y_{2i+4}^{-1}y_{2i+2}^{-1}y_{2i}^{-1}$, soit

$$y_{2i}y_{2i+2}y_{2i+4}y_{2i+6}y_{2i+8}z_{2i} = z_{2i}z_{2i+1}z_{2i+2}y_{2i}, \text{ et de même,}$$



donne la relation $y_{2i}^{-1}y_{2i+4}^{-1}y_{2i+2}^{-1}y_{2i}^{-1} = z_{2i+1}^{-1}z_{2i}^{-1}$, soit $z_{2i}z_{2i+1} = y_{2i}y_{2i+2}y_{2i+4}y_{2i}$.

On trouve de cette manière l'ensemble (R) de relations suivant :

$(R_{k,l}^1)$	$k < l :$	$z_k z_l = z_{l+8} z_k$
$(R_{i,j}^2)$	$i < j :$	$y_{2i} y_{2j} = y_{2j+4} y_{2i}$
$(R_{k,i}^3)$	$k < 2i :$	$z_k y_{2i} = y_{2i+8} z_k$
$(R_{i,k}^4)$	$2i+1 < k :$	$y_{2i} z_k = z_{k+4} y_{2i}$
(R_i^5)	$\forall i$	$z_{2i} z_{2i+1} = y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i}$ $z_{2i+9} z_{2i} = y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2$
(R_i^6)	$\forall i$	$y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i+6} y_{2i+8} z_{2i} = z_{2i} z_{2i+1} z_{2i+2} y_{2i}$ $y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i} = z_{2i+18} z_{2i+9} z_{2i} y_{2i}$
(R_i^7)	$\forall i$	$y_{2i} y_{2i+2} y_{2i+4} y_{2i+6} y_{2i+8} z_{2i+1} = z_{2i+3} z_{2i+4} z_{2i+5} y_{2i}$ $y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} z_{2i+1} = z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}$

Nous allons maintenant prouver que ces relations sont suffisantes pour décrire le groupe $H_{3,4}$, c'est à dire que le groupe $\mathcal{H}_{3,4}$ défini par les générateurs $y_{2i}, i \in \mathbb{N}$ et $z_k, k \in \mathbb{N}$ et les relations (R) s'injecte dans $H_{3,4}$.

4.2 Forme semi-normale dans $\mathcal{H}_{3,4}$

(R^5) donne $z_{2i} = z_{2i+9}^{-1} y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i}^2$. Cela montre que le groupe $\mathcal{H}_{3,4}$ est engendré par les z_{2k+1} et les y_{2k} , $k \in \mathbb{N}$.

(R^7) donne $y_{2i} z_{2i+1} = y_{2i+6}^{-1} y_{2i+12}^{-1} y_{2i+18}^{-1} y_{2i+24}^{-1} z_{2i+21} z_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}$, et (R^5) $z_{2i+21} z_{2i+12} = y_{2i+24} y_{2i+18} y_{2i+12}^2$, et donc $y_{2i} z_{2i+1} = y_{2i+6}^{-1} y_{2i+12} z_{2i+3} y_{2i}$. On montre de même que $y_{2i} z_{2i+1}^{-1} = z_{2i+3}^{-1} y_{2i+12}^{-1} y_{2i+6} y_{2i}$. R^2 et R^4 donnent, si $k > 2i + 1$, $y_{2i} z_k = z_{k+4} y_{2i}$, $y_{2i} z_k^{-1} = z_{k+4}^{-1} y_{2i}$, $y_{2i} y_k = y_{k+4} y_{2i}$ et $y_{2i} y_k^{-1} = y_{k+4}^{-1} y_{2i}$. R^3 donne, si $k < 2i$, $z_k y_{2i} = y_{2i+8} z_k$ et $z_k y_{2i}^{-1} = y_{2i+8}^{-1} z_k$, et si $k < l$, R^1 donne $z_k z_l = z_{l+8} z_k$ et $z_k z_l^{-1} = z_{l+8}^{-1} z_k$. Ces relations suggèrent que tout élément du groupe admet une forme semi-normale :

Proposition 11 *Tout élément $h \in \mathcal{H}_{3,4}$ a une écriture de la forme :*

$$h = y_0^{-\alpha_0} z_1^{-\alpha_1} y_2^{-\alpha_2} z_3^{-\alpha_3} \dots z_3^{\beta_3} y_2^{\beta_2} z_1^{\beta_1} y_0^{\beta_0},$$

les α_i et β_i étant tous positifs, et nuls à partir d'un certain rang.

