

# Caractérisation de l'espace projectif

Stéphane DRUEL

Prépublication de l'Institut Fourier n<sup>o</sup> 616 (2003)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

Résumé.—Nous montrons le théorème suivant. Soit  $X$  une variété projective normale définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit  $\Omega_X^1 \rightarrow L^{-1}$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Si  $L \cdot C > 0$  pour toute courbe  $C \subset X$  alors ou bien le feuilletage est régulier, ou bien  $X$  est un cône.

## Introduction

Soit  $X$  une variété projective *normale*, de dimension  $n \geq 2$ , définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un *feuilletage en courbes* sur  $X$  est la donnée d'un fibré en droites  $L$  sur  $X$  et d'une application non nulle  $\eta : \Omega_X^1 \rightarrow L^{-1}$ .

Le point de départ de notre travail est la caractérisation suivante de l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$ . Si  $L$  est *ample* alors  $L \simeq \mathcal{O}_X(Y)$ , où  $Y \subset X$  est un diviseur irréductible et normal, et  $X$  s'identifie à la contraction de la section de  $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-Y)) \rightarrow Y$  de fibré normal  $\mathcal{O}_Y(-Y)$  (*voir* [Wa83], Theorem 2). Si, de plus,  $X$  est lisse alors  $X$  est isomorphe à l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$  (*voir* [Wa83], Theorem 1).

Les techniques utilisées par Wahl relèvent de l'algèbre commutative. Nous donnons une démonstration nouvelle, de nature géométrique, de son résultat et d'un énoncé plus général.

Le *lieu singulier* du feuilletage  $(\eta, L)$  est le sous-schéma fermé  $Z(\eta, L)$  de  $X$  dont l'idéal est l'image de l'application induite  $\Omega_X^1 \otimes L \rightarrow \mathcal{O}_X$ . Une courbe irréductible  $C \subset X$  est appelée une *feuille* si  $C \not\subset Z(\eta, L)$  et si la restriction  $\eta|_C$  de  $\eta$  à  $C$  se factorise à travers l'application naturelle  $\Omega_{X|C}^1 \rightarrow \Omega_C^1$ .

**Théorème.**—*Soient  $X$  une variété projective normale, de dimension  $\geq 2$ , définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et  $(\eta, L)$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Si  $L \cdot C > 0$*

---

Mots clés : feuilletages algébriques, variétés spéciales.

Classification A.M.S. : 14M99, 32S65.

pour toute courbe  $C \subset X$  et si  $Z(\eta, L) \neq \emptyset$  alors  $L \simeq \mathcal{O}_X(Y)$ , où  $Y \subset X$  est un diviseur irréductible et normal, et  $X$  s'identifie à la contraction de la section du morphisme  $\mathbf{P}_Y(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-Y)) \rightarrow Y$  de fibré normal  $\mathcal{O}_Y(-Y)$ .

La preuve de ce résultat repose sur un critère d'algébricité des feuilles d'un feuilletage algébrique démontré de manière indépendante par Bost (voir [Bo01], Theorem 3.5) et Bogomolov-McQuillan (voir [BoMc01]). Si  $Z(\eta, L) \neq \emptyset$ , nous montrons que les feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  sont des courbes rationnelles passant par un même point de  $X$ .

**Corollaire.**— Soient  $X$  une variété projective lisse de dimension  $n \geq 2$ , définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et  $(\eta, L)$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Si  $L \cdot C > 0$  pour toute courbe  $C \subset X$ , alors ou bien  $X$  possède une fibration en droites projectives, ou bien  $X$  est isomorphe à l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$ .

Le dernier résultat est le suivant.

**Proposition.**— Soient  $X$  une surface projective normale, définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et  $(\eta, L)$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Si  $L \cdot C > 0$  pour toute courbe  $C \subset X$ , alors ou bien  $X$  est une surface géométriquement réglée, ou bien  $X$  vérifie les conclusions du théorème.

## 1. Feuilletage

(1.1) Soit  $X$  une variété algébrique définie sur un corps  $k$ . Un feuilletage en courbes sur  $X$  est la donnée d'un fibré en droites  $L$  sur  $X$  et d'une application non nulle  $\eta : \Omega_X^1 \rightarrow L^{-1}$ . Son lieu singulier est le sous-schéma fermé  $Z(\eta, L)$  de  $X$  dont l'idéal est l'image de l'application induite  $\Omega_X^1 \otimes L \rightarrow \mathcal{O}_X$ . Enfin, une courbe irréductible  $C \subset X$  est appelée une feuille si  $C \not\subset Z(\eta, L)$  et si la restriction  $\eta|_C$  de  $\eta$  à  $C$  se factorise à travers l'application naturelle  $\Omega_{X|C}^1 \rightarrow \Omega_C^1$ , i.e., s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{X|C}^1 & \longrightarrow & \Omega_C^1 \\ \eta|_C \downarrow & \searrow & \\ L^{-1}|_C & & \end{array}$$

**Lemme 1.2.**— Soient  $X$  une variété algébrique définie sur un corps  $k$  de caractéristique nulle et  $(\eta, L)$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Soit enfin  $n : X^n \rightarrow X$  la normalisation de  $X$ . Il existe alors une unique application  $\eta_n : \Omega_{X^n}^1 \rightarrow n^*L^{-1}$  factorisant  $n^*\eta : n^*\Omega_X^1 \rightarrow n^*L^{-1}$  et, de plus,  $n^{-1}(Z(\eta, L)_{\text{red}}) \subset Z(\eta_n, n^*L)_{\text{red}}$ .

