Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I

Gaël RÉMOND

10 novembre 2003

Prépublication de l'Institut Fourier n° 626 (2003)
http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract. — We study the intersection of a subvariety X of an abelian variety A over $\bar{\mathbb{Q}}$ with the union of all the algebraic subgroups of A of given dimension d. Our main result states that if we remove a suitable exceptional subset from X and if d is small enough then the intersection enjoys a Northcott-like property: the points of bounded height on it form a finite set. The condition on d involves only the dimension of X and the structure of A up to isogenies. We show how it can be weakened if we assume certain conjectures in the direction of an abelian version of Lehmer's problem. The theorem is especially meaningful when X is a curve since it is then possible to bound the height and hence to prove finiteness of the set under consideration. This generalises the result of E. Viada on powers of elliptic curves and is analogous to work of E. Bombieri, D. Masser and U. Zannier on tori, whose general strategy we follow.

1 Introduction

Cet article vise à étudier l'intersection d'un sous-schéma fermé X d'une variété abélienne A sur $\bar{\mathbb{Q}}$ avec l'union de tous les sous-schémas en groupes de A de dimension inférieure à un entier fixé. Ce type de problèmes apparaît pour la première fois dans un texte de E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier (voir [BMZ]) qui concerne le cas d'un tore $A = \mathbb{G}^n_{\mathrm{m},\bar{\mathbb{Q}}}$ au lieu d'une variété abélienne et où les auteurs montrent un résultat quasiment optimal si X est une courbe. Pour une variété abélienne, E. Viada a considéré la question également pour une courbe lorsque $A = E^n$ est la puissance d'une courbe elliptique (voir [Vi]) et nous avons donné un complément à son énoncé dans [RV]. On obtient un résultat satisfaisant seulement si E admet des multiplications complexes (voir plus bas la raison de cette hypothèse). Ici, nous examinons comment la démarche s'étend à une variété abélienne A quelconque. Notre description est surtout pertinente pour les courbes mais nous donnons aussi un énoncé beaucoup plus partiel pour un schéma X de dimension quelconque.

Afin de présenter nos résultats de manière précise, nous introduisons quelques notations. Soit donc A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Pour un entier r vérifiant $0 \leq r \leq \dim A$, nous notons

$$A^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{codim} G \geq r} G(\bar{\mathbb{Q}})$$

Mots-Clefs : Variétés abéliennes, hauteurs, problème de Lehmer abélien.
Classification : 11G10, 11G50, 14K12.

où l'union porte sur tous les sous-schémas en groupes G de A vérifiant la condition de dimension. Par exemple, on déduit de [RV] que, si A s'écrit comme la puissance d'une courbe elliptique à multiplications complexes, alors $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[2]}$ est un ensemble fini pour une courbe C sur A qui n'est contenue dans aucun sous-groupe de A de codimension 1.

La méthode introduite par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier utilise de manière cruciale une estimation de F. Amoroso et S. David dans la direction du problème de Lehmer généralisé (voir [AD]). L'adaptation de cette méthode au cas abélien repose donc assez naturellement sur un énoncé analogue. Il nous paraît intéressant de mentionner ici deux conjectures concernant ce problème de Lehmer abélien afin de pouvoir donner plus bas des énoncés conditionnels se rapprochant de ce qui est connu sur un tore.

Soit donc A_0 une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K_0. Nous fixons un faisceau inversible $\mathcal{L}_0$ sur A_0 symétrique et ample et désignons par $h\colon A_0(\bar{K}_0) \to \mathbb{R}_+$ la hauteur de Néron-Tate qu'il induit ($\bar{K}_0$ étant une clôture algébrique de K_0 fixée). Si F est une partie de $A_0(\bar{K}_0)$, nous notons $K_0(F)$ le plus petit sous-corps de $\bar{K}_0$ sur lequel tous les points de F sont définis ; en particulier, nous posons pour les points de torsion $K_0^t = K_0((A_0)_{\mathrm{tors}})$ et, par extension, $K_0^t(F) = K_0((A_0)_{\mathrm{tors}} \cup F)$ pour toute partie F. Nous rappelons qu'un élément m d'un module sur un anneau R est dit de R-torsion ou de torsion sur R s'il existe $a \in R \setminus \{0\}$ tel que $ax = 0$.

Conjecture 1.1 (S. David) *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_1 > 0$ tel que si P est un point de $A_0(\bar{K}_0)$ qui n'est pas de torsion sur* $\mathrm{End}(A_0 \times \bar{K}_0)$ *alors*

$$h(P) \geq c_1 D_{\mathrm{tors}}^{-(1/g)-\varepsilon}$$

où $D_{\mathrm{tors}} = [K_0^t(P) : K_0^t]$.

Bien entendu, cette conjecture entraîne l'énoncé plus faible suivant.

Conjecture 1.2 (S. David et M. Hindry) *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_2 > 0$ tel que si P est un point de $A_0(\bar{K}_0)$ qui n'est pas de tosrion sur* $\mathrm{End}(A_0 \times \bar{K}_0)$ *alors*

$$h(P) \geq c_2 D^{-(1/g)-\varepsilon}$$

où $D = [K_0(P) : K_0]$.

Ces deux assertions appellent plusieurs remarques. Tout d'abord, nous ne citons que des versions affaiblies : dans les deux cas, les auteurs envisagent en effet les mêmes énoncés sans le paramètre ε (pour le second, voir [DH]). Toutefois, ce renforcement ne présente pas d'intérêt pour l'application que nous ferons des conjectures dans la suite. De plus, l'introduction de cet ε les rend plus abordables si l'on songe par exemple au résultat de Dobrowolski en regard du problème initial de Lehmer et à ses généralisations.

En particulier, le résultat de F. Amoroso et U. Zannier (voir [AZ]) sur les extensions abéliennes peut être vu comme une version de la conjecture 1.1 pour $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Le travail récent de M. Baker dans [Ba] (complété par J. Silverman dans [Si]) ouvre la voie vers un énoncé pour les courbes elliptiques : si A_0 est une courbe elliptique à multiplications complexes, la conjecture 1.1 est vraie lorsque $D_{\mathrm{tors}} = 0$ et la question 1.11 de [Ba] revient à demander la même chose pour une variété abélienne quelconque. Dans le cadre de notre seconde conjecture, le théorème principal de [DH] entraîne le résultat suivant.

Théorème 1.3 (S. David et M. Hindry) *Si A_0 admet des multiplications complexes alors la conjecture 1.2 est vraie.*

En dehors de cet énoncé, nous donnerons aussi un résultat antérieur dû à D. Masser (voir théorème 4.1) qui fournit la meilleure estimation connue en direction des conjectures 1.1 et 1.2 et nous permettra donc d'établir un résultat inconditionnel ci-dessous. Signalons que, par abus de langage, nous dirons qu'une variété abélienne A_0' sur $\bar{\mathbb{Q}}$ vérifie la conjecture 1.1 ou 1.2 lorsque c'est le cas pour une variété abélienne A_0 sur un corps de nombres telle que $A_0 \times \bar{\mathbb{Q}} = A_0'$ (voir lemme 2.1).

Nous en venons à présent à notre théorème principal. Nous disons (comme dans [RV]) qu'une courbe intègre sur une variété abélienne A est *transverse* si elle n'est contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de A différente de A. Pour pouvoir traiter des sous-schémas de dimension supérieure, nous introduisons les ensembles exceptionnels suivants : si X est un sous-schéma fermé intègre de A et r un entier, alors $Z_{X,0}^{(r)} \subset X(\bar{\mathbb{Q}})$ est l'ensemble des points P pour lesquels il existe un sous-schéma en groupes G de A avec :

$$\dim_P X \cap G \geq \max(1, r - \operatorname{codim} G).$$

Finalement, par commodité de langage, nous dirons qu'une variété abélienne simple est de type (g,δ) si $\dim A_0 = g$ et $\operatorname{rang} \operatorname{End}(A_0) = 2g/\delta$ (de la sorte, le type est un élément de $\mathbb{N}^2$).

Avec ces conventions, nous avons l'énoncé suivant.

Théorème 1.4 *Soit A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Nous choisissons une isogénie entre A et un produit $A_1^{n_1} \times \cdots \times A_m^{n_m}$ où m est un entier naturel et pour chaque indice i avec $1 \leq i \leq m$ la variété abélienne A_i est simple de type (g_i,δ_i) et $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient X un sous-schéma fermé intègre de A et r,r' deux entiers tels que $0 \leq r \leq r' \leq \dim A$. Nous supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

(C1) La conjecture 1.1 est vraie pour A.

(C2) La conjecture 1.2 est vraie pour A et $r' > (1 + \sum_{i=1}^m g_i\delta_i)(r-1)$.

(C3) La variété abélienne A est à multiplications complexes et $r' > (1+\sum_{i=1}^m g_i)(r-1)$.