Démonstration:

Soit $n(h)$ le nombre minimal de lettres du type z_{2k+1} nécessaires pour écrire h en fonction des générateurs y_{2i} et z_{2k+1} . Si $n(h) = 0$, h est dans F_3 et donc h s'écrit bien sous forme normale (cf.[2]).

On suppose que tout élément tel que $n(h) < n$ s'écrit sous forme normale, et soit h tel que $n(h) = n$. Considérons le plus petit indice des lettres y et z apparaissant dans h ; on distingue deux cas :

- Si cet indice est pair, i.e y_{2i} apparaît, et aucune lettre d'indice inférieur. Alors on peut grâce aux relations précédentes faire passer à gauche toutes les apparitions de y_{2i}^{-1} et à droite toutes les apparitions de y_{2i} , sans changer le nombre de lettres z , et en ne faisant apparaitre aucune lettre d'indice inférieur ou égal à $2i$, et ainsi écrire $h = y_{2i}^{-\alpha} h' y_{2i}^{\beta}$ avec $\alpha, \beta \geq 0$, $n(h') = n(h)$ et h' ayant toutes ses lettres d'indice strictement supérieur à $2i$.

On peut recommencer cette opération tant que l'indice minimal apparaissant dans le nouveau mot h' est pair.

- Si l'indice minimal apparaissant dans h est impair, i.e z_{2k+1} apparaît, et aucune lettre d'indice inférieur. Alors comme pour $2k + 1 < 2i$ et $k < l$, $z_{2k+1} y_{2i} = y_{2i+8} z_{2k+1}$, $z_{2k+1} y_{2i}^{-1} = y_{2i+8}^{-1} z_{2k+1}$, $z_{2k+1} z_{2l+1} = z_{2l+9} z_{2k+1}$, $z_{2k+1} z_{2l+1}^{-1} = z_{2l+9}^{-1} z_{2k+1}$, on peut écrire $h = z_{2k+1}^{-\alpha} h' z_{2k+1}^{\beta}$ avec $n(h') < n(h)$.

Cela permet de conclure par récurrence. ■

L'existence de cette forme semi-normale implique alors l'injectivité de l'application canonique de $\mathcal{H}_{3,4}$ dans $H_{3,4}$: soit $h \neq 1 \in \mathcal{H}_{3,4}$. Alors h a une forme semi-normale non triviale; soit k le premier indice tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. h est conjugué dans $\mathcal{H}_{3,4}$ à un élément de la forme $\theta_k^{-\alpha_k + \beta_k} h'$ avec $\theta_k = y_k$ si k est pair, z_k si k est impair, et h' s'exprimant uniquement en fonction de y_{2i} et z_l d'indices strictement supérieurs à k . Mais l'image de h' dans $H_{3,4}$ est l'identité sur $[0, k + 1]$, et $\theta_k^{-\alpha_k + \beta_k}$ n'est pas l'identité sur $[k, k + 1]$: ainsi, l'image de h ne peut pas être l'identité de $[0, \infty[$: l'application $\mathcal{H}_{3,4} \rightarrow H_{3,4}$ est injective.

Comme la proposition 7 montrait la surjectivité, nous avons prouvé :

Proposition 12 *Le groupe $H_{3,4}$ peut être présenté par les générateurs y_{2i} et z_k et les relations (R).*

4.3 Une présentation finie de $H_{3,4}$

On va montrer que la présentation $\langle y_0, y_2, \dots, z_0, z_1, z_2, \dots \mid R \rangle$ se ramène à une présentation finie.