*Démonstration.*— Soit  $\text{Spec}(A) \subset X$  un ouvert affine au dessus duquel le fibré  $L$  est trivial. Soit  $K$  le corps des fractions de  $A$  et  $\bar{A}$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $K$ . Soit  $D_A$  la dérivation de  $A$

définissant le feuilletage sur l'ouvert considéré et soit  $D_K$  la dérivation de  $K$  correspondante. La dérivation  $D_K$  satisfait  $D_K(\bar{A}) \subset \bar{A}$  (voir [Se66]) et c'est l'unique dérivation de  $\bar{A}$  induisant  $D_A$  sur  $A$ . La première assertion du lemme est alors immédiate.

Soit  $I$  l'idéal de  $Z(\eta, L) \cap \text{Spec}(A)$  dans  $A$ , et soit  $\mathfrak{m} \supset I$  un idéal maximal. Soit  $J := \mathfrak{m}\bar{A}$ . Comme  $D_A(A) \subset I$ ,  $D_K(J) \subset J$  et  $D_K(\sqrt{J}) \subset \sqrt{J}$ . La dérivation  $D_K$  induit donc une dérivation de l'anneau  $\bar{A}/\sqrt{J}$ . Le schéma  $\text{Spec}(\bar{A}/\sqrt{J})$  est lisse sur  $k$ , la dérivation précédente est donc identiquement nulle et  $D_K(\bar{A}) \subset \sqrt{J}$ . ■

**Exemple 1.3.** – Si le corps de base est  $\mathbf{C}$  et si  $B$  est une courbe projective, lisse, de genre au moins 2, il existe un fibré vectoriel  $G$  de rang 2 et de degré 0 sur  $B$  dont toutes les puissances symétriques sont *stables*. Soit  $S = \mathbf{P}_B(G)$  la surface réglée associée. Le fibré tangent relatif  $T_{S/B} \subset T_S$  est alors de degré  $> 0$  sur toutes les courbes de  $S$  (voir [Ha70], Exemple 10.6).

## 2. Feuilletage sur les surfaces

Le résultat de cette section est la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** – Soient  $S$  une surface normale,  $B$  une courbe projective lisse et  $p_S : S \rightarrow B$  un morphisme à fibres connexes. Soit  $F$  une fibre générale de  $p_S$ . Soit  $S'$  une surface algébrique et  $q_S : S \rightarrow S'$  un morphisme dominant. Soit  $(\eta_S, L_S)$  un feuilletage en courbes sur  $S$ . Supposons le fibré  $L_S$  numériquement effectif et supposons qu'une courbe  $C \subset S$  est contractée par  $q_S$  et seulement si  $L_S \cdot C = 0$ . Supposons enfin que les courbes tracées sur  $S$  et contractées par  $q_S$  sont horizontales relativement à  $p_S$ . Sous ces hypothèses, la surface  $S \rightarrow B$  est géométriquement réglée, le feuilletage vertical et  $L_S \cdot F \in \{1, 2\}$ . Si  $L_S \cdot F = 2$  alors le feuilletage est régulier et le morphisme  $q_S$  fini. Si  $L_S \cdot F = 1$ , alors le lieu singulier du feuilletage est l'unique section de  $p_S$  contractée par  $q_S$ .

*Démonstration.* – L'application composée

$$N_{F/S}^* \simeq \mathcal{O}_F \rightarrow \Omega_{S|F}^1 \rightarrow (L_S^{-1})|_F$$

est identiquement nulle car  $L_S \cdot F > 0$  et il existe donc une factorisation  $\Omega_{S|F}^1 \rightarrow (L_S^{-1})|_F$ . Les fibres générales de  $p_S$  sont donc des courbes rationnelles lisses et  $L_S \cdot F \in \{1, 2\}$ .

1<sup>er</sup> cas :  $L_S \cdot F = 1$ . – Les fibres de  $p_S$  sont irréductibles et génériquement réduites. La surface  $S \rightarrow B$  est donc géométriquement réglée.

Soit  $G$  un fibré de rang 2 sur  $B$ , *normalisé*, de sorte que  $S = \mathbf{P}_B(G)$  (voir [Ha77]). Notons  $C_0 \subset S$  une section de  $p_S$  telle que  $\mathcal{O}_S(C_0)$  soit isomorphe au fibré tautologique  $\mathcal{O}_S(1)$ . Le groupe  $\text{Num}(S)$  est libre de rang 2 et engendré par les classes de  $C_0$  et  $F$ . Le produit d'intersection est donné par les formules  $F^2 = 0$ ,  $C_0 \cdot F = 1$  et  $C_0^2 = -e = \deg(G)$ .

L'application composée

$$p_S^* \Omega_B^1 \xrightarrow{dp_S} \Omega_S^1 \xrightarrow{\eta_S} L_S^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de  $p_S$  et donc identiquement nulle. Le feuilletage  $(\eta_S, L_S)$  est donc vertical relativement à  $p_S$ , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Omega_S^1 & \longrightarrow & \Omega_{S/B}^1 \\ \downarrow \eta_S & \searrow & \\ L_S^{-1} & & \end{array}$$

ou encore, des inclusions  $L_S \subset T_{S/B} \subset T_S$ . Il existe donc un diviseur effectif  $D_S \subset S$  tel que  $T_{S/B} = L_S(D_S)$  et  $D_S \cdot F = 1$ .