(C4) On a l'inégalité

$$r' > \sum_{i=1}^m g_i(n_i + \delta_i)\frac{r-1}{r}.$$

Alors, pour toute hauteur $h \colon A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ associée à un faisceau inversible ample sur A et tout réel H, l'ensemble

$$\{P \in (X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap A^{[r']} \mid h(P) \leq H\}$$

est fini. Si de plus X est une courbe transverse et $r \geq 2$ alors $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[r']}$ est fini.

Remarquons immédiatement que la conclusion de ce théorème est vraie inconditionnellement si $r = \dim A$. En effet, puisque $A^{[\dim A]}$ n'est autre que A_{tors}, ceci est une conséquence du théorème de M. Raynaud (ex-conjecture de Manin-Mumford) et il n'est bien sûr pas utile de borner la hauteur. Comme nous l'utiliserons plus loin, nous citons le résultat précis de finitude.

Théorème 1.5 (M. Raynaud) *Soient A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et X un sous-schéma fermé intègre de A. Il existe un entier n, des points $\xi_1,\ldots,\xi_n$ de A_{tors} et des sous-variétés abéliennes $B_1,\ldots,B_n$ de A telles que $\xi_i + B_i \subset X$ pour $1 \leq i \leq n$ et*

$$X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A_{\mathrm{tors}} = \bigcup_{i=1}^n \xi_i + (B_i)_{\mathrm{tors}}.$$

Bien entendu, dans l'énoncé du théorème 1.4, la condition (C3) fait partie de (C2) en vertu du théorème 1.3 et puisque l'hypothèse de multiplication complexe signifie $\delta_i = 1$. Remarquons que les ensembles $Z_{X,0}^{(r)}$ forment une suite décroissante de parties emboîtées de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ et que si $\dim X \geq 1$ alors $Z_{X,0}^{(\dim X)} = X(\bar{\mathbb{Q}})$ (considérer $G = A$). Notre résultat est donc vide pour $r \leq \dim X$ et intéressant essentiellement pour $r = \dim X + 1$.

Si X est une courbe transverse, un argument direct montre que $X(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[1]}$ est un ensemble de hauteur bornée (voir lemme 2.3). Comme par ailleurs $Z_{X,0}^{(2)}$ est alors vide par transversalité, ceci entraîne la dernière assertion du théorème à partir du cas général. En dimension supérieure, il est beaucoup plus délicat de prouver que la hauteur est bornée. Il est toutefois possible d'utiliser une inégalité de Vojta (généralisant celle de [RV]) pour obtenir un résultat partiel. Celui-ci fera l'objet du second volet de ce travail.

De même, si $\dim X \geq 2$, les ensembles $Z_{X,0}^{(r)}$ restent mystérieux. On aimerait par exemple caractériser simplement les couples (X,r) tels que $Z_{X,0}^{(r)}$ n'est pas dense dans X.

Dans le cas particulier considéré dans [Vi] et [RV] où A est la puissance d'une courbe elliptique (donc $m = 1$ et $g_1 = 1$), remarquons que le résultat ci-dessus donne la finitude seulement de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[3]}$ pour une courbe transverse C lorsqu'il y a multiplication complexe. Ceci est plus faible que le résultat de E. Viada (voir [Vi]) car nous n'utilisons pas l'agument cohomologique qui lui permettait de passer à $A^{[2]}$. Notons cependant que notre énoncé montre que la conjecture 1.1 rendrait inutile cet argument. En revanche, en l'absence de multiplication complexe, nous améliorons très légèrement le résultat : notre condition $r' > (n+2)/2$ remplace $r' \geq (n+4)/2$; ce petit gain est dû à l'introduction du cardinal des points de torsion dans le corollaire 4.1 ci-dessous.

Nous pouvons déduire du théorème 1.4 un énoncé plus général, en faisant intervenir un sous-groupe Γ de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, comme dans [RV]. Pour un tel groupe Γ et un entier r vérifiant $0 \leq r \leq \dim A$, nous écrirons

$$\Gamma_r = \bigcup_{\mathrm{codim} B \geq r} \Gamma + B(\bar{\mathbb{Q}})$$

où l'union porte sur toutes les sous-variétés abéliennes B de A satisfaisant la condition de dimension. Par ailleurs, si A' est une variété abélienne quelconque sur $\bar{\mathbb{Q}}$, nous définissons un sous-End(A')-module de rang fini de $A'(\bar{\mathbb{Q}})$ par $\Gamma_{A'} = \mathrm{Hom}(A,A') \cdot \Gamma$. Nous posons aussi $\Gamma_{\mathrm{sat}} = \{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) | \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ Nx \in \Gamma_A\}$. Pour généraliser les $Z_{X,0}^{(r)}$, nous introduisons, un sous-schéma fermé intègre X de A et un entier r étant donnés, l'ensemble $Z_{X,\Gamma}^{(r)}$ des points $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ tels qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et une sous-variété abélienne B de A avec

$$\dim_P X \cap (\gamma + B) \geq \max(1, r - \mathrm{codim} B).$$

Nous avons alors l'énoncé suivant.

Théorème 1.6 *Soient A une variété abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et Γ un sous-groupe de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini. Nous choisissons une isogénie entre A et un produit $A_1^{n_1} \times \cdots \times A_m^{n_m}$ où m est un entier naturel et pour chaque indice i avec $1 \leq i \leq m$ la variété abélienne A_i est simple de type (g_i,δ_i) et nous notons s_i le rang de Γ_{A_i}. Soient X un sous-schéma fermé intègre de A et r,r' deux entiers tels que $0 \leq r \leq r' \leq \dim A$. Nous supposons qu'une condition est vérifiée parmi (C1), (C2), (C3) et la condition ($C4_\Gamma$) :*

$$r' > \sum_{i=1}^{m} g_i(n_i + \delta_i + s_i)\frac{r-1}{r}.$$

Alors, pour toute hauteur $h\colon A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ associée à un faisceau inversible ample sur A et tout réel H, l'ensemble

$$\{P \in (X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_{X,\Gamma}^{(r)}) \cap \Gamma_{r'} \mid h(P) \leq H\}$$

est fini.

On vérifie que l'on retrouve exactement le théorème 1.4 en choisissant $\Gamma = A_{\text{tors}}$ (de rang nul).

L'article s'organise comme suit. La partie suivante établit deux résultats auxiliaires, l'un donnant les conséquences des conjectures 1.1 et 1.2 que nous utiliserons et l'autre traitant le cas des courbes. Ensuite (partie 3) nous montrons que le théorème 1.6 découle du théorème 1.4. La partie 4 étudie les relations liant les coordonnées d'un point P du produit $\prod_{i=1}^{m} A_i^{n_i}$. L'approche est voisine de celles de D. Masser (voir [Ma]) et D. Bertrand (voir l'appendice de [Be]) mais nous mettons l'accent sur la dépendance en le degré du corps de définition du point P. Le résultat donne une majoration du degré du plus petit sous-groupe algébrique G de A contenant P. L'étape suivante (voir partie 5) consiste, un sous-schéma X étant maintenant fixé avec $P \in X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_{X,0}^{(r)}$, à trouver un sous-schéma V de degré le plus petit possible tel que P soit un point isolé de $X \cap V$. Bien entendu, $V = G$ convient d'après l'hypothèse $P \notin Z_{X,0}^{(r)}$ mais, pour faire chuter $\deg V$, nous choisirons V contenant G avec $\operatorname{codim} V = r-1$. S'il existe des sous-groupes de toutes dimensions (comme dans [BMZ] ou [Vi]), on trouve facilement un sous-groupe répondant à ces conditions. Dans le cas général, nous contruisons, à l'aide de sections hyperplanes fixées sur les A_i, un sous-schéma V intermédiaire entre deux sous-groupes de A (d'où le terme d'interpolation). Ceci fait, nous trouvons $\deg(P) \leq \deg(X \cap V) \leq \deg X \deg V$ et les conditions du théorème ont été choisies de sorte que cette inégalité entraîne une majoration de $\deg P$. Le résultat de finitude espéré découle alors du théorème de Northcott.

La stratégie ci-dessus se révèle pertinente pour les conditions (C2), (C3) et (C4). En revanche, il faut procéder un peu différemment pour (C1) parce que le corps K_0^t intervenant dans la conjecture 1.1 n'est pas un corps de nombres. Aussi, après avoir montré comme précédemment que $[K_0^t(P) : K_0^t]$ est borné, ferons-nous appel au résultat de M. Raynaud rappelé plus haut pour conclure à la finitude (voir partie 6). Enfin, nous donnons en appendice un résultat d'algèbre linéaire de démonstration indépendante du reste de l'article.

Je tiens à remercier Sinnou David pour d'intéressantes discussions sur le sujet de ce texte et pour m'avoir signalé la conjecture 1.1.

2 Préliminaires

Nous commençons par un énoncé de stabilité des conjectures de l'introduction.