Pour cela on définit à partir de y_0, y_2, y_4 et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$, pour $n \geq 1$, $y_{4n+2} = y_0^n y_2 y_0^{-n}$ et $y_{4n+4} = y_0^n y_4 y_0^{-n}$, et de même, pour $\alpha = 1, 2, \dots, 8$, $z_{8n+\alpha} = z_0^\alpha z_\alpha z_0^{-\alpha}$. Il est facile de vérifier que $z_0 z_k z_0^{-1} = z_{k+8}$ et $y_0 y_{2i} y_0^{-1} = y_{2i+4}$ pour tous $k, i \geq 1$.

On considère le groupe défini par les générateurs $y_0, y_2, y_4, z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$ et les relations $R_{k,l}^1$ pour $k < l$, $l \leq 17$, $R_{i,j}^2$ pour $i < j$, $j \leq 5$, $R_{k,i}^3$ pour $k < 2i$, $i \leq 7$, $R_{i,k}^4$ pour $2i + 2 < k$, $k \leq 15$, R_i^5, R_i^6, R_i^7 pour $i \leq 3$ (en toute rigueur ce ne sont pas directement ces relations que

l'on prend, mais les relations obtenues en remplaçant formellement toutes les occurrences de $y_{2i}, i > 2$ et $z_k, k > 8$ par leur définition en fonction de y_0, y_2, y_4 et $z_0, z_1, z_2, \dots, z_8$.

On va montrer que dans ce groupe, toutes les relations R sont vérifiées.

– R^1 est vraie :

$R_{k,l}^1$ l'est par hypothèse pour $l \leq 17, k < l$.

Fixons $l > 17$ et $k < l$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^1$ vraie pour $\lambda < l, \kappa < \lambda$.

Si $k \leq 8$ on a

$$\begin{aligned} z_k z_l z_k^{-1} &= z_k (z_9 z_{l-8} z_9^{-1}) z_k^{-1} && (R_{9,l-8}^1) \\ &= (z_k z_9 z_k^{-1}) (z_k z_{l-8} z_k^{-1}) (z_k z_9^{-1} z_k^{-1}) \\ &= (z_0 z_9 z_0^{-1}) (z_0 z_{l-8} z_0^{-1}) (z_0 z_9^{-1} z_0^{-1}) && (R_{*,l-8}^1, R_{*,9}^1) \\ &= z_0 (z_9 z_{l-8} z_9^{-1}) z_0^{-1} \\ &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{9,l-8}^1) \\ &= z_{l+8} \end{aligned}$$

Si $k > 8$:

$$\begin{aligned} z_k z_l z_k^{-1} &= z_0 (z_{k-8} z_{l-8} z_{k-8}^{-1}) z_0^{-1} \\ &= z_0 z_l z_0^{-1} && (R_{k-8,l-8}^1) \\ &= z_{l+8} \end{aligned}$$

Donc $R_{k,l}^1$ est vérifiée. On montre de même que R^2 est vraie.

– R^3 est vraie :

$R_{k,i}^3$ l'est par hypothèse pour $i \leq 7, k < 2i$.

Fixons $i \geq 8$ et $k < 2i$ et supposons $R_{\kappa,\lambda}^3$ vraie pour $\lambda < i, \kappa < 2\lambda$.