Soit  $C_0 + bF$  la classe de  $D_S$  dans  $\text{Num}(S)$ . La classe de  $L_S$  dans  $\text{Num}(S)$  est donc  $C_0 + (e - b)F$  et

$$L_S \cdot D_S = (C_0 + (e - b)F) \cdot (C_0 + bF) = -e + b + (e - b) = 0.$$

Si  $D_S^h$  est la composante horizontale de  $D_S$  et  $D_S^v$  sa composante verticale, alors

$$0 = L_S \cdot D_S = L_S \cdot D_S^h + L_S \cdot D_S^v$$

et, puisque  $L_S$  est numériquement effectif,

$$L_S \cdot D_S^h = L_S \cdot D_S^v = 0$$

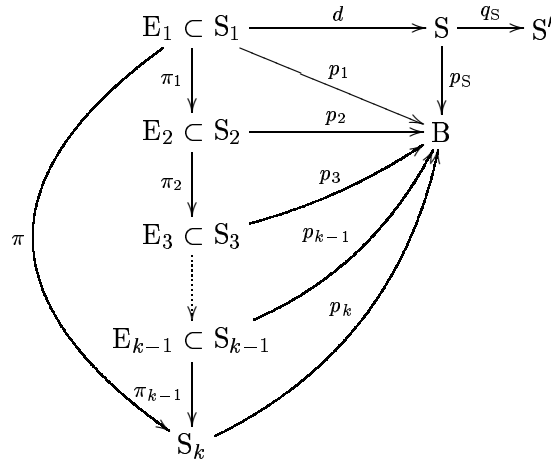
et

$$D_S^v = 0.$$

Le lieu singulier  $D_S$  du feuilletage  $(\eta_S, L_S)$  est donc une section de  $p_S$  contractée par  $q_S$ . L'unicité d'une telle section est bien connue.

2<sup>ème</sup> cas :  $L_S \cdot F = 2$ .—Il existe une résolution *minimale et équivariante*  $d : S_1 \rightarrow S$  des singularités de  $S$  (voir [BuWa74], Proposition 1.2). Notons  $\eta_1 : \Omega_{S_1}^1 \rightarrow d^*L_S^{-1}$  le relèvement de  $\eta_S : \Omega_S^1 \rightarrow L_S^{-1}$  à  $S_1$  (voir Lemme 1.2).

Le genre de  $B$  est  $\geq 1$  et il n'y a donc pas de  $(-1)$ -courbe sur  $S_1$  dominant  $B$ . Supposons que la surface  $S_1$  ne soit pas minimale. Son modèle minimal est une surface géométriquement réglée  $S_k$  et s'obtient à partir de  $S_1$  en contractant des  $(-1)$ -courbes dans les fibres de  $p_1$



Le morphisme  $\pi_i$  est l'éclatement d'un point de  $S_{i+1}$ , de lieu exceptionnel  $E_i \subset S_i$ . Notons

$L_1 = d^*L_S$ . Le fibré  $L_1$  est numériquement effectif et  $L_1 \cdot F = L_S \cdot F = 2$ . Il existe un fibré  $L_2$  sur  $S_2$  et un entier  $j_1 \in \mathbf{Z}$  tels que  $L_1 = \pi_1^*L_2(j_1E_1)$ . Comme  $L_1$  est numériquement effectif,  $j_1 \leq 0$  et  $L_2$  est également numériquement effectif. L'inclusion  $T_{S_1} \longrightarrow \pi_1^*T_{S_2}$  donne les inclusions

$$0 \longrightarrow T_{S_1} \otimes L_1^{-1} \longrightarrow \pi_1^*(T_{S_2} \otimes L_2^{-1})(-j_1E_1)$$

et

$$0 \longrightarrow \pi_{1*}(T_{S_1} \otimes L_1^{-1}) \longrightarrow T_{S_2} \otimes L_2^{-1}$$

puisque  $\pi_{1*}\mathcal{O}_{S_1}(-j_1E_1) = \mathcal{O}_{S_2}$ . En particulier,  $H^0(S_1, T_{S_1} \otimes L_1^{-1}) \subset H^0(S_2, T_{S_2} \otimes L_2^{-1})$ . L'argument précédent montre qu'il existe, pour tout  $2 \leq i \leq k$ , des fibrés numériquement effectifs  $L_i$  sur  $S_i$  et des entiers  $j_i \leq 0$  tels que

$$L_i = \pi^*L_{i+1}(j_iE_i)$$

et

$$H^0(S_{i-1}, T_{S_{i-1}} \otimes L_{i-1}^{-1}) \subset H^0(S_i, T_{S_i} \otimes L_i^{-1}).$$

D'où

$$L_1 = \pi^*L_k(-E)$$

où  $E$  est un diviseur effectif et  $\pi$ -exceptionnel. Soit enfin  $\eta_k$  l'image de  $\eta_1 \in H^0(S_1, T_{S_1} \otimes L_1^{-1})$  dans  $H^0(S_k, T_{S_k} \otimes L_k^{-1})$ .

Soit  $G$  un fibré de rang 2 sur  $B$ , *normalisé*, de sorte que  $S_k = \mathbf{P}_B(G)$ . Notons  $C_0 \subset S_k$  une section de  $p_k$  telle que  $\mathcal{O}_{S_k}(C_0)$  soit isomorphe au fibré tautologique  $\mathcal{O}_{S_k}(1)$ . Soit  $e = -\deg(G)$ .

L'application composée

$$p_k^*\Omega_B^1 \xrightarrow{dp_k} \Omega_{S_k}^1 \xrightarrow{\eta_k} L_k^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de  $p_k$  et donc identiquement nulle. Le feuilletage  $(\eta_k, L_k)$  est donc vertical relativement à  $p_k$ , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{S_k}^1 & \longrightarrow & \Omega_{S_k/B}^1 \\ \downarrow \eta_k & & \searrow \\ L_k^{-1} & & \end{array}$$

ou encore, des inclusions  $L_k \subset T_{S_k/B} \subset T_{S_k}$ . Il existe donc un diviseur effectif  $D_k \subset S_k$  tel que  $T_{S_k/B} = L_k(D_k)$ . Enfin,  $L_k \cdot F = 2$ .