Lemme 2.1 *La véracité des conjectures 1.1 et 1.2 pour un triplet $(A_0,K_0,\mathcal{L}_0)$ ne dépend que de la classe d'isogénie de $A_0 \times \bar{K}_0$.*

DÉMONSTRATION : Si l'on change $\mathcal{L}_0$ en $\mathcal{L}_0'$ les hauteurs de Néron-Tate associées vérifient $\mu^{-1}h \leq h' \leq \mu h$ pour un réel $\mu \geq 1$. Si l'on remplace K_0 par une extension K_0', nous avons pour les degrés $D'_{\text{tors}} \leq D_{\text{tors}} \leq [K_0' : K_0]D'_{\text{tors}}$ et de même avec D. Dans les deux cas, la modification transforme la conjecture 1.1 ou 1.2 en un énoncé équivalent, seule la constante étant perturbée. Ainsi il reste à voir que si $f : A_0 \to A_0'$ est une isogénie et si l'une des conjectures est vraie pour $(A_0',K_0,\mathcal{L}_0')$ alors elle l'est aussi pour $(A_0,K_0,f^*\mathcal{L}_0')$. Or, avec ces choix, un point $P \in A_0(\bar{K}_0)$ a même hauteur que son image $f(P)$ et un corps de définition plus grand: $K_0(P) \supset K(f(P))$. Par suite $h(f(P)) \geq c_1[K_0^t(f(P)) : K_0^t]^{-(1/g)-\varepsilon}$ entraîne bien $h(P) \geq c_1[K_0^t(P) : K_0^t]^{-(1/g)-\varepsilon}$ et de même en remplaçant K_0^t par K_0. De plus si $f(P)$ est de torsion sur $\operatorname{End}(A_0' \times \bar{K}_0)$ alors P est de torsion sur $\operatorname{End}(A_0 \times \bar{K}_0)$. $\square$

Nous étendons ensuite les conjectures pour une famille de points.

Lemme 2.2 *Soient m un entier, $s_i \leq n_i$ des entiers pour $1 \leq i \leq m$ et $A_1,\ldots,A_m$ des variétés abéliennes sur un corps de nombres K_0 simples, deux à deux non isogè-*

nes (sur $\bar{K}_0$) et munies de hauteurs de Néron-Tate. Nous supposons que la variété abélienne $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ vérifie la conjecture 1.1. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_1' > 0$ tel que si $(P_1^{(i)}, \ldots, P_{s_i}^{(i)})$ est une famille de $A_i(\bar{K}_0)$ libre sur $\mathrm{End}(A_i \times \bar{K}_0)$ pour chaque i avec $1 \leq i \leq m$ alors

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i - s_i} h(P_j^{(i)})^{\dim A_i} \geq c_1' D_{\mathrm{tors}}^{-1-\varepsilon}$$

où $D_{\mathrm{tors}} = [K_0^t((P_j^{(i)})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq s_i}) : K_0^t]$. La même propriété est vraie avec la conjecture 1.2 et le degré sur K_0.

DÉMONSTRATION : L'argument principal ci-dessous est voisin de [AD, p. 176] dans le cas d'un tore.

Pour chaque indice i avec $1 \leq i \leq m$, nous commençons par fixer une fois pour toutes une famille $\mathcal{Q}_i = (Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{n_1}^{(i)})$ de $A_i(\bar{K}_0)$ libre sur $\mathrm{End}(A_i \times \bar{K}_0)$ et telle que $h(Q_j^{(i)}) \leq 1$ pour $1 \leq j \leq n_i$.

Ce choix fait, voyons qu'il suffit de prouver l'énoncé avec $s_i = n_i$ et $h(P_j^{(i)}) \leq 1$ pour tout couple (i,j). Dans un premier temps, si certains des $P_j^{(i)}$ donnés sont de hauteur plus grande que 1, nous pouvons les supprimer (en diminuant les s_i correspondants) puisque cela fait décroître le produit à minorer ainsi que le degré D_{tors}. Dans un second temps, nous complétons les familles ainsi obtenues par des éléments des $\mathcal{Q}_i$ pour obtenir des familles libres. Ici le produit des hauteurs diminue encore mais D_{tors} peut augmenter. Toutefois cette augmention est majorée par le degré du corps de définition des $\mathcal{Q}_i$ qui est fixé et donc n'affecte que la constante.

Nous supposons donc désormais $s_i = n_i$ et $h(P_j^{(i)}) \leq 1$. De plus, quitte à changer la numérotation des variétés et des points, nous supposons que $h(P_1^{(1)}) \leq h(P_j^{(i)})$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$. Nous introduisons encore des entiers $d_j^{(i)}$ avec

$$h(P_1^{(1)}) \leq {d_j^{(i)}}^{-2} h(P_j^{(i)}) \leq 4h(P_1^{(1)})$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$ (ceci est toujours possible et $d_j^{(i)}$ peut même être choisi comme une puissance de 2). Soient finalement $R_j^{(i)}$ des points avec $R_j^{(i)} \in A_i(\bar{K}_0)$ et $d_j^{(i)} R_j^{(i)} = P_j^{(i)}$.

Nous allons appliquer la conjecture 1.1 au point R de A de coordonnées $R_j^{(i)}$. Il n'est pas de torsion sur $\mathrm{End}(A \times \bar{K}_0)$ en vertu de la liberté des $P_j^{(i)}$. En choisissant un faisceau sur A provenant des A_i, nous avons

$$h(R) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} h(R_j^{(i)}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} {d_j^{(i)}}^{-2} h(P_j^{(i)}) \leq 4 \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \right) h(P_1^{(1)}).$$

Par ailleurs

$$[K_0^t(R) : K_0^t] \leq D_{\mathrm{tors}} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} {d_j^{(i)}}^{2 \dim A_i}$$

puisque $[K_0^t(R_j^{(i)}) : K_0^t(P_j^{(i)})] \leq [K_0(R_j^{(i)}) : K_0(P_j^{(i)})] \leq \mathrm{Card}\{Q \mid d_j^{(i)} Q = P_j^{(i)}\} = {d_j^{(i)}}^{2 \dim A_i}$. Ainsi la conjecture implique (avec $g = \dim A$) :

$$4 \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \right) h(P_1^{(1)}) \geq c_1 D_{\mathrm{tors}}^{-(1/g)-\varepsilon} \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} {d_j^{(i)}}^{2 \dim A_i} \right)^{-(1/g)-\varepsilon}.$$

Puisque ${d_j^{(i)}}^2 \leq h(P_j^{(i)})/h(P_1^{(1)})$ cela donne

$$h(P_1^{(1)})^g \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{h(P_j^{(i)})^{\dim A_i}}{h(P_1^{(1)})^{\dim A_i}} \right)^{1+g\varepsilon} \geq \left(\frac{c_1}{4g}\right)^g D_{\mathrm{tors}}^{-1-g\varepsilon}.$$

Dans le membre de gauche, l'exposant de $h(P_1^{(1)})$ est

$$\begin{aligned} g-(g-\dim A_1)(1+g\varepsilon) &= (\dim A_1)(1-g(g/\dim A_1-1)\varepsilon) \\ &\geq (\dim A_1)(1-g^2\varepsilon) \end{aligned}$$

tandis que l'exposant de $h(P_j^{(i)})$ si $(i,j) \neq (1,1)$ est

$$(\dim A_i)(1+g\varepsilon) \geq (\dim A_i)(1-g^2\varepsilon.)$$

Comme $h(P_j^{(i)}) \leq 1$ pour tout couple (i,j), le fait de diminuer les exposants augmente le membre de gauche (nous supposons $\varepsilon < g^{-2}$) et donc

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} h(P_j^{(i)})^{\dim A_i} \geq \left(\frac{c_1}{4g}\right)^{g/(1-g^2\varepsilon)} D_{\mathrm{tors}}^{-(1+g\varepsilon)/(1-g^2\varepsilon)}.$$

Ceci conclut la démonstration car $(1+g\varepsilon)/(1-g^2\varepsilon)$ est aussi proche de 1 que l'on veut. Pour la dernière assertion, il est clair que tout ceci reste valide avec K_0 et D remplaçant K_0^t et D_{tors}. □

Remarquons que des arguments semblables à ceux du début de la démonstration ci-dessus permettraient de montrer que les conjectures 1.1 et 1.2 sont stables par passage à une sous-variété abélienne.

Nous montrons maintenant comment la dernière assertion du théorème 1.4 découle du reste de l'énoncé. Cela se voit à l'aide de l'énoncé suivant.

Lemme 2.3 *Si C est une courbe transverse de A alors $Z_{C,0}^{(2)} = \emptyset$ et $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[1]}$ est un ensemble de hauteur bornée.*

DÉMONSTRATION : Pour la vacuité de $Z_{C,0}^{(2)}$, nous constatons simplement que si G est un sous-schéma en groupes de A alors ou bien $\dim C \cap G = 0$ ou bien $G = A$.