Si $k \leq 8$ on a

$$\begin{aligned} z_k y_{2i} z_k^{-1} &= z_k (y_{10} y_{2i-4} y_{10}^{-1}) z_k^{-1} \\ &= (z_k y_{10} z_k^{-1}) (z_k y_{2i-4} z_k^{-1}) (z_k y_{10}^{-1} z_k^{-1}) \\ &= y_{18} y_{2i+4} y_{18}^{-1} && (R_{k,5}^3, R_{k,i-2}^3) \\ &= y_{2i+8} \end{aligned}$$

Si $k \geq 9$:

$$\begin{aligned} z_k y_{2i} z_k^{-1} &= z_0 (z_0^{-1} z_k z_0) (z_0^{-1} y_{2i} z_0) (z_0^{-1} z_k^{-1} z_0) z_0^{-1} \\ &= z_0 (z_{k-8} y_{2i-8} z_{k-8}^{-1}) z_0^{-1} && (R_{0,i-4}^3) \\ &= z_0 y_{2i} z_0^{-1} && (R_{k-8,i-4}^3) \\ &= (z_0 y_2) (y_2^{-1} y_{2i} y_2) (y_2^{-1} z_0^{-1}) \\ &= y_{10} z_0 y_{2i-4} z_0^{-1} y_{10}^{-1} && (R_{0,1}^3) \\ &= y_{10} y_{2i+4} y_{10} && (R_{0,i-2}^3) \\ &= y_{2i+8} \end{aligned}$$

Donc $R_{k,i}^3$ est vérifiée. On montre de même que R^4 est vraie.

– R^5 est vraie :

R_i^5 l'est par hypothèse pour $i \leq 3$.

Fixons $i > 3$ et supposons R_λ^5 vraie pour $\lambda < i$.

Alors

$$\begin{aligned} z_{2i+9} z_{2i} &= (y_0 z_{2i+5} y_0^{-1}) (y_0 z_{2i-4} y_0^{-1}) \\ &= y_0 z_{2i+5} z_{2i-4} y_0^{-1} \\ &= y_0 y_{2i+8} y_{2i+2} y_{2i-4} y_0^{-1} && (R_{i-2}^5) \\ &= y_{2i+12} y_{2i+6} y_{2i} \end{aligned}$$

Donc R_i^5 est vérifiée. On montre de même que R^6 et R^7 sont vraies.

On a donc prouvé :

Théorème A $H_{3,4}$, et donc $F_{\Gamma(2)}$, sont de présentation finie.

5 Le groupe $T_{\Gamma(2)}$

5.1 Définitions

Définition 6 $T_{\Gamma(2)}$ est le sous-groupe de $PPSL_2(\mathbb{Z})$ constitué des éléments qui, sur chacun des intervalles entre les points de rupture, coïncident avec un élément de $\Gamma(2)$.

Le cercle S^1 étant vu comme $[0, 1]$ où l'on identifie 0 et 1, on peut définir un groupe $T_{3,4}^{[0,1]}$:

Définition 7 $T_{3,4}^{[0,1]}$ est le groupe des homéomorphismes de S^1 , affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[1/3]$ et des pentes puissances de 3, de la forme $3^n x + \frac{p}{3^q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, sur chaque intervalle où ils sont affines.

Alors la conjugaison entre $F_{3,4}^{[0,1]}$ et $F_{\Gamma(2)}$ se prolonge en une conjugaison entre $T_{3,4}^{[0,1]}$ et $T_{\Gamma(2)}$.

Dans tout ce qui suit, on abrège $T_{3,4}^{[0,1]}$ et $F_{3,4}^{[0,1]}$ en $T_{3,4}$ et $F_{3,4}$ respectivement.

5.2 Propriétés de transitivité

Si I est un intervalle de \mathbb{R} , de manière analogue au cas $I = [0, 1]$, $F_{3,4}^I$ est défini comme le groupe des homéomorphismes de I affines par morceaux, avec des points de rupture sur $\frac{1}{4}\mathbb{Z}[1/3]$ et de la forme $x \rightarrow 3^n x + \frac{p}{3^q}$ sur chaque intervalle où ils sont affines ; on définit de même $\Omega_I = \mathbb{Z}[1/3] \cap I$. Alors Ω_I est stable par $F_{3,4}^I$ (I est stable par $F_{3,4}^I$, et si $\omega = u/3^v \in \Omega_I$, $f(\omega)$ est de la forme $3^n \frac{u}{3^v} + \frac{p}{3^q} = \frac{3^{n+q}u + 3^v p}{3^{v+q}}$ qui est bien dans $\mathbb{Z}[1/3]$.)