Le fibré tangent relatif  $T_{S_k/B}$  est de degré 2 sur la fibre  $F$  et  $D_k$  est donc vertical relativement à  $p_k$ . La classe de  $T_{S_k/B}$  dans  $\text{Num}(S_k)$  est  $2C_0 + eF$  et la classe de  $L_k$  est donc  $2C_0 + (e - \alpha)F$  où  $\alpha = D_k \cdot C_0 \geq 0$ . Le nombre  $L_k^2 = -4\alpha$  est donc  $\leq 0$  d'une part et  $\geq 0$  d'autre part puisque  $L_k$  est numériquement effectif, et donc nul. D'où

$$D_k = 0 \text{ et } L_k \equiv 2C_0 + eF.$$

La relation  $L_1 = \pi^*L_k(-E)$  donne  $L_1^2 = L_k^2 + E^2 = E^2$ . Le premier de ces deux nombres est  $\geq 0$  puisque  $L_1$  est numériquement effectif et le second est  $\leq 0$  puisque  $E$  est  $\pi$ -exceptionnel. D'où

$$E = 0 \text{ et } L_1 \cdot E_1 = \pi^*L_k \cdot E_1 = 0.$$

La  $(-1)$ -courbe  $E_1$  est donc contractée par  $q_S \circ d$  mais ne l'est pas par  $d$ , par minimalité de la résolution  $d : S_1 \rightarrow S^n$ . La courbe  $d(E_1)$  n'est pas contractée par  $q_S$  car elle est verticale relativement à  $p_1$ . La surface  $S_1$  est donc minimale et, par ce qui précède,  $L_1$  est isomorphe au fibré tangent relatif  $T_{S_1/B}$ .

Supposons qu'il existe une courbe irréductible  $C \subset S_1$  qui soit contractée par  $q_S \circ d$ . Soit  $aC_0 + bF$  sa classe dans  $\text{Num}(S_1)$ ,

$$L_1 \cdot C = 2b - ae \text{ et } C^2 = a(2b - ae).$$

Le premier de ces deux nombres doit être nul si  $C$  est contractée par  $q_S \circ d$  et le second strictement négatif, ce qui est absurde. La surface  $S$  est donc lisse, et le morphisme  $q_S$  est fini. Enfin, le feuilletage  $(\eta_S, L_S)$  sur  $S$  est régulier. ■

### 3. Fibrés projectifs

(3.1) Soit  $Y$  une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos. Soit  $G$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $Y$ , extension d'un fibré en droites  $M$  par le fibré trivial  $\mathcal{O}_Y$ ,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Soit  $\alpha$  la classe dans  $H^1(\Sigma, M^{-1})$  de cette extension. Soient  $Z := \mathbf{P}_Y(G)$  et  $p : Z \rightarrow Y$  le morphisme naturel. Soit  $\Sigma$  la section de  $p$  correspondant au quotient inversible  $M$  de  $G$ . L'idéal de  $\Sigma$  dans  $Z$  s'identifie au fibré  $\mathcal{O}_Z(-1)$ .

Soit  $2\Sigma$  le deuxième voisinage infinitésimal de  $\Sigma$  dans  $Z$ , c'est-à-dire, le sous-schéma fermé de  $Z$  défini par l'idéal  $I_{\Sigma/Z}^2$ .

**Lemme 3.2.** — *Il existe un isomorphisme  $\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1})$ .*

*Démonstration.*—Le morphisme  $p$  induit une rétraction de l'inclusion  $\Sigma \subset 2\Sigma$ . La suite exacte courte

$$0 \rightarrow M^{-1} \simeq I_{\Sigma/Z}/I_{\Sigma/Z}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma^\times \rightarrow 0$$

donne la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow H^1(\Sigma, M^{-1}) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\times).$$

La rétraction  $2\Sigma \rightarrow \Sigma$  induit en cohomologie une section de  $H^1(\Sigma, \mathcal{O}_{2\Sigma}^\times) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^\times)$  et, finalement,

$$\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1}).$$

■

Le point suivant a été observé par Schröer.

**Lemme 3.3** (voir [Sc00], Exemple 5.6).—*La classe du fibré  $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p^*M^{-1}$  dans  $\text{Pic}(2\Sigma)$  est  $(0, \alpha)$ .*

*Démonstration.*—La classe du fibré  $\mathcal{O}_Z(1) \otimes p^*M^{-1}$  dans  $\text{Pic}(\Sigma)$  est nulle. Soit  $U_i$  un recouvrement par des ouverts affines de  $\Sigma \simeq Y$  trivialisant le fibré  $M$ . Soit  $M_i$  la restriction de  $M$  à  $U_i$  et  $s_i \in H^0(U_i, M_i)$  une section partout non nulle. Soient  $\psi_i : M_i \rightarrow \mathcal{O}_i$  la trivialisatation de  $M_i$  induite par  $s_i$  et  $f_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$  les fonctions de transitions du fibré  $M_i$  sur les ouverts  $U_{ij} := U_i \cap U_j$ . Soit  $G_i$  la restriction de  $G$  à  $U_i$  et fixons un isomorphisme  $\varphi_i : G_i \rightarrow \mathcal{O}_i \oplus M_i$  rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_i & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow & M_i \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \psi_i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_i & \longrightarrow & \mathcal{O}_i \oplus \mathcal{O}_i & \longrightarrow & \mathcal{O}_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les fonctions de transitions  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ , sur les ouverts  $U_{ij}$ , du fibré  $G$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & g_{ij} \\ 0 & f_{ij} \end{pmatrix}$$

Soit  $s_i^*$  la section duale de  $s_i$  sur  $U_i$  et posons, pour tout  $(i, j)$ ,  $\alpha_{ij} = g_{ij}s_j^*|_{U_{ij}} = \frac{g_{ij}}{f_{ij}}s_i^*|_{U_{ij}}$ . La classe  $\alpha \in H^1(\Sigma, M^{-1})$  est alors représentée par le cocycle  $(\alpha_{ij})$ .

