Existence globale pour les systèmes de Maxwell-Bloch

Éric Dumas

Prépublication de l'Institut Fourier n° 596 (2003)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Résumé[1 2] **:** Les équations de Maxwell-Bloch modélisent la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel décrit de façon quantique. Pour le problème de Cauchy, dans le cas d'un nombre quelconque de niveaux quantiques, on montre l'existence de solutions faibles (L^2) globales. Avec un champ électromagnétique initial plus régulier (rotationnels L^2), on a unicité de la solution.

Les équations de Maxwell-Bloch modélisent la propagation d'une onde électromagnétique (champ électrique E, champ magnétique H) dans un milieu matériel décrit par N niveaux quantiques grâce à la matrice densité ρ [10]:

$$\begin{cases} \mu\partial_t H + \operatorname{rot} E = 0, \\ \varepsilon\partial_t E - \operatorname{rot} H = -\partial_t P, \\ i\partial_t\rho = [\Omega - E\cdot\Gamma,\rho]. \end{cases} \tag{1}$$

Les variables d'espace-temps sont $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+3}$, les champs E et H sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les constantes μ et ε, strictement positives, sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique. Le couplage s'effectue via la polarisation P du milieu, champ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ donné par la loi constitutive :

$$P = \operatorname{Tr}(\Gamma\rho),$$

où Γ, l'opérateur moment dipolaire électrique, est donné par le matériau, et est une matrice $N \times N$ hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}^3$. La matrice Ω, de taille $N \times N$, hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}$, représente le hamiltonien libre du système matériel (en l'absence de champ électromagnétique). La matrice densité ρ est hermitienne –et positive, de taille $N \times N$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. mots-clés : équations de Maxwell, équation de Bloch, compacité par compensation
2. AMS/MSC : 35L45, 35Q60

Dans la base des états propres du système, son $n$ième terme diagonal est la proportion d'états quantiques situés dans le $n$ième niveau d'énergie (ainsi, $\rho_{nn} \geq 0$, et $\sum_n \rho_{nn} = 1$ dans le matériau), et le terme extra-diagonal ρ_{jk} est lié à la probabilité de transition du niveau j vers le niveau k.

Enfin, il faut rajouter à ces équations les lois de conservation du courant et de la charge :

$$\text{div } H = 0, \ \ \text{div } (\varepsilon E + P) = 0 \tag{2}$$

(qui sont –au moins formellement– satisfaites pour tout temps dès lors qu'elles le sont initialement).

Le système (1) est symétrique hyperbolique, si bien que, pour des données initiales assez régulières ($H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s > 3/2$), on a existence locale des solutions, sur un intervalle de temps dépendant *a priori* de la taille des données initiales. Dès lors, deux questions se posent :

Q1) Y a-t-il existence globale de ces solutions ? Cette question est motivée en particulier par le fait que les échelles de temps pertinentes en optique sont "longues" [9].

Q2) Y a-t-il des solutions globales ayant la régularité "naturelle" donnée par la proposition 0.1 ci-dessous, qui indique la seule énergie $\mathcal{E}$ connue qui puisse être contrôlée pour ce système ?

Définition 0.1. *On note L_0 l'espace des $U = (E,B,\rho) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conservations (2), et on appelle* solution d'énergie *tout $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L_0)$ solution de (1) au sens des distributions.*

Par des estimations d'énergie classiques, on obtient la

Proposition 0.1. *On suppose $\Gamma,\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.*
Si $U = (E,B,\rho)$ est une solution d'énergie de (1), alors :
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho(t,x)| := (\mathrm{Tr}\,(\rho(t,x)^2))^{1/2}$ est constante en t.
(ii) Il existe $C = C(\|\Omega\|_{L^\infty},\|\Gamma\|_{L^\infty},\|\rho\|_{L^\infty})$ telle que, pour tout temps t,

$$\mathcal{E}(t) := \|\sqrt{\varepsilon}E(t)\|^2_{L^2} + \|\sqrt{\mu}H(t)\|^2_{L^2} + \|\rho(t)\|^2_{L^2} \leq e^{Ct}\mathcal{E}(0).$$

Remarque 0.1. *i) Question subsidiaire : les solutions d'énergie étant des solutions faibles, a-t-on unicité pour une telle classe de solutions ? Sinon, quelle régularité doit-on imposer aux données pour l'obtenir ?*
ii) Le choix de considérer que $\rho(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ peut paraître surprenant, compte tenu de $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$, mais il faut bien penser que cette identité n'est valable que dans le matériau, et que si celui-ci est fini, le support de ρ doit être considéré

comme compact.
iii) La proposition 0.1 reste valable lorsque $\varepsilon,\mu \in L^\infty_x(\mathbb{R}^3)$*, mais nous ne savons pas prouver l'existence des solutions d'énergie dans ce cas.*