Fixons ensuite un faisceau inversible $\mathcal{N}$ sur C de degré 1 et une hauteur positive $h_{\mathcal{N}}$ associée sur $C(\bar{\mathbb{Q}})$. Si $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(A)$, nous notons $\hat{h}_{\mathcal{M}}$ la hauteur de Néron-Tate associée sur $A(\bar{\mathbb{Q}})$ ou, par restriction, sur $C(\bar{\mathbb{Q}})$. Pour tout tel $\mathcal{M}$ il existe une constante $c_{\mathcal{M}}$ telle que si $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ alors

$$\left|\hat{h}_{\mathcal{M}}(x) - (\deg \mathcal{M}_{|C}) h_{\mathcal{N}}(x)\right| \leq c_{\mathcal{M}} \sqrt{1+h_{\mathcal{N}}(x)}$$

(ceci se déduit par exemple du théorème de [Se, §3.10] appliqué au faisceau algébriquement équivalent à zéro $(\mathcal{M}_{|C}) \otimes \mathcal{N}^{-\deg \mathcal{M}_{|C}}$ sur C). Si maintenant $\mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{sym}}$ est le sous-groupe de type fini de $\mathrm{Pic}(A)$ formé des éléments symétriques et $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{sym}} \otimes \mathbb{R}$ (isomorphe à $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$) alors nous déduisons par linéarité qu'il existe une constante c_3' telle que si $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{sym}}$ et $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ alors

$$\left|\hat{h}_{\mathcal{M}}(x) - (\deg \mathcal{M}_{|C}) h_{\mathcal{N}}(x)\right| \leq c_3' \|\mathcal{M}\| \sqrt{1+h_{\mathcal{N}}(x)}.$$

Nous considérons ensuite un faisceau inversible symétrique et ample $\mathcal{L}$ sur A et l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(A) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{sym}} \\ \varphi &\longmapsto \varphi^*\mathcal{L}, \end{aligned}$$

qui est quadratique en vertu du théorème du cube. De plus, la forme quadratique $\varphi \mapsto \deg(\varphi^*\mathcal{L})_{|C}$ est définie positive sur $\mathrm{End}(A)$ car, si $(\varphi^*\mathcal{L})_{|C}$ n'est pas ample, $\varphi(C)$ est réduit à un point donc C est contenue dans un translaté de $\mathrm{Ker}\varphi$ et donc, par transversalité, $\varphi = 0$. Par suite, pour tout choix de norme sur $\mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{sym}}$, la quantité $\|\varphi^*\mathcal{L}\|$ est majorée par un multiple de $\deg(\varphi^*\mathcal{L})_{|C}$.

Tout ceci entraîne qu'il existe une constante c_3 telle que pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ et tout $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ nous ayons

$$\left|\hat{h}_{\varphi^*\mathcal{L}}(x) - (\deg(\varphi^*\mathcal{L})_{|C})h_{\mathcal{N}}(x)\right| \leq c_3(\deg(\varphi^*\mathcal{L})_{|C})\sqrt{1+h_{\mathcal{N}}(x)}.$$

Maintenant, si $x \in C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap A^{[1]}$, nous pouvons trouver $\varphi \in \mathrm{End}(A)$ tel que $\varphi(x) = 0$ et $\varphi \neq 0$. Puisque $\hat{h}_{\varphi^*\mathcal{L}}(x) = \hat{h}_{\mathcal{L}}(\varphi(x)) = 0$ et $\deg(\varphi^*\mathcal{L})_{|C} \neq 0$, notre formule devient

$$h_{\mathcal{N}}(x) \leq c_3\sqrt{1+h_{\mathcal{N}}(x)}.$$

Ceci entraîne facilement $h_{\mathcal{N}}(x) \leq 1 + c_3^2$, ce qui clôt la démonstration. □

3 Réduction

Nous montrons maintenant comment l'énoncé avec un groupe Γ de rang fini se déduit du cas particulier où $\Gamma = A_{\mathrm{tors}}$.

Lemme 3.1 *Le théorème 1.4 implique le théorème 1.6.*

Démonstration : L'argument généralise celui de [RV, p. 1929]. Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème 1.6. Par définition des s_i, nous pouvons trouver des éléments $y_1^{(i)},\dots,y_{s_i}^{(i)}$ de Γ_{A_i} (pour chaque i) tels que

$$\Gamma_{A_i} \subset \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} \mathrm{End}(A_i)y_j^{(i)}\right)_{\mathrm{sat}}.$$

Notons $y = (y_1^{(1)},\dots,y_{s_1}^{(1)},y_1^{(2)},\dots,y_{s_m}^{(m)})$ le point de $\prod_{i=1}^m A_i^{s_i}$ ainsi formé. Nous introduisons encore les notations suivantes :

$$A' = A \times \prod_{i=1}^m A_i^{s_i} \qquad \text{et} \qquad X' = X \times \{y\}.$$

Nous allons montrer que si le théorème 1.4 est vrai pour (A',X',r,r') alors le théorème 1.6 est vrai pour (A,X,Γ,r,r'). L'isogénie choisie entre A et $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ donne évidemment naissance à une isogénie entre A' et $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i+s_i}$. Vu les hypothèses du théorème 1.6, nous en déduisons immédiatement que l'une des conditions (C1), (C2), (C3) ou (C4) est satisfaite pour (A',X',r,r'). Puisque toute hauteur sur A s'étend en une hauteur sur $\mathcal{A}$ (induisant une bijection entre les sous-ensembles de hauteur bornée de X et ceux de X'), il suffit d'établir

$$\left[(X(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_{X,\Gamma}^{(r)}) \cap \bigcup_{\mathrm{codim}B \geq r'} \Gamma + B(\bar{\mathbb{Q}})\right] \times \{y\} \subset (X'(\bar{\mathbb{Q}}) \setminus Z_{X',0}^{(r)}) \cap \bigcup_{\mathrm{codim}G \geq r'} G(\bar{\mathbb{Q}})$$

où la première union porte sur les sous-variétés abéliennes B de A et la seconde sur les sous-schémas en groupes G de A'. Par conséquent, le résultat sera acquis lorsque nous aurons montré

(1) pour tout $\gamma \in \Gamma$ et toute sous-variété abélienne B de A il existe un sous-schéma en groupes G de A' tel que $\mathrm{codim}G \geq \mathrm{codim}B$ et $(\gamma + B) \times \{y\} \subset G$;

(2) $Z_{X',0}^{(r)} \subset Z_{X,\Gamma}^{(r)} \times \{y\}$.

Pour (1), nous fixons une isogénie $f: A \to \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$. Chacune des $n_1 + \cdots + n_m$ projections de $f(\gamma)$ appartient à l'un des Γ_{A_i} et donc possède un multiple s'écrivant comme combinaison linéaire des coordonnées de y. Par suite, le point $(f(\gamma),y)$ de $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i+s_i}$ satisfait $n_1+\cdots+n_m$ relations de dépendance linéaire (indépendantes) et donc $(f(\gamma),y)$ est contenu dans un sous-schéma en groupes G_0 de $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i+s_i}$ de dimension $s_1 + \cdots + s_m$. Il est alors clair que $G = (f,\mathrm{id})^{-1}(G_0) + (B \times \{0\})$ répond à la question.

Pour (2), nous considérons d'abord un sous-schéma en groupes G de A' tel que $G \cap (A \times \{y\})$ n'est pas vide. Soient G'' son image à travers $A' \to \prod_{i=1}^m A_i^{s_i}$ et G' le noyau de $G \to G''$. Comme G'' contient y et que les coordonnées de ce dernier sont indépendantes, nous avons $G'' = \prod_{i=1}^m A_i^{s_i}$. Par suite, la codimension de G' dans A coïncide avec celle de G dans A' et dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & A/G' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'/G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

la dernière flèche verticale est un isomorphisme. Choisissons $\psi': A/G' \to A$ de sorte que $\psi \circ \psi'$ soit une homothétie $[N]$. Considérons ensuite $(0, -y) \in A'$ puis son image dans A'/G qui correspond donc à $a \in A/G'$. Soient encore $a' \in A/G'$ tel que $Na' = a$ et $\gamma = \psi'(a')$. Par construction, $(\gamma,y) \in G$ et, puisque $y \in \prod_{i=1}^m (\Gamma_{A_i})^{s_i}$, l'élément $\psi'(a)$ appartient à Γ_A ce qui entraîne $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$.