Il reste à faire le calcul des fonctions de transitions du fibré  $\mathcal{O}_Z(1)$  au voisinage de la section  $\Sigma$ . Posons  $Z_i = p^{-1}(U_i)$  et  $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$ . Notons  $\hat{s}_i = \varphi_i^{-1}(0, 1)$  la section de  $\mathcal{O}_Z(1)$  au dessus de l'ouvert  $Z_i$ . Sur  $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$ ,  $\varphi_i^{-1}(1, 0) = t_i \hat{s}_i$ , où  $t_i$  est une fonction régulière sur l'ouvert considéré. Sur  $Z_{ij} \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$ ,

$$\hat{s}_j = (p^*f_{ij} + p^*g_{ij}t_i)\hat{s}_i.$$

Notons que les ouverts  $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$  de  $Z$  recouvrent  $\Sigma$ . Les fonctions de transitions  $h_{ij}$  du fibré tautologique sur les ouverts  $(Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}) \cap (Z_j \cap \{\hat{s}_j \neq 0\})$  sont donc données par la formule

$$\frac{h_{ij}}{p^*f_{ij}} = 1 + \frac{p^*g_{ij}}{p^*f_{ij}}t_i.$$

Il reste à remarquer que le fermé  $\Sigma$  est défini, sur l'ouvert  $Z_i \cap \{\hat{s}_i \neq 0\}$ , par l'annulation de la fonction  $t_i$ . ■

#### 4. Démonstration des résultats

(4.1) Soient  $X$  une variété projective *normale*, de dimension  $n \geq 2$ , définie sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle, et  $(\eta, L)$  un feuilletage en courbes sur  $X$ . Supposons  $L \cdot C > 0$  pour toute courbe  $C \subset X$ .

(4.2) *Existence de feuilles algébriques.*—Notons  $X_s$  le lieu singulier de  $X$  et  $X_{ns}$  le complémentaire de  $X_s$  dans  $X$ . Soit  $D_{sat}^{ns}$  le diviseur des composantes de codimension 1, comptées avec multiplicités, de  $Z(\eta, L) \cap X_{ns}$  et  $D_{sat}$  l'adhérence de son *support* dans  $X$ . Notons  $\eta_{sat}^{ns} : \Omega_{X_{ns}}^1 \rightarrow L^{-1}|_{X_{ns}}(-D_{sat}^{ns})$  le feuilletage induit : le lieu  $Z(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$  des zéros de  $\eta_{sat}^{ns}$  est de codimension au moins 2 dans  $X_{ns}$ . Notons enfin  $X_r$  le complémentaire dans  $X$  de  $\overline{Z(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))}_{red} \cup \overline{Z(\eta, L)}_{red} - D_{sat}$ .

Remarquons enfin que le fermé  $X - X_r$  est de codimension au moins 2 dans  $X$ .

Le fermé  $X - (X_{ns} \cap X_r)$  est de codimension au moins 2 dans  $X$ . Il existe donc une courbe projective lisse  $B \subset X_{ns} \cap X_r$  telle que

- $B$  n'est pas une feuille du feuilletage  $(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$ ,
- $B \not\subset D_{sat}$ .

Notons  $\Gamma_B \subset B \times (X_{ns} \cap X_r) \subset B \times X$  le graphe de  $B \subset X$ . Notons  $p$  et  $q$  les projections de  $B \times X$  sur  $B$  et  $X$  respectivement,  $p_{ns}$  et  $q_{ns}$  leurs restrictions à  $B \times X_{ns}$ . Le feuilletage  $(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$  induit un feuilletage sur  $B \times X_{ns}$ ,

$$\Omega_{B \times X_{ns}}^1 = p_{ns}^* \Omega_B^1 \oplus q_{ns}^* \Omega_{X_{ns}}^1 \longrightarrow q_{ns}^* \Omega_{X_{ns}}^1 \longrightarrow q_{ns}^* L^{-1}|_{X_{ns}}(-D_{sat}^{ns}).$$

Ce feuilletage est partout non nul le long de  $\Gamma_B$  et  $\Gamma_B$  ne lui est tangente en aucun point. Par le théorème de Frobenius formel (*voir* [Mi87]), il existe un sous-schéma formel  $\widehat{V}$  lisse de dimension 2 du complété formel  $\widehat{B \times X_{ns}}$  de  $B \times X_{ns}$  le long de  $\Gamma_B$  admettant  $\Gamma_B$  comme schéma de définition. Le fibré normal  $N_{\Gamma_B/\widehat{V}}$  de  $\Gamma_B$  dans  $\widehat{V}$  est naturellement isomorphe à la restriction de  $q_{ns}^* L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns})$  à  $\Gamma_B$  et en particulier ample. Le schéma formel  $\widehat{V}$  est donc algébrique (*voir* [Bo01], Theorem 3.5), autrement dit, il existe une surface  $S \subset B \times X$ , irréductible et réduite, telle que  $\Gamma_B \subset S$  et  $\widehat{V} \subset \widehat{S}$  où  $\widehat{S}$  est le complété formel de  $S$  le long de  $\Gamma_B$ .

Notons  $q_S$  la restriction de  $q$  à  $S$ . Les germes de feuilles du feuilletage  $(\eta_S, q_S^* L)$ , aux points de  $\Gamma_B \subset S$ , sont donc algébriques et les images desdites feuilles par  $q_S$  sont des feuilles du feuilletage  $(\eta_{sat}^{ns}, L|_{X_{ns}}(D_{sat}^{ns}))$  sur  $X_{ns}$  et, sauf éventuellement un nombre fini, des feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  sur  $X$ , puisque  $B \not\subset D_{sat}$ .