On va maintenant chercher à décrire l'action de $F_{3,4}^I$ sur Ω_I .

Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}[1/3]$ avec $0 < \alpha < \alpha'$.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \cdot 3^k \alpha > \alpha' - \alpha$. Posons $\beta = \alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{3^k}$; $\alpha < \beta < \alpha'$ et $\frac{3\alpha - \beta}{2} = \alpha + \frac{\alpha' - \alpha}{2 \cdot 3^k}$, donc $\alpha < \frac{3\alpha - \beta}{2} < \alpha'$.

Soient

$$f_1(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < \frac{3\alpha - \beta}{2} \\ 3(t - \alpha) + \beta & \text{si } \frac{3\alpha - \beta}{2} \leq t \leq \alpha \\ t + \beta - \alpha & \text{si } t > \alpha \end{cases}$$

et

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t < \alpha \\ 3^k(t - \beta) + \alpha' & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta \\ t + \alpha' - \beta & \text{si } t > \beta. \end{cases}$$

Alors f_1 et f_2 sont dans $F_{3,4}^{\mathbb{R}}$, et on a $f_1(0) = 0, f_1(\alpha) = \beta$ et $f_2(0) = 0, f_2(\beta) = \alpha'$. Par conséquent si $f = f_2 \circ f_1 \in F_{3,4}^{\mathbb{R}}$ est telle que $f(0) = 0, f(\alpha) = \alpha'$.

Si $\alpha > \alpha'$, on prend l'inverse de la fonction f correspondant à $\alpha' < \alpha$, ce qui nous donne aussi bien une fonction de $F_{3,4}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0, f(\alpha) = \alpha'$. Et bien entendu si $\alpha = \alpha'$, $f = Id_{\mathbb{R}}$ convient.

Soient maintenant u, v, u', v' dans $\mathbb{Z}[1/3]$ tels que $u < v, u' < v'$. Comme $v - u > 0$ et $v' - u' > 0$, par ce qui précède il existe $f \in F_{3,4}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0, f(v - u) = v' - u'$. Si on définit $g_{u,v,u',v'}$ par $g_{u,v,u',v'}(t) = u' + f(t - u)$, alors $g_{u,v,u',v'} \in F_{3,4}^{\mathbb{R}}$ et $g_{u,v,u',v'}(u) = u', g_{u,v,u',v'}(v) = v'$.

Proposition 13 Pour tout $l \geq 1$, $F_{3,4}^I$ agit l -transitivement sur Ω_I .

Démonstration:

Soient $u_1 < u_2 < \dots < u_l$ et $u'_1 < u'_2 < \dots < u'_l$ dans Ω_l . D'après ce qui précède, f définie sur I par :

$$f(t) = \begin{cases} g_{0,u_1,0,u'_1}(t) & \text{si } t \leq u_1 \\ g_{u_1,u_2,u'_1,u'_2}(t) & \text{si } u_1 \leq t \leq u_2 \\ \dots & \\ g_{u_{l-1},u_l,u'_{l-1},u'_l}(t) & \text{si } u_{l-1} \leq t \leq u_l \\ g_{u_l,1,u'_l,1}(t) & \text{si } u_l \leq t \end{cases}$$

est un élément de $F_{3,4}^I$ qui envoie u_i sur u'_i pour tout $1 \leq i \leq l$, d'où le résultat. ■

On peut au passage noter que si $u, v \in \mathbb{Z}[1/3]$, $u < v$, $g_{0,1,u,v}$ conjugue les deux groupes $F_{3,4}^{[u,v]}$ et $F_{3,4}$, et donc pour tout intervalle I d'extrémités dans $\mathbb{Z}[1/3]$, $F_{3,4}^I$ est isomorphe à $F_{3,4}$.