Dans ces conditions $G = G + (\gamma,y)$ donc

$$G \cap (A \times \{y\}) = (G \cap (A \times \{0\}) + (\gamma,y) = (G' + \gamma) \times \{y\}.$$

Si maintenant $x' = (x,y) \in Z_{X',0}^{(r)}$ il existe G comme ci-dessus tel que

$$\dim_{x'} X' \cap G \geq \max(1,r - \mathrm{codim} G).$$

Comme $\mathrm{codim} G = \mathrm{codim} G'$ et $X' \cap G = (X \cap (\gamma + G')) \times \{y\}$ nous avons

$$\dim_x X \cap (\gamma + G') \geq \max(1,r - \mathrm{codim} G').$$

En écrivant finalement $\gamma + G'$ comme une réunion finie de translatés de la forme $\gamma + \xi + B'$ où $\xi \in A_{\mathrm{tors}}$ et B' est la composante neutre de G', nous avons bien $x \in Z_{X,\Gamma}^{(r)}$ (puisque $\gamma + \xi \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$). □

Il ne reste donc qu'à démontrer le théorème 1.4. C'est ce que nous faisons dans les parties suivantes. Les notations de ce théorème y sont donc en vigueur à ceci près que nous choisissons un corps de nombres K_0 (vu comme sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$) sur lequel tous nos schémas sont définis : ainsi A, A_i et X seront des schémas sur $\mathrm{Spec} K_0$ dont les extensions à $\bar{\mathbb{Q}}$ donnent les schémas ainsi désignés dans le théorème. Nous faisons ce choix également de sorte que $\mathrm{End}(A_i) = \mathrm{End}(A_i \times \bar{\mathbb{Q}})$ pour $1 \leq i \leq m$ et pour que les variétés abéliennes A et $A' = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ soient isogènes sur K_0. Nous fixons dorénavant une telle isogénie $f: A \to A'$.

Nous fixons aussi une fois pour toutes un faisceau inversible symétrique et ample $\mathcal{L}_i$ sur A_i pour $1 \leq i \leq m$. Sur A', nous notons $\mathcal{L}' = \bigotimes_{i=1}^m \bigotimes_{j=1}^{n_i} p_{i,j}^* \mathcal{L}_i$ et donc A est munie du faisceau inversible symétrique et ample $\mathcal{L} = f^*\mathcal{L}'$. Nous notons toujours h la hauteur de Néron-Tate associée à l'un de ces faisceaux (par exemple $h(P) = h(f(P))$ si $P \in A(\bar{\mathbb{Q}})$). De manière parallèle, le degré d'un sous-schéma fermé de A, A' ou A_i sera toujours considéré relativement au faisceau correspondant $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ ou $\mathcal{L}_i$.

Nous introduisons sur $\mathrm{End}(A_i) \otimes \mathbb{R}$ une norme définie par $\|\varphi\|^2 = \mathrm{Tr}(\varphi \circ \varphi^\dagger)$ où $\varphi \mapsto \varphi^\dagger$ est l'involution de Rosati par rapport à $\mathcal{L}_i$ étendue par linéarité de $\mathrm{End}(A_i) \otimes \mathbb{Q}$ à $\mathrm{End}(A_i) \otimes \mathbb{R}$ (voir [Mu] pages 189 et 192). Le théorème 1.4 se ramenant immédiatement à ce cas, nous supposons que les A_i sont deux à deux non isogènes (sur $\bar{\mathbb{Q}}$).

Finalement signalons que les constantes $c_4,\dots,c_{11}$ introduites plus bas peuvent dépendre de A, A', f, $\mathcal{L}'$, K_0 et d'un paramètre réel $\varepsilon > 0$ destiné à être choisi assez petit à la fin de la démonstration mais non de X (autrement que par le choix de K_0) ni bien sûr d'un point P.

4 Module des relations

Le but de cette partie est d'étudier les relations liant les coordonnées d'un point de A'. Par commodité au vu de la suite, nous présentons ceci pour un point de la forme $f(P)$ mais cela n'est bien sûr pas une restriction.

Soient donc P un point de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $P' = f(P)$ son image. Nous notons $P_j^{(i)}$ les coordonnées de P' avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$ (de sorte que $P_j^{(i)}$ est élément de $A_i(\bar{\mathbb{Q}})$) et nous associons à P pour chaque i :

- Γ_i le sous-End(A_i)-module de $A_i(\bar{\mathbb{Q}})$ engendré par $P_1^{(i)},\dots,P_{n_i}^{(i)}$;
- N_i le sous-End(A_i)-module de Hom(A',A_i) des morphismes nuls en P' ;
- $\bar{N}_i$ le sous-End(A_i)-module de Hom(A',A_i) des morphismes φ tels que $\varphi(P') \in A_i(\bar{\mathbb{Q}})_{\mathrm{tors}}$;
- K le corps de nombres $K_0(P)$.

Remarquons que $\bar{N}_i$ est le saturé de N_i (c'est-à-dire l'ensemble des éléments dont un multiple non nul appartient à N_i). De plus, d'après les définitions, nous avons par évaluation en P' des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_i & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A',A_i) & \longrightarrow & \Gamma_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{N}_i & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A',A_i) & \longrightarrow & \Gamma_i/(\Gamma_i)_{\mathrm{tors}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et, en particulier, des isomorphismes $\bar{N}_i/N_i \simeq (\Gamma_i)_{\mathrm{tors}}$. Si s_i désigne le rang du End(A_i)-module Γ_i, nous avons rangN_i = rang$\bar{N}_i = n_i - s_i$ puisque Hom(A',A_i) s'identifie naturellement à End$(A_i)^{n_i}$. Enfin nous écrirons $D = [K : K_0]$.

Le but de cette partie consiste à contrôler les modules N_i à l'aide de D. Nous allons travailler en termes de volume. Pour cela, rappelons que la norme fixée plus haut fait de End$(A_i)\otimes\mathbb{R}$ un espace euclidien, dont nous notons la dimension d_i. Nous obtenons donc une norme euclidienne sur Hom$(A',A_i)\otimes\mathbb{R}$ puis sur $N_i\otimes\mathbb{R} = \bar{N}_i\otimes\mathbb{R}$. Le volume qui nous intéresse est alors celui de $N_i \otimes \mathbb{R}/N_i$. Notons déjà que l'on a

$$\mathrm{vol}(N_i \otimes \mathbb{R}/N_i) = \mathrm{vol}(\bar{N}_i \otimes \mathbb{R}/\bar{N}_i)\mathrm{Card}((\Gamma_i)_{\mathrm{tors}})$$

en vertu de l'isomorphisme signalé plus haut. D'un autre côté, l'espace vectoriel réel $\Gamma_i \otimes \mathbb{R}$ (de dimension $s_i d_i$) possède une norme euclidienne induite par la hauteur de Néron-Tate sur $A_i(\bar{\mathbb{Q}})$ que nous avons fixée. Soit $v_i = \mathrm{vol}(\Gamma_i \otimes \mathbb{R}/(\Gamma_i/(\Gamma_i)_{\mathrm{tors}}))$ le volume défini par cette norme. Maintenant, il est clair qu'il existe une constante c_4, indépendante de P, telle que si $\varphi \in \mathrm{Hom}(A',A_i)$ alors

$$h(\varphi(P')) \leq c_4\|\varphi\|^2 h(P).$$

Ainsi, la norme de l'application linéaire Hom$(A',A_i) \otimes \mathbb{R} \to \Gamma_i \otimes \mathbb{R}$ est majorée par $(c_4 h(P))^{1/2}$ et donc les suites exactes écrites ci-dessus entraînent que

$$\mathrm{vol}(\bar{N}_i \otimes \mathbb{R}/\bar{N}_i) \leq c_5 h(P)^{d_i s_i/2} v_i^{-1}$$

pour une constante c_5 là encore indépendante de P (puisque $s_i \leq n_i$).

Nous allons maintenant minorer v_i ; c'est pour faire cela qu'apparaissent les estimations liées au problème de Lehmer généralisé. Avant d'expliquer comment, rappelons la conséquence suivante du théorème de Minkowski (qui s'obtient par exemple en combinant le théorème V page 218 avec le lemme 8 page 135 de [Ca]) :

Lemme 4.1 *Si Λ est un réseau dans un espace euclidien E de dimension k, il existe une base $x_1,\dots,x_k$ de Λ telle que*

$$\prod_{i=1}^{k} \|x_i\| \leq k!^2 \mathrm{vol}(E/\Lambda).$$

Voici à présent le théorème qui permet d'obtenir une version faible de la conjecture 1.2. Il est dû à D. Masser (une conséquence en est citée dans [Ma] ; voir aussi [Fu] pour la constante).