**Remarque 4.3.**—Supposons  $H^0(X, L) \neq 0$ . Soit  $Y \in |L|$  et soit  $G$  la composante neutre du groupe des automorphismes de  $X$  fixant  $Y$  points par points. Le groupe  $G$  est algébrique et son algèbre de Lie  $H^0(X, \Theta_X(-Y))$  est, par hypothèse, de dimension  $> 0$ . Soit  $G_0$  un sous-groupe fermé, affine et connexe de  $G$ , distingué dans  $G$  et maximal pour ces propriétés. Le quotient  $G/G_0$  est alors une variété abélienne par le théorème de Chevalley. Supposons le groupe  $G_0$  réduit à l'identité. Le diviseur  $Y$  rencontre, par hypothèse, toutes les courbes tracées sur  $X$ . Les orbites sous  $G$  non réduites à un point sont compactes et rencontrent donc le lieu des points fixes sous  $G$ , ce qui est absurde. Il existe donc un sous-groupe affine de  $G$  isomorphe à  $\mathbf{G}_a$  ou  $\mathbf{G}_m$  et les orbites sous ce sous-groupe sont les feuilles d'un feuilletage en courbes, éventuellement distinct du feuilletage considéré.

(4.4) *La variété des feuilles.*—Soit  $\bar{Y}$  l'adhérence du lieu des points du schéma de Hilbert de  $X$  correspondants aux feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  et soit  $\bar{Z} \subset \bar{Y} \times X$  la famille universelle. Notons  $p$  et  $q$  les projections de  $\bar{Y} \times X$  sur  $\bar{Y}$  et  $X$  respectivement, et  $p_{\bar{Z}}, q_{\bar{Z}}$  leurs restrictions à  $\bar{Z}$ . Le schéma  $\bar{Y}$  a un nombre au plus dénombrable de composantes irréductibles, toutes de type fini sur le corps de base infini  $k$ . Le lieu des feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  rencontrant l'ouvert  $X_{ns} \cap X_r - D_{sat}$  n'étant pas réunion au plus dénombrable de fermés propres de  $X$ , il existe une composante irréductible  $Y$  de  $\bar{Y}$  telle que la restriction de  $q_{\bar{Z}}$  à la famille universelle correspondante soit un morphisme



dominant. Soient  $Z \subset Y \times X$  la famille universelle,  $p_Z$  et  $q_Z$ , les morphismes naturels vers  $Y$  et  $X$  respectivement

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q_Z} & X \\ p_Z \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

**Lemme 4.5.**—*Soient  $Z$  et  $Y$  deux schémas de type fini sur un corps  $k$  et  $p : Z \rightarrow Y$  un morphisme sur  $k$ , propre et plat. Si  $Y$  est intègre et si l'une des fibres de  $p$  est géométriquement intègre, alors  $Z$  est intègre.*

*Démonstration.*—L'irréductibilité de  $Z$  est bien connue. Il reste à vérifier que  $Z$  est réduit. Le lieu des points  $y \in Y$  tel que  $p^{-1}(y)$  soit géométriquement intègre est ouvert dans  $Y$  et non vide par hypothèse. La fibre générique est donc géométriquement intègre. Soient  $\text{Spec}(B) \subset Z$  et  $\text{Spec}(A) \subset Z$  deux ouverts affines non vides tels que  $p(\text{Spec}(B)) \subset \text{Spec}(A)$ . L'anneau  $B$  est plat sur  $A$ , par hypothèse. Si  $b \in B$  est nilpotent alors, comme la fibre générique est intègre, il existe  $a \in A$  non nul, tel que  $ab = 0$ . L'élément  $a$  est non diviseur de zéro dans  $A$  et donc dans  $B$ , et  $b = 0$ . ■

La famille universelle  $Z$  est donc intègre par le lemme précédent. Le feuilletage  $(\eta, L)$  sur  $X$  induit un feuilletage sur  $Y \times X$

$$\Omega_{Y \times X}^1 = p^* \Omega_Y^1 \oplus q^* \Omega_X^1 \rightarrow q^* \Omega_X^1 \rightarrow q^* L^{-1}.$$

L'application composée

$$I_{Z/Y \times X} / I_{Z/Y \times X}^2 \rightarrow \Omega_{Y \times X|Z}^1 \rightarrow q^* L^{-1}|_Z$$

est nulle sur une partie dense de  $Z$  et donc identiquement nulle puisque le faisceau  $q^* L^{-1}|_Z$  est sans torsion. Il existe donc une factorisation  $\eta_Z : \Omega_Z^1 \rightarrow q^* L^{-1}|_Z$  et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{Y \times X|Z}^1 & \longrightarrow & \Omega_Z^1 \\ \downarrow & \searrow \eta_Z & \\ q^* L^{-1}|_Z & & \end{array}$$

Le lieu singulier  $Z(\eta_Z, q_Z^* L)$  est intersection schématique des fermés  $Y \times Z(\eta, L)$  et  $Z$  de  $Y \times X$ . L'application composée

$$p_Z^* \Omega_Y^1 \rightarrow \Omega_Z^1 \rightarrow q_Z^* L^{-1}$$

est nulle sur les fibres générales de  $p_Z$  et donc identiquement nulle. Le feuilletage  $(\eta_Z, q_Z^* L)$  est donc vertical relativement à  $p_Z$ , autrement dit, il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Omega_Z^1 & \longrightarrow & \Omega_{Z/Y}^1 \\ \downarrow \eta_Z & \searrow & \\ q_Z^* L^{-1} & & \end{array}$$

Le morphisme  $q_Z$  est donc birationnel.