On peut montrer pour le groupe $T_{3,4}$ un résultat analogue de transitivité ; on note Ω' l'image dans S^1 de $\mathbb{Z}[1/3]$, alors :

Proposition 14 *Pour tout $n \geq 1$, $T_{3,4}$ agit transitivement sur les parties à n éléments de Ω' .*

5.3 Calculs de stabilisateurs

Dans cette partie nous étudions certains stabilisateurs de l'action de $T_{3,4}$ sur Ω' ce qui nous sera utile pour montrer que $T_{3,4}$ est de présentation finie.

Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit sur un groupe G , on rappelle que le produit semi-direct $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des couples (g, u) , $g \in G$, $u \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec le produit $(g, u)(h, v) = (gu.h, u + v)$. G est un sous-groupe d'indice fini de $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc G et $G \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont simultanément de présentation finie ou non.

– Soit Stab_α le sous-groupe de $T_{3,4}$ formé des éléments qui laissent fixe $\alpha \in \Omega'$. L'application $F_{3,4} \rightarrow \text{Stab}_\alpha$ qui à f associe $\tau_\alpha \circ f \circ \tau_\alpha^{-1}$ est un isomorphisme, et donc $\text{Stab}_\alpha \simeq F_{3,4}$.

– Soit $\text{Stab}_{\alpha,\beta}$ le sous-groupe de $T_{3,4}$ formé des éléments qui laissent fixes α et $\beta \in \Omega'$. Par la conjugaison par τ_α , on peut supposer que $\alpha = 0$.

Considérons alors l'application $F_{3,4}^{[0,\beta]} \times F_{3,4}^{[\beta,1]} \rightarrow \text{Stab}_{0,\beta}$ qui envoie (f_1, f_2) sur l'application qui à x associe $f_1(x)$ sur $[0, \beta]$ et $f_2(x)$ sur $[\beta, 1]$. C'est clairement un isomorphisme, et comme $F_{3,4}^{[0,\beta]} \simeq F_{3,4}^{[\beta,1]} \simeq F_{3,4}$, on a prouvé que $\text{Stab}_{\alpha,\beta} \simeq F_{3,4} \times F_{3,4} = F_{3,4}^2$.

On montre de même que le sous-groupe $\text{Stab}_{\alpha,\beta,\gamma}$ des éléments qui laissent fixes α, β et $\gamma \in \Omega'$ est isomorphe à $F_{3,4}^3$.

– Soit $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ le sous-groupe de $T_{3,4}$ formé des éléments qui laissent fixe globalement $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, α, β, γ distincts dans Ω' .

Si on se donne φ dans $T_{3,4}$ qui envoie $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ sur $\{0, 1/3, 2/3\}$ (φ existe par la proposition 14), φ conjugue $\text{Stab}_{\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ et $\text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}}$; il suffit donc d'étudier ce dernier groupe.

On définit une action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $F_{3,4}^{[0,1/3]} \times F_{3,4}^{[1/3,2/3]} \times F_{3,4}^{[2/3,1]}$ par

$$\begin{aligned} 0.(f, g, h) &= (f, g, h) \\ 1.(f, g, h) &= (\tau_{-2/3} \circ h \circ \tau_{2/3}, \tau_{1/3} \circ f \circ \tau_{-1/3}, \tau_{1/3} \circ g \circ \tau_{-1/3}) \\ 2.(f, g, h) &= (\tau_{-1/3} \circ g \circ \tau_{1/3}, \tau_{-1/3} \circ h \circ \tau_{1/3}, \tau_{2/3} \circ f \circ \tau_{-2/3}) \end{aligned}$$

(τ_a désigne la translation de a dans $F_{3,4}^{\mathbb{R}}$).