Théorème 4.1 *Il existe une constante c_6 telle que pour $1 \leq i \leq m$ on ait*

$$\mathrm{Card}\{x \in A_i(K) \mid h(x) \leq (c_6 D)^{-1}\} \leq c_6 D^{g_i}(1+\log D)^{g_i}.$$

Nous en déduisons le

Corollaire 4.1 *Étant donné $k \geq 0$ un entier et $\varepsilon > 0$ un réel, il existe un réel $c_7 > 0$ tel que si $Q_1,\dots,Q_k$ sont des éléments de $A_i(K)$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ alors*

$$\prod_{j=1}^{k} h(Q_j) \geq c_7 (\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}})^2 D^{-k-2g_i-\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION : Considérons la partie F de $A_i(K)$ formée des éléments s'écrivant

$$\sum_{j=1}^{k} a_j Q_j \ + R$$

où $R \in A_i(K)_{\mathrm{tors}}$ et $a_j \in \mathbb{Z}$ avec $|a_j| \leq (k^2 c_6 D h(Q_j))^{-1/2}$. En particulier, si $x \in F$, ces conditions imposent $h(x) \leq (c_6 D)^{-1}$ donc, par le théorème, le cardinal de F est majoré par $c_6 D^{g_i}(1+\log D)^{g_i}$. D'un autre côté, par liberté des Q_j, ce cardinal vaut exactement

$$\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}} \prod_{j=1}^{k} (1 + 2[(k^2 c_6 D h(Q_j))^{-1/2}])$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Puisque, pour tout réel positif x, nous avons $1+2[x] > x$, nous pouvons écrire

$$c_6 D^{g_i}(1+\log D)^{g_i} \geq \mathrm{Card} F \geq \mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}} \prod_{j=1}^{k} (k^2 c_6 D h(Q_j))^{-1/2}.$$

Il vient donc

$$\prod_{j=1}^{k} h(Q_j) \geq (k^2 c_6 D)^{-k} (\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}})^2 (c_6 D^{g_i}(1+\log D)^{g_i})^{-2}$$

et la conclusion suit immédiatement. □

Pour unifier dans ce qui suit le traitement des deux cas qui apparaissent selon que l'on suppose vraie ou non la conjecture 1.2, nous posons

$$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{m} 2g_i^2/d_i$$

si A vérifie cette conjecture et

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} g_i s_i + 2g_i^2/d_i$$

sinon. Ceci permet de donner une minoration de volume commune aux deux cas.

Proposition 4.2 *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c_8 > 0$ tel que*

$$\prod_{i=1}^{m} v_i^{g_i/d_i} \geq c_8 \left(\prod_{i=1}^{m} (\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}})^{g_i/d_i} \right) D^{-(\lambda/2)-\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 4.1, il existe une base $Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{d_i s_i}^{(i)}$ (sur $\mathbb{Z}$) de $\Gamma_i/(\Gamma_i)_{\mathrm{tors}}$ telle que

$$\prod_{j=1}^{d_i s_i} h(Q_j^{(i)})^{1/2} \leq (d_i s_i)!^2 v_i.$$

Une application directe du corollaire précédent montre donc

$$(d_i s_i)!^2 v_i \geq c_7^{1/2} (\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}}) D^{-(d_i s_i/2)-g_i-(\varepsilon/2)}$$

et la proposition s'en déduit immédiatement par produit dans le cas où l'on ne suppose pas la conjecture 1.2. Dans le cas contraire, le résultat de l'appendice, appliqué à l'extension $\mathrm{End}(A_i)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$, montre que l'on peut scinder $(Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{d_i s_i}^{(i)})$ en d_i familles $\mathrm{End}(A_i)$-libres. Quitte à permuter les indices, nous pouvons supposer que $(Q_1^{(i)}, \ldots, Q_{s_i}^{(i)})$ est une telle famille libre pour laquelle le produit des hauteurs est minimal. Cela entraîne :

$$\prod_{j=1}^{s_i} h(Q_j^{(i)})^{1/2} \leq (d_i s_i)!^{2/d_i} v_i^{1/d_i}.$$

Maintenant la véracité de la conjecture 1.2 pour A entraîne en vertu des lemmes 2.1 et 2.2

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{s_i} h(Q_j^{(i)})^{g_i} \geq c_2' D^{-1-\varepsilon}.$$

Par ailleurs, le corollaire avec $k = 0$ donne

$$\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}} \leq c_7^{-1/2} D^{g_i+\varepsilon/2}.$$

En combinant ces différentes estimations, nous trouvons

$$\prod_{i=1}^{m} \left(v_i (\mathrm{Card} A_i(K)_{\mathrm{tors}})^{-1} \right)^{g_i/d_i}$$

$$\geq \prod_{i=1}^{m} c_7^{g_i/2d_i} D^{-(g_i^2/d_i)-(\varepsilon g_i/2d_i)} (d_i s_i)!^{-2g_i/d_i} \prod_{j=1}^{s_i} h(Q^{(i)})^{g_i/2}$$

$$\geq c_2'^{\,1/2} c_7^{\sum_{i=1}^{m} g_i/2d_i} \left(\prod_{i=1}^{m} (d_i s_i)!^{-2g_i/d_i} \right) D^{-(\lambda/2)-\varepsilon(1/2+\sum_{i=1}^{m} g_i/2d_i)}$$

et la proposition est établie. □

Finalement, nous pouvons énoncer

Proposition 4.3 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_9 > 0$ et pour chaque i une famille $(\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{n_i-s_i}^{(i)})$ d'éléments de N_i, libre sur* $\mathrm{End}(A_i)$, *de sorte que*

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i-s_i} \|\varphi_j^{(i)}\|^{2g_i} \leq c_9 h(P)^{\sum_{i=1}^{m} s_i g_i} D^{\lambda+\varepsilon}.$$

DÉMONSTRATION : Le lemme 4.1 fournit une base de N_i sur $\mathbb{Z}$ dont le produit des normes est majoré par $(d_in_i - d_is_i)!^2\text{vol}(N_i\otimes\mathbb{R}/N_i)$. Comme dans la démonstration précédente, grâce au résultat de l'appendice, nous pouvons scinder cette base en d_i familles (chacune de cardinal $n_i - s_i$) libres sur $\text{End}(A_i)$. Nous choisissons alors une telle famille pour laquelle le produit des normes est minimal. Nous avons donc

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i-s_i}\|\varphi_j^{(i)}\|^{2g_i}\leq\prod_{i=1}^{m}(d_in_i-d_is_i)!^{4g_i/d_i}\text{vol}(N_i\otimes\mathbb{R}/N_i)^{2g_i/d_i}$$

et le résultat découle de l'inégalité

$$\begin{aligned}\text{vol}(N_i\otimes\mathbb{R}/N_i) &\leq c_5h(P)^{d_is_i/2}\text{Card}((\Gamma_i)_{\text{tors}})v_i^{-1}\\ &\leq c_5h(P)^{d_is_i/2}\text{Card}(A_i(K)_{\text{tors}})v_i^{-1}\end{aligned}$$

combinée avec la proposition 4.2. □

5 Interpolation

Nous établissons d'abord un lemme préliminaire.

Lemme 5.1 *Pour tout* i*, tout sous-schéma fermé* Y *de* A_i *et tout point* $y\in Y(K_0)$*, il existe un sous-schéma fermé* W *de* A_i *tel que* y *est un point isolé de* $Y\cap W$ *et vérifiant* $\deg(\varphi\circ f)^{-1}(W)\leq c_{10}\|\varphi\|^{2\dim Y}$ *pour tout* $\varphi\in\text{Hom}(A',A_i)$ *et pour une constante* $c_{10}>0$ *indépendante de* i*,* Y *ou* y*.*

DÉMONSTRATION : Puisque $\mathcal{L}_i^{\otimes 3}$ est très ample, nous pouvons choisir une immersion fermée $\iota\colon A_i\hookrightarrow\mathbb{P}^N_{K_0}$ telle que $\iota^*\mathcal{O}(1)\simeq\mathcal{L}_i^{\otimes 3}$. Il existe alors un sous-espace linéaire L de $\mathbb{P}^N_{K_0}$ de codimension $\dim Y$ de sorte que $\iota(y)$ est un point isolé de $L\cap\iota(Y)$. Montrons que $W=\iota^{-1}(L)$ convient. Il est clair que y est isolé dans $Y\cap W$ et il reste à majorer le degré de $(\varphi\circ f)^{-1}(W)$. En écrivant L comme intersection de $\dim Y$ hyperplans, il nous suffit de majorer $\deg(\varphi\circ f)^{-1}(\iota^{-1}(H))$ par un multiple de $\|\varphi\|^2$ pour tout hyperplan H. Or le diviseur $\iota^{-1}(H)$ correspond au faisceau inversible $\mathcal{L}_i^{\otimes 3}$ sur A_i donc nous avons en termes de nombres d'intersection :

$$\deg\varphi^{-1}(\iota^{-1}(H))=(\mathcal{L}')^{\cdot g-1}\cdot\varphi^*\mathcal{L}_i^{\otimes 3}=3(2g)^{-1}\|\varphi\|^2((\mathcal{L}')^{\cdot g}\cdot A')$$

où la seconde égalité vient de [Mu, p. 192] en considérant φ comme un endomorphisme de A'. Maintenant, puisque $\mathcal{L}=f^*\mathcal{L}'$, nous avons pour tout cycle W' de A' l'égalité $\deg f^{-1}(W')=(\deg f)(\deg W')$. Par conséquent, $\deg(\varphi\circ f)^{-1}(\iota^{-1}(H))$ est un multiple de $\|\varphi\|^2$ et le lemme s'en déduit. □

Nous reprenons les notations de la partie précédente et supposons à présent que $P\in X(\bar{\mathbb{Q}})\setminus Z^{(r)}_{X,0}$ pour un certain entier r avec $1\leq r\leq g=\dim A$. Pour alléger, nous notons dorénavant q la quantité $\sum_{i=1}^m g_i(n_i-s_i)$ qui dépend de P.