(4.6) *Réduction au cas des surfaces.*—Soient  $B$  une courbe projective, lisse et connexe, de genre  $g(B) > 0$  et  $B \rightarrow Y$  un morphisme non constant, dont l'image rencontre le lieu des feuilles, de sorte que  $\eta_Z$  est non identiquement nulle le long d'au moins une fibre de  $p_Z$  au dessus de  $B$ . Soit  $S := B \times_Y Z \subset B \times X$ ;  $S$  est une surface irréductible et réduite (voir Lemme 4.5). Soient  $p_S$  et  $q_S$  les restrictions à  $S$  des projections de  $B \times X$  sur  $B$  et  $X$  respectivement. Le feuilletage  $(\eta, L)$  induit, comme ci-dessus, un feuilletage en courbes  $\eta_S : \Omega_S^1 \rightarrow q_S^* L^{-1}$ . Le lieu singulier  $Z(\eta_S, q_S^* L)$  est intersection schématique des fermés  $B \times Z(\eta, L)$  et  $S$  de  $B \times X$ . Soit  $L_S$  le fibré  $q_S^* L$ . Soit  $n : S^n \rightarrow S$  la normalisation de  $S$  et  $\eta_n : \Omega_{S^n}^1 \rightarrow n^* L_S^{-1}$  le relèvement de  $\eta_S : \Omega_S^1 \rightarrow L_S^{-1}$  à  $S^n$  (voir Lemme 1.2). Soit  $S' := q_S(S) \subset X$  et soit  $q_{S^n} := q_S \circ n$ . Le fibré  $L_{S^n}$  numériquement effectif et une courbe  $C \subset S^n$  est contractée par  $q_{S^n}$  si et seulement si  $L_{S^n} \cdot C = 0$ . Enfin, les courbes tracées sur  $S^n$  et contractées par  $q_{S^n}$  sont horizontales relativement à  $p_{S^n} := p_S \circ n$ . Les hypothèses de la proposition 2.1 sont satisfaites. La surface  $S^n \rightarrow B$  est donc géométriquement réglée et  $n^* L_S \cdot F \in \{1, 2\}$ , où  $F$  est une fibre générale de  $p_{S^n}$ .

1<sup>er</sup> cas :  $n^* L_S \cdot F = 2$ .—Le morphisme  $q_S \circ n$  est fini sur son image et le feuilletage  $(\eta_n, n^* L_S)$  sur  $S^n$  est régulier (voir Proposition 2.1). Supposons  $Z(\eta, L) \neq \emptyset$  et supposons que  $q_S(S) \cap Z(\eta, L) \neq \emptyset$ . Le lieu singulier  $Z(\eta_{S^n}, n^* L)$  alors non vide, puisque

$$n^{-1}((B \times Z(\eta, L))_{\text{red}} \cap S) = n^{-1}(Z(\eta_S, L_S)_{\text{red}}) \subset Z(\eta_{S^n}, n^* L_S)_{\text{red}},$$

ce qui est absurde. Le feuilletage  $(\eta, L)$  est donc régulier.

Si  $X$  est une surface normale, le morphisme  $q_Z$  est birationnel et fini : c'est un isomorphisme.

2<sup>ème</sup> cas :  $n^* L_S \cdot F = 1$ .—Les fibres du morphisme  $p_Z$  sont donc des courbes rationnelles irréductibles et génériquement réduites. Les fibres générales sont réduites et irréductibles.

Le lieu singulier  $Z(\eta_{S^n}, n^* L)$  est irréductible de dimension 1 (voir Proposition 2.1) et contracté par  $q_Z$ . Les feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  passent donc par un point  $x \in X$ . Supposons  $Z(\eta, L)_{\text{red}} \neq \{x\}$  et soit  $z \in Z(\eta, L)_{\text{red}}$  distinct de  $x$ . Supposons que  $z \in q_S(S)$ . La proposition 2.1 nous permet de supposer que l'une des feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  paramétrées par  $B$  ne passe pas par  $z$ . Soit  $b \in B$  tel que  $(b, z) \in S$ . Le point  $(b, z)$  est dans le lieu singulier  $Z(\eta_S, L_S)_{\text{red}} = (B \times Z(\eta, L)_{\text{red}}) \cap S$  et, comme

$$n^{-1}(Z(\eta_S, L_S)_{\text{red}}) \subset Z(\eta_{S^n}, n^* L_S)_{\text{red}},$$

$n^{-1}(b, z) \subset Z(\eta_{S^n}, n^* L_S)_{\text{red}}$ . Or,  $Z(\eta_{S^n}, n^* L_S)_{\text{red}}$  est contracté par  $q_S$  sur le point  $x$ , ce qui est absurde. La remarque précédente ne sera pas utilisée par la suite.

Soit  $\text{Hom}_{\text{bir}}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x)$  le schéma des morphismes birationnels de  $\mathbf{P}^1$  vers  $X$  appliquant  $0 \in \mathbf{P}^1$  sur  $x \in X$  et soit  $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x)$  sa normalisation. Le sous-groupe linéaire  $G \subset \text{PGL}(2)$  des automorphismes de  $\mathbf{P}^1$  fixant  $0$  agit sur  $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbf{P}^1, X)$  et  $\text{Hom}_{\text{bir}}^n(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x) \times \mathbf{P}^1$ . Les quotients géométriques au sens de Mumford existent et seront respectivement notés  $\text{RatCurves}^n(X, x)$

et  $\text{Univ}^{rc}(X, x)$  (voir [Ko96]).