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques résultats sur ce problème :
• Pour les systèmes de Maxwell-Bloch à deux niveaux ($N = 2$), Donnat et Rauch [2] ont obtenu l'existence globale des solutions $H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s \geq 2$, par des estimations d'énergie et de type Yudovich, et des arguments usuels de prolongement (type EDO). La spécificité du cas à deux niveaux tient au fait que l'équation de Bloch sur la matrice densité peut être réécrite comme un système portant sur la polarisation P et sur $n := \rho_{11} - \rho_{22}$, la différence de population entre les deux niveaux :

$$\begin{cases} \partial_t^2 P + \dfrac{1}{T_1}\partial_t P + \omega^2 P = C_1 n E, \\ \partial_t n + \dfrac{n - n_0}{T_2} = -C_2 \partial_t P \cdot E. \end{cases}$$

La structure particulière des non-linéarités entraîne des compensations, menant à la conservation (exacte) d'une énergie de type L^2, et au contrôle d'une énergie H^1.
• Pour le système de Maxwell dans un matériau ferromagnétique, où $M(t,x)$ est la magnétisation du milieu,

$$\begin{cases} \mu \partial_t H + \operatorname{rot} E = -\partial_t M, \\ \varepsilon \partial_t E - \operatorname{rot} H = 0, \\ \partial_t M = \alpha \left(M \wedge H + \dfrac{\beta}{|M|} M \wedge (M \wedge H) \right), \end{cases}$$

Joly, Métivier et Rauch [6] ont montré l'existence globale des solutions d'énergie (solutions faibles), ainsi que la propagation de la régularité H^s ($s > 0$) de la partie à divergence nulle des champs, et l'unicité dans le cas des solutions fortes (rotationnel L^2) en dimension trois d'espace, pour des coefficients constants. Haddar [5] a obtenu des résultats similaires en deux dimensions d'espace, avec une permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ $-\mu$ joue un rôle analogue, mais est constant dans les matériaux "physiques".

Ces démonstrations reposent sur la structure géométrique des non-linéarités ($M.\partial_t M = 0$), qui donne des estimations *a priori* (L^2 pour les champs E et H, ponctuelles pour M) analogues à celles de la proposition 0.1, et sur la compatibilité de ces non-linéarités avec la partie différentielle du système : le découpage des champs en partie à rotationnel nul et partie à divergence nulle permet d'utiliser la compacité par compensation. Enfin, l'unicité repose sur des estimations de Strichartz "précisées" pour l'équation des ondes, dans le cas limite $\Box u \in L^1_t(L^2_x)$.

Nous allons suivre la même stratégie avec les équations de Maxwell-Bloch à nombre de niveaux N quelconque (fini), en dimension trois d'espace, pour montrer :

Théorème 0.1. *Soit $\Omega,\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ($\varepsilon,\mu =$ cstes). Si $U_0 \in L_0$, il existe une solution d'énergie (globale) U de (1) ayant U_0 pour donnée initiale.*

Théorème 0.2. *Si de plus* $\mathrm{rot}\, E_0,\mathrm{rot}\, H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, *alors* $\mathrm{rot}\, E,\mathrm{rot}\, H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$, *et U est unique.*

Remarque 0.2. *i) On peut généraliser ces résultats à d'autres types de non-linéarités. Un cas simple, et physiquement pertinent, correspond à l'ajout de "relaxations transverses" [1] : $i\partial_t\rho = [\Omega - E\cdot\Gamma,\rho] - i\gamma\rho_{nd}$, où ρ_{nd} est la partie hors diagonale de ρ, et γ une constante positive. Dans ce cas, l'estimation ponctuelle de la proposition 0.1 est remplacée par $|\rho(t,x)| \le |\rho(0,x)|$, suffisant pour tout ce qui suit.*
ii) Une extension intéressante consisterait à prendre ε variable. On peut aussi s'intéresser au cas d'un nombre infini de niveaux ($N = \infty$), avec $\rho(t,x) \in l^2(\mathbb{N}^2)$; nous ne savons pas écrire les estimations d'énergie correspondantes.

Dans ce qui suit, on considèrera que $\varepsilon = \mu = 1$.

1 Preuve du théorème 0.1 : existence des solutions d'énergie

1.1 Régularisation

On utilise le multiplicateur de Fourier S^λ, de symbole $\chi_\lambda := \chi(./\lambda)$, où la fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3,[0,1])$ vaut 1 si $|\xi| \le 1/2$, et 0 si $|\xi| \ge 1$. Ainsi, S^λ est continu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, de norme 1,
de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, de norme $\lambda^{3/2}$,
de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans $L^p(\mathbb{R}^3)$,$1 \le p < \infty$, de norme $\|\hat{\chi}\|_{L^1}$.

Soit $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont la transformée de Fourier a un support contenu dans $\{|\xi| \le \lambda\}$.