Proposition 5.1 *Si* $r\leq q$ *alors, pour tout* $\varepsilon>0$*, il existe un réel* $c_{11}>0$ *tel que*

$$D\leq c_{11}(\deg X)\left(h(P)^{g-q}D^{\lambda+\varepsilon}\right)^{(r-1)/q}.$$

DÉMONSTRATION : Nous faisons bien entendu usage de la proposition 4.3. Elle fournit une famille d'éléments $\varphi_j^{(i)}$ de cardinal $t=\sum_{i=1}^m n_i-s_i$. Nous écrivons cette famille de morphismes de source A' et de buts variés sous la forme $\psi_1,\ldots,\psi_t$ de façon à ce que les réels $\|\psi_j\|$ $(1\leq j\leq t)$ forment une suite croissante. Puisque $\sum_{j=1}^t\dim\text{Im}\psi_j=q\geq r$, nous pouvons définir k comme le plus petit entier naturel tel que $\sum_{j=1}^k\dim\text{Im}\psi_j\geq r$. Nous posons $\chi_j=\psi_j\circ f$ pour $1\leq j\leq k$ puis

$$G=\bigcap_{j=1}^{k-1}\text{Ker}\chi_j.$$

Par liberté des $\varphi_j^{(i)}$, nous avons $\mathrm{codim} G = \sum_{j=1}^{k-1} \dim \mathrm{Im}\psi_j < r$. Maintenant, l'hypothèse $P \notin Z_{X,0}^{(r)}$ assure

$$\dim_P X \cap G < \max(1{,}r - \mathrm{codim} G) = r - \mathrm{codim} G.$$

Notons $\ell = r - \mathrm{codim} G - 1$ et Y la réunion des composantes irréductibles (sur K_0) de $X \cap G$ qui contiennent P (ainsi $\dim Y \leq \ell$). Nous appliquons le lemme précédent au sous-schéma fermé $\chi_k(Y)$ de $\mathrm{Im}\chi_k$ (qui est l'un des A_i) et au point $0 = \chi_k(P)$. Il nous fournit $W \subset \mathrm{Im}\chi_k$ défini sur K_0 de sorte que 0 est un point isolé de $\chi_k(Y) \cap W$. Nous définissons alors

$$V = G \cap \chi_k^{-1}(W).$$

Voyons dans un premier temps que P est un point isolé de $X \cap V$. Cela revient à montrer qu'il est isolé dans $Y \cap \chi_k^{-1}(W)$. Comme son image 0 est isolée dans $\chi_k(Y \cap \chi_k^{-1}(W)) \subset \chi_k(Y) \cap W$, il suffit de considérer $Y \cap \chi_k^{-1}(W) \cap \chi_k^{-1}(0) = Y \cap \mathrm{Ker}\chi_k \subset X \cap G \cap \mathrm{Ker}\chi_k$ et P est bien isolé dans ce dernier ensemble d'après l'hypothèse $P \notin Z_{X,0}^{(r)}$ qui se traduit ici par

$$\dim_P X \cap G \cap \mathrm{Ker}\chi_k < \max(1{,}r - \mathrm{codim} G \cap \mathrm{Ker}\chi_k) = \max(1{,}r - \sum_{j=1}^{k} \dim \mathrm{Im}\psi_j) = 1.$$

Par conséquent, $D = [K : K_0] \leq \deg X \cap V$ puisque X et V sont définis sur K_0. Grâce au théorème de Bézout, nous avons $D \leq (\deg X)(\deg V)$ et il reste à majorer $\deg V$. Notons que le lemme précédent entraîne $\deg \mathrm{Ker}\chi_j \leq c_{10} \|\psi_j\|^{2 \dim \mathrm{Im}\psi_j}$ (en choisissant $Y = \mathrm{Im}\psi_j$ disons) et donc

$$\deg V \leq c_{10}^k \left(\prod_{j=1}^{k-1} \|\psi_j\|^{2 \dim \mathrm{Im}\psi_j} \right) \|\psi_k\|^{2\ell}.$$

A présent, le choix d'ordre sur les $\|\psi_j\|$ montre

$$\left(\left(\prod_{j=1}^{k-1} \|\psi_j\|^{2 \dim \mathrm{Im}\psi_j} \right) \|\psi_k\|^{2\ell} \right)^q \leq \left(\prod_{j=1}^{t} \|\psi_j\|^{2 \dim \mathrm{Im}\psi_j} \right)^{r-1}$$

(considérer la suite croissante de q réels obtenue en répétant $\dim \mathrm{Im}\psi_j$ fois chaque $\|\psi_j\|$ et majorer le produit des $\sum_{j=1}^{k-1} \dim\mathrm{Im}\psi_j + \ell = \mathrm{codim} G + \ell = r - 1$ premiers termes). L'estimation de la proposition 4.3 s'écrit quant à elle

$$\prod_{j=1}^{t} \|\psi_j\|^{2 \dim \mathrm{Im}\psi_j} \leq c_9 h(P)^{g-q} D^{\lambda+\varepsilon}.$$

En combinant tout ceci, nous avons

$$D \leq (\deg X) c_{10}^k \left(c_9 h(P)^{g-q} D^{\lambda+\varepsilon} \right)^{(r-1)/q}$$

et la proposition est établie. □

Nous pouvons maintenant déduire sans peine de cet énoncé le théorème 1.4 sous la condition (C2) ou (C4). En effet, si X est fixé et que nous supposons $h(P)$ bornée, nous venons d'obtenir une majoration de D à la puissance

$$1 - (\lambda + \varepsilon) \frac{r-1}{q}.$$

Pour conclure par le théorème de Northcott comme prévu, il reste à vérifier que ce nombre est strictement positif, pour un choix convenable de ε, dans chacun des deux cas que nous envisageons. Il est donc suffisant de montrer

$$q > \lambda(r-1).$$

Rappelons que dans le cadre du théorème 1.4 nous supposons que $P \in A^{[r']}$. Avec nos notations, ceci équivaut exactement à $r' \leq q$ (car q est la codimension du plus petit sous-schéma en groupes de A contenant P). Il devient clair que (C2) implique $q > \lambda(r-1)$ puisque sous cette hypothèse$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^m g_i\delta_i$. Si, en revanche, $\lambda = \sum_{i=1}^m g_i s_i + g_i\delta_i = g - q + \sum_{i=1}^m g_i\delta_i$ alors

$$q > \lambda(r-1) \iff q > \left(g + \sum_{i=1}^m g_i\delta_i\right)\frac{r-1}{r}$$

qui résulte bien de (C4).

6 Conséquence de la conjecture 1.1

Nous reprenons les notations de la partie 4. De plus, nous introduisons $K^t = K(A_{\mathrm{tors}})$ qui est une extension finie de K_0^t et $D_{\mathrm{tors}} = [K^t : K_0^t]$.

Nous pouvons alors imiter la démonstration de la proposition 4.2 pour obtenir, sous la conjecture 1.1 et pour tout ε,

$$\prod_{i=1}^m v_i^{g_i/d_i} \geq c_8' D_{\mathrm{tors}}^{-(1/2)-\varepsilon}$$

(notons que, puisque l'on ne fait pas intervenir le cardinal de $A_i(K)_{\mathrm{tors}}$, nous n'utilisons pas le théorème 4.1). Ceci entraîne une majoration du produit des volumes des $\bar{N}_i \otimes \mathbb{R}/\bar{N}_i$ et donc, comme dans la proposition 4.3, nous obtenons

Proposition 6.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_9' > 0$ et pour chaque i une famille $(\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{n_i-s_i}^{(i)})$ d'éléments de $\bar{N}_i$, libre sur* $\mathrm{End}(A_i)$*, de sorte que*

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{n_i-s_i} \|\varphi_j^{(i)}\|^{2g_i} \leq c_9' h(P)^{g-q} D_{\mathrm{tors}}^{1+\varepsilon}.$$

Nous suivons ensuite la démarche de la partie précédente à la différence près que nous travaillons sur le corps K_0^t. Le lemme 5.1 est valable à l'identique sur ce corps. De la sorte, la proposition 5.1 s'adapte : les images $\chi_j(P)$ sont seulement des points de torsion. Nous remplaçons donc $X \cap G$ par $X \cap (\xi + G)$ pour un certain $\xi \in A_{\mathrm{tors}}$. Nous avons encore

$$\dim_P X \cap (\xi + G) \leq \ell$$

car $\xi + G$ est contenu dans un sous-groupe de même dimension (de la forme $[N]^{-1}G$). La démonstration peut alors continuer et fournir V, défini sur K_0^t, tel que P est isolé dans $X \cap V$. Ceci fournit une majoration de $[K^t : K_0^t]$ et il vient

$$D_{\mathrm{tors}} \leq c_{11}'(\deg X)\left(h(P)^{g-q} D_{\mathrm{tors}}^{1+\varepsilon}\right)^{(r-1)/q}.$$

Sous les hypothèses du théorème 1.4 avec la condition (C1), nous avons $q \geq r' \geq r > r-1$ et donc D_{tors} est borné. Ici, nous ne pouvons pas conclure directement par le théorème de Northcott mais nous revenons à la proposition 6.1 pour constater que la quantité $\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i-s_i}\|\varphi_j^{(i)}\|^{2g_i}$ est maintenant bornée indépendamment de P. Autrement dit, en considérant la composante neutre de $\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n_i-s_i}\mathrm{Ker}(f\circ\varphi_j^{(i)})$, il existe une sous-variété abélienne B choisie parmi un nombre fini indépendant de P telle que $\mathrm{codim}B \geq r$ et $P \in B + A_{\mathrm{tors}}$. La conclusion découle alors de la conséquence suivante du théorème de M. Raynaud.