Les feuilles du feuilletage  $(\eta, L)$  rencontrant l'ouvert  $X_{n_s} \cap X_r$  sont algébriquement équivalentes, par 4.6 par exemple, et l'une des composantes de  $\text{RatCurves}^n(X, x)$ , notée  $V$ , paramètre les fibres de  $p_Z$  au dessus d'un ouvert non vide de  $Y$ .

Le lemme de cassage de Mori entraîne d'une part que  $V$  est projective et d'autre part que le morphisme d'évaluation  $U := \text{Univ}^{rc}(X, x) \times_{\text{RatCurves}^n(X, x)} V \rightarrow X$  est génériquement fini. Le point générique de  $V$  paramètre donc une feuille du feuilletage  $(\eta, L)$  et, par suite, le morphisme précédent est en fait birationnel. Soient  $p_U$  et  $q_U$  les morphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{q_U} & X \\ p_U \downarrow & & \\ V & & \end{array}$$

Le morphisme  $p_U$  est lisse (voir [Ko96], Corollary II 2.12). Le point, au coeur de la preuve du lemme de cassage, est le résultat bien connu suivant. Si  $p : S \rightarrow B$  est une surface géométriquement réglée et  $q : S \rightarrow S'$  est un morphisme génériquement fini, il existe au plus une courbe, irréductible et réduite, tracée sur  $S$ , horizontale relativement à  $p$  et contractée par  $q$ . Les fibres du morphisme  $q_U$  sont connexes par le théorème de Zariski et, en particulier, les composantes irréductibles des fibres de  $q_U$  sont de dimension  $> 0$ . L'une des composantes de  $\Sigma := q_U^{-1}(x)$  est de codimension 1 dans  $U$ . On déduit de la remarque précédente, que le fermé  $\Sigma$  est irréductible de codimension 1 dans  $U$ , et que le morphisme  $q_U$  induit un isomorphisme de  $U - q_U^{-1}(x)$  sur  $X - \{x\}$ .

Soit  $B \subset V$  est une courbe lisse générique. La surface  $p_U^{-1}(B)$  est la normalisation de son image  $S$  dans  $B \times X$  et il existe un morphisme  $B \rightarrow Y$  tel que  $S$  s'identifie au produit fibré  $Z \times_Y B$ . La trace de  $\Sigma$  sur la surface  $p_U^{-1}(B)$  est donc l'unique section de  $p_U^{-1}(B) \rightarrow B$  contractée par  $q_U$  (voir Proposition 2.1). Le morphisme  $\Sigma \rightarrow V$  induit par  $p_U$  est donc birationnel et fini, c'est un isomorphisme.

Soit  $G := p_{U*} \mathcal{O}_U(\Sigma)$ . Le schéma  $U \rightarrow V$  s'identifie au fibré projectif  $\mathbf{P}_V(G) \rightarrow V$  et le fibré  $\mathcal{O}_U(\Sigma)$  au fibré tautologique  $\mathcal{O}_U(1)$ . La section  $\Sigma$  de  $p_U$  correspond à un quotient inversible  $M$  de  $G$  sur  $U$ . Le fibré  $F$  est une extension de  $M$  par le fibré trivial  $\mathcal{O}_V$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Soit  $\alpha$  la classe dans  $H^1(\Sigma, M^{-1})$  de cette extension. Le fibré  $q_U^* L$  est de degré 1 sur les fibres de  $p_U$  et sa restriction à  $\Sigma$  est triviale. Il est donc isomorphe au fibré  $\mathcal{O}_U(1) \otimes p_U^* M^{-1}$ .

Soit  $2\Sigma$  le deuxième voisinage infinitésimal de  $\Sigma$  dans  $U$ . La classe du fibré  $\mathcal{O}_U(1) \otimes p_U^* M^{-1}$  dans  $\text{Pic}(2\Sigma) \simeq \text{Pic}(\Sigma) \oplus H^1(\Sigma, M^{-1})$  est  $(0, \alpha)$  (voir Lemme 3.3) d'une part et nulle d'autre part. L'extension définie par  $\alpha$  est donc scindée et le morphisme  $q_U$  s'identifie à la contraction de la section de  $\mathbf{P}_V(\mathcal{O}_V \oplus M) \rightarrow V$  de fibré normal  $M^{-1}$ . La section de fibré normal trivial ne rencontre pas la section précédente, et le diviseur associé dans  $X$ , noté  $\mathcal{O}_X(V)$ , s'identifie au fibré  $L$ . ■

## Références

- [BoMc01] F. A. Bogomolov, M. L. McQuillan, *Rational curves on foliated varieties*, Preprint, IHES, 2001.
- [Bo01] J.-B. Bost, *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **93** (2001), 161-221.
- [BuWa74] D. M. Burns, J. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. **26** (1974), 67-88.
- [De01] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 2001.
- [Ha70] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics **156**, Springer-Verlag, 1970.
- [Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977.
- [Ko96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete **32**, Springer-Verlag, 1996.
- [Mi87] Y. Miyaoka, *Deformations of a morphism along a foliation and applications*, dans *Algebraic geometry-Bowdoin 1985*, Proc. Symp. Pure Math. **46-1**, 245-268, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Sc00] S. Schröer, *On contractible curves on normal surfaces*, J. Reine. Angew. Math. **524** (2000), 1-15.
- [Se66] A. Seidenberg, *Derivations and integral closure*, Pacific J. Math. **16** (1966), 167-173.
- [Wa83] J. Wahl, *A cohomological characterization of  $\mathbf{P}^n$* , Invent. Math. **72** (1983), 315-322.

Stéphane DRUEL, INSTITUT FOURIER, UMR 5582 du CNRS, Université Joseph Fourier, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France.

e-mail : [druel@ujf-grenoble.fr](mailto:druel@ujf-grenoble.fr)