Si A est donnée par

$$A : \begin{cases} F_{3,4}^{[0,1/3]} \times F_{3,4}^{[1/3,2/3]} \times F_{3,4}^{[2/3,1]} \\ (f, g, h) \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \mapsto \end{matrix} \begin{cases} \text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}} \\ f \text{ sur } [0, 1/3] \\ g \text{ sur } [1/3, 2/3] \\ h \text{ sur } [2/3, 1], \end{cases}$$

on définit un morphisme B de $(F_{3,4}^{[0,1/3]} \times F_{3,4}^{[1/3,2/3]} \times F_{3,4}^{[2/3,1]}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}}$ par

$$\begin{aligned} ((f, g, h), 0) &\mapsto A(f, g, h) \\ ((f, g, h), 1) &\mapsto A(g \circ \tau_{1/3}, h \circ \tau_{1/3}, f \circ \tau_{-2/3}) \\ ((f, g, h), 2) &\mapsto A(h \circ \tau_{2/3}, f \circ \tau_{-1/3}, g \circ \tau_{-1/3}). \end{aligned}$$

Alors B est clairement injectif.

Fixons un élément s dans $\text{Stab}_{\{0,1/3,2/3\}}$.

Si s fixe 0, 1/3 et 2/3, $s = B((s|_{[0,1/3]}, s|_{[1/3,2/3]}, s|_{[2/3,1]}), 0)$.

Dans le cas contraire : aucun des trois points 0, 1/3 et 2/3 n'est fixe, car si (par exemple) 0 est fixe, s est dans $F_{3,4}$, et il n'y a aucun élément de $F_{3,4}$ qui échange deux points. Par conséquent, s permute circulairement les trois points.

Soit $\Psi = B((Id, Id, Id), 1)$; Ψ envoie 0 sur 1/3, 1/3 sur 2/3 et 2/3 sur 0.

Alors $\Psi \circ s$ ou $\Psi^{-1} \circ s$ fixe 0, 1/3 et 2/3, donc a un antécédent par B , de même que Ψ par construction : s est donc bien dans l'image de B . Ainsi, B est surjectif : B est un isomorphisme, et on a donc :

$$\text{Stab}_{\{\alpha, \beta, \gamma\}} \simeq (F_{3,4} \times F_{3,4} \times F_{3,4}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = F_{3,4}^3 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

On montre de même que le sous-groupe de $T_{3,4}$ formé des éléments qui laissent fixe globalement $\{\alpha, \beta\}$, α, β distincts dans Ω' , est isomorphe à $F_{3,4}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.4 $T_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie

On adapte ici une idée que Tsuboi donne dans [13] pour étudier le groupe de Thompson classique T [13], et qui nécessite le résultat suivant (cf.[9]) :

Proposition 15 *Soit \tilde{X} est un 2-complexe simplicial simplement connexe sur lequel le groupe T agit sans inversion. Si $X = \tilde{X}/T$ est fini et que les groupes d'isotropie associés aux sommets, arêtes et triangles sont de présentation finie, T est de présentation finie.*

On va ici considérer d'abord le 2-complexe simplicial \tilde{Y} des triangles a sommets dans Ω' . Ω' étant infini, \tilde{Y} est simplement connexe. Mais l'action de $T_{3,4}$ est avec inversion : pour éviter cela on considère l'action sur la subdivision barycentrique \tilde{X} de \tilde{Y} : \tilde{X} est un 2-complexe simplicial simplement connexe sur lequel le groupe $T_{3,4}$ agit sans inversion.

$X = \tilde{X}/T_{3,4}$ est fini : comme l'action de $T_{3,4}$ est transitive sur les ensembles à 1, 2 et 3 éléments de Ω' , X comporte trois sommets, p_0 orbite des sommets de \tilde{Y} , p_1 orbite des milieux de deux sommets \tilde{Y} et p_2 orbite des milieux des triangles de \tilde{Y} .

X a trois types d'arêtes, p_0p_1 , p_1p_2 et p_0p_2 , et deux types de triangles, $(p_0p_1p_2)$ et $(p_0p_2p_1)$.