Lemme 6.1 *Si B est une sous-variété abélienne de A telle que* $\mathrm{codim}B \geq r$ *alors* $(X \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap (B + A_{\mathrm{tors}})$ *est fini.*

DÉMONSTRATION : Nous notons $\varphi\colon A \to A/B$ le morphisme quotient. Nous considérons dans un premier temps un translaté $\xi' + B'$ où ξ' est un point de torsion de A/B et B' une sous-variété abélienne de A/B. Remarquons que

$$r - \mathrm{codim}\varphi^{-1}(\xi' + B') \leq \dim A/B - \mathrm{codim}\varphi^{-1}(B') = \dim B'.$$

De cette façon, pour tout point P de $(X \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap \varphi^{-1}(\xi' + B')$ nous avons

$$\dim_P X \cap \varphi^{-1}(\xi' + B') < \max(1, \dim B').$$

Si $\dim B' \leq 1$, nous constatons que P est isolé dans $X \cap \varphi^{-1}(\xi' + B')$. Sinon, il existe une composante Y de ce fermé, contenant P et de dimension $\dim Y < \dim B'$. Si de plus $P \in B + A_{\mathrm{tors}}$ alors son image $\varphi(P)$ est de torsion et nous appliquons alors le théorème 1.5 au sous-schéma fermé intègre $\varphi(Y)$ de A/B. Nous obtenons un nombre fini de translatés $\xi'' + B''$ contenus dans $\varphi(Y)$ (donc nous avons $\dim B'' < \dim B'$) dont l'un contient $\varphi(P)$ (ce qui donne $P \in (X \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap \varphi^{-1}(\xi'' + B'')$).

Nous venons de voir que si un point P de $(X \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap (B + A_{\mathrm{tors}})$ est contenu dans un ensemble de la forme $X \cap \varphi^{-1}(\xi' + B')$ ou bien il y est isolé ou bien la même chose est vraie pour un translaté de dimension strictement plus petite choisi parmi un nombre fini indépendant de P. Comme $\varphi^{-1}(0 + A/B) = A$, nous pouvons itérer ce procédé en commençant par $\xi' + B' = 0 + A/B$. Il s'arrête après au plus $\dim A/B$ étapes pour fournir un ensemble fini de translatés $\xi' + B'$ tel que tout point P de $(X \setminus Z_{X,0}^{(r)}) \cap (B + A_{\mathrm{tors}})$ est isolé dans l'un des $X \cap \varphi^{-1}(\xi' + B')$. Comme l'ensemble des points isolés d'un schéma de type fini sur un corps est toujours fini, le lemme est établi. □

7 Appendice

Soit K/k une extension de corps (non nécessairement commutatifs) de degré s.

Théorème. *Si V est un espace vectoriel sur K de dimension finie, toute base de V sur k se partitionne en s bases de V sur K.*

Pour un entier $r \in \mathbb{N}$, considérons l'assertion :

(P_r) *Dans un espace vectoriel sur K, une famille libre sur k de cardinal r se partitionne en s familles libres sur K.*

Bien entendu, le théorème est équivalent à la véracité de (P_r) pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Nous allons démontrer (P_r) par récurrence. Considérons pour cela une autre assertion attachée à $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

(Q_r) *Dans un espace vectoriel sur K, si une famille F libre sur k de cardinal r est partitionnée en $F = A_1 \cup \cdots \cup A_s \cup \{x\}$ où A_i est libre sur K (pour $1 \leq i \leq s$) alors il existe une partition $F = B_1 \cup \cdots \cup B_s \cup \{y\}$ où B_i est libre sur K (pour $1 \leq i \leq s$) de sorte que (1)* $\mathrm{Vect}_K B_i = \mathrm{Vect}_K A_i$ *pour tout i et (2) il existe j, $1 \leq j \leq s$, tel que $y \notin \mathrm{Vect}_K B_j$.*

On constate sans peine que, pour $r \geq 1$, les assertions (P_{r-1}) et (Q_r) réunies entraînent (P_r) : pour F de cardinal r, choisir $x \in F$ quelconque, partitionner $F \backslash \{x\}$ grâce à (P_{r-1}) puis appliquer (Q_r) et considérer $B_j \cup \{y\}$ libre sur K.

Par suite, (P_0) étant évidente, il nous reste seulement à prouver (Q_r). Nous procédons par récurrence sur r. A nouveau, l'assertion (Q_1) est claire ; nous supposons donc $(Q_1),\ldots,(Q_{r-1})$ vraies pour un certain $r \geq 2$ et nous nous plaçons sous les hypothèses de (Q_r).

Définissons $E = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Vect}_K A_i$ puis (pour $1 \leq i \leq s$) $A_i' = A_i \cap E$. Si $x \notin E$, le résultat est acquis sans changer de partition. Nous supposons donc $x \in E$.

Voyons d'abord qu'il existe i tel que $A_i' \neq A_i$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions $F \subset E$ et $\mathrm{Vect}_K A_i = E$ pour tout i ; ceci entraîne respectivement $\dim_k E \geq r$ et $\dim_K E = \mathrm{Card} A_i = (r-1)/s$, ce qui est contradictoire.

Considérons ensuite $F' = A_1' \cup \cdots \cup A_s' \cup \{x\}$. D'après ce qui précède, $r' = \mathrm{Card} F' < r$. Nous pouvons donc appliquer $(Q_{r'})$ à F' de sorte à obtenir $F' = B_1' \cup \cdots \cup B_s' \cup \{u\}$ avec $\mathrm{Vect}_K B_i' = \mathrm{Vect}_K A_i'$ et $u \notin \mathrm{Vect} B_j'$ pour un certain indice j que nous fixons. Posons alors $C_i = (A_i \setminus A_i') \cup B_i'$ pour tout i. Cette famille est libre sur K et vérifie $\mathrm{Vect}_K C_i = \mathrm{Vect}_K A_i$.

Comme $F' \subset E$, nous avons $u \in E$ et donc en particulier $u \in \mathrm{Vect}_K C_j$. Écrivons donc $u = \sum_{z \in C_j} \lambda_z z$ avec $\lambda_z \in K$. Puisque $u \notin \mathrm{Vect}_K B_j'$, il existe $y \in C_j \setminus B_j' = A_j \setminus A_j'$ tel que $\lambda_y \neq 0$. Remarquons $y \notin E$. Maintenant cet élément s'écrit

$$y = \lambda_y^{-1} u - \sum_{z \in C_j \backslash \{y\}} \lambda_y^{-1} \lambda_z z$$

et donc la famille $B_j = (C_j \backslash \{y\}) \cup \{u\}$ est libre sur K et vérifie $\mathrm{Vect}_K B_j = \mathrm{Vect}_K C_j$. Finalement, en posant $B_i = C_i$ lorsque $i \neq j$, le problème est résolu car $y \notin E$ donne la condition (2) de (Q_r).

Références

[AD] F. Amoroso et S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. *J. Reine Angew. Math.* 513. 1999. p. 145–179.

[AZ] F. Amoroso et U. Zannier. A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Série IV 29. 2000. p. 711–727.

[Ba] M. Baker. Lower bounds for the canonical height on elliptic curves over abelian extensions. *Internat. Math. Res. Notices* 29. 2003. p. 1571–1589.

[Be] D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on group varieties. *Duke Math. J.* 80. 1995. p. 223–250.

[BMZ] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices* 20. 1999. p. 1119–1140.

[Ca] J. W. S. Cassels. *An introduction to the geometry of numbers.* Springer-Verlag. 1959.

[DH] S. David et M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. *J. Reine Angew. Math.* 529. 2000. p. 1–74.

[Fu] M. Fujimori. A remark on naive height of a polarized abelian variety and its applications. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 73. 1997. p. 145–147.

[Ma] D. Masser. Linear relations on algebraic groups. *New advances in transcendence theory (Durham, 1986)* (édité par A. Baker). Cambridge University Press. 1988. p. 248–262.

[Mu] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford University Press. 1974.

[RV] G. Rémond et E. Viada. Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Internat. Math. Res. Notices* 35. 2003. p. 1915–1931.

[Se] J.-P. Serre. *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig. 1997.

[Si] J. H. Silverman. A lower bound for the canonical height on elliptic curves over abelian extensions. *J. Number Theory.* 2003. à paraître.

[Vi] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Série V. 2. 2003. p. 47–75.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France
`Gael.Remond@ujf-grenoble.fr`