Si on se donne un simplexe de \tilde{X} , son groupe d'isotropie ne dépend que de l'image du simplexe dans X , et on a grâce aux résultats de la partie précédente : $\text{Stab}(p_0) \simeq F_{3,4}$, $\text{Stab}(p_1) \simeq F_{3,4}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\text{Stab}(p_2) \simeq F_{3,4}^3 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\text{Stab}(p_0p_1) \simeq F_{3,4}^2$, $\text{Stab}(p_0p_2) \simeq F_{3,4}^3$, $\text{Stab}(p_1p_2) \simeq F_{3,4}^3$, $\text{Stab}((p_0p_1p_2)) \simeq F_{3,4}^3$ et $\text{Stab}((p_0p_2p_1)) \simeq F_{3,4}^3$. Mais tous ces stabilisateurs sont de présentation finie car $F_{3,4}$ l'est, et on conclut que $T_{3,4}$ est de présentation finie, et par conséquent :

Théorème B $T_{\Gamma(2)}$ est de présentation finie.

6 Compléments

Nous venons donc de prouver que les groupes $F_{\Gamma(2)}$ et $T_{\Gamma(2)}$ sont de présentation finie.

A partir des outils explicités dans ce qui précède on peut montrer deux résultats supplémentaires, analogue à des résultats concernant le groupe de Thompson F :

$$H_1(F_{\Gamma(2)}) = \mathbb{Z}^4$$

$[F_{\Gamma(2)}, F_{\Gamma(2)}]$ est simple.

D'autre part, les résultats de finitude pour $F_{\Gamma(2)}$ et $T_{\Gamma(2)}$ se généralisent en fait à tous les groupes Γ de genre 0 : on peut montrer que F_{Γ} est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe H qui est lui-même engendré par deux sous-groupes de Thompson classiques. Une description en termes de forêts de ce groupe H permet alors de montrer que qu'il admet une présentation infinie qui se ramène à une présentation finie. La différence avec ce que l'on a fait ici pour $\Gamma = \Gamma(2)$ est que l'existence d'une présentation 'régulière' ne passe plus par l'existence d'une forme semi-normale qui n'est pour le moment que conjecturale.

Références

- [1] Belk J.M, Brown K.S. **Forest diagrams for elements of Thompson's group F**, arXiv :math.GR/0305412v1 28 May 2003
- [2] Bieri R., Strebel R. **On groups of PL-homeomorphisms of the real line**, Notes, 1984
- [3] Brin M.G, Squier C.C. **Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line**, Invent.math.79, 485-498 (1985).
- [4] Brown K.S. **Finiteness properties of groups**, Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987), 45-75.
- [5] Belk J.M, Brown K.S. **Forest diagrams for elements of Thompson's group F**, preprint
- [6] Cannon J.W, Floyd W.J, Parry W.R. **Introductory notes on Richard Thompson's groups**, L'enseignement mathématique, t.42 (1996), p.215-256.
- [7] Ghys E., Sergiescu V. **Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle**, Comment.Math.Helvetici 62 (1987) 185-239
- [8] Greenberg P. **Projective aspects of the Higman-Thompson group**, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 633-644, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [9] Haefliger A. **Complexes of groups and orbihedra**, Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990, World Scientific, 1991, 504-540.
- [10] Imbert M. **Sur l'isomorphisme du groupe de Richard Thompson avec le groupe de Ptolémée**, Geometric Galois Actions (tome 2), edited by L.Schneps & P.Lochak, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 243 (1997) 313-324.
- [11] Kulkarni R.S. **Hyperbolic geometry and the subgroups of the modular group**, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 645-686, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991
- [12] Stein M. **Groups of piecewise linear homeomorphisms**, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 332, Number 2, August 1992, 477-514
- [13] Tsuboi T. **Group generated by half transvections**, preprint Univ.Tokyo, 2001

Guillaume LAGET

Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques, UMR 5582 (UJF - CNRS)
BP74, 38402 ST MARTIN D'HERES Cedex (France)
Guillaume.Laget@ujf-grenoble.fr