On définit alors U^λ par $U^\lambda_{|t=0} = (S^\lambda E_{|t=0}, S^\lambda B_{|t=0}, \rho_{|t=0})$ et

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t H^\lambda + \mathrm{rot}\, E^\lambda = 0, \\ \partial_t E^\lambda - \mathrm{rot}\, H^\lambda = -\partial_t S^\lambda \mathrm{Tr}\,(\Gamma \rho^\lambda), \\ i\partial_t \rho^\lambda = [\Omega - E^\lambda \cdot \Gamma, \rho^\lambda], \end{array}\right. \tag{3}$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une équation différentielle $\partial_t U^\lambda = G^\lambda(U^\lambda)$, avec G^λ continu sur $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ (grâce à la troncature en fréquence et au fait que $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$) et localement lipschitzien (car polynomial). La théorie classique des EDO sur les Banach et les estimations d'énergie usuelles donnent alors :

Proposition 1.1. *Pour tous $U_0 \in L_0$ et $\lambda \geq 1$, il existe un unique $U^\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$ solution de (3) et il existe une constante $C = C(\|\Omega,\Gamma,\rho_0\|_{L^\infty})$ telle que :*
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho^\lambda(t,x)| = |\rho_0(x)|$ pour tout temps t.
(ii) Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, $\mathrm{div}\ H^\lambda = 0,\ \ \mathrm{div}\ (E^\lambda + S^\lambda \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\lambda)) = 0$.
(iii) Pour tout temps t, $\mathcal{E}(U^\lambda(t)) \leq e^{Ct}\mathcal{E}(U_0)$.

Grâce à ces conservations, on peut extraire une suite de λ telle que U^λ converge vers un certain U^∞, faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ (et faible-$\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, pour ρ^λ). Dans ce qui suit, on notera $\Omega_T := [0,T] \times \mathbb{R}^3$.

1.2 Convergence forte

Pour passer à la limite dans les termes non linéaires, on montre que la convergence vers U^∞ s'effectue en fait dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, pour tout $T \geq 0$. Pour la matrice densité, on forme la différence des équations de Bloch sur ρ^λ et ρ^μ, et on multiplie scalairement par $(\rho^\lambda - \rho^\mu)$:

$$i\partial_t(\rho^\lambda - \rho^\mu) = [(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma, \rho^\lambda] + [\Omega - E^\infty\cdot\Gamma, \rho^\lambda - \rho^\mu] + [(E^\mu - E^\infty)\cdot\Gamma, \rho^\mu],$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \mathrm{Tr}\,\big((\rho^\lambda - \rho^\mu)^2\big) = &- i\mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma, \rho^\lambda](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big) \\ &+ i\mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\mu)\cdot\Gamma, \rho^\mu](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big), \end{aligned} \tag{4}$$

en utilisant l'identité $\mathrm{Tr}\,(A[A,B]) = 0$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. On ne sait pas encore que E^λ converge fortement vers E^∞. Par contre, la proposition suivante –que l'on démontrera à la fin du paragraphe– donne une majoration des produits du membre de droite de (4) dans un espace à poids :

Proposition 1.2. *Il existe une constante $C = C(\|\Gamma\|_{L^\infty},\|\rho_0\|_{L^\infty},T)$ et, pour tout $\delta > 0$, un nombre $N = N(\delta,T)$, tels que, si $\lambda,\mu \geq N$, pour $t \in [0,T]$,*

$$\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(\delta + \int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\infty)(t')\|_{L^2}^2 dt'\right).$$

On peut alors conclure sur la convergence de la matrice densité :
1) La convergence de $\rho^\mu(t)$ a lieu pour tout t dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ faible, par le théorème d'Ascoli, l'équicontinuité étant obtenue par l'équation de Bloch.
2) À t fixé, passant à la limite dans l'inégalité à poids de la proposition 1.2, et par le lemme de Gronwall, on obtient la convergence forte de ρ^λ vers ρ^∞ dans $L^2(\Omega_T,e^{-|x|^2}dtdx)$.
3) Ceci entraîne (à extraction de sous-suite près) la convergence de ρ^λ presque partout sur Ω_T, et les estimations ponctuelles de la proposition 1.1 impliquent la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$, par convergence dominée. Grâce à l'équicontinuité de la suite, la convergence a en fait lieu dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$.

Concernant les champs E et H, en écrivant le système satisfait par la différence $\delta U := U^\lambda - U^\infty$, on a par estimation d'énergie :

$$\|\delta E,\delta H\|_{L^2}(t) \leq C \int_0^t \|\delta F(t')\|_{L^2} dt',$$

avec le second membre (obtenu en passant à la limite dans les termes non-linéaires grâce à la convergence forte de ρ^λ) :

$$\delta F = i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[\Omega,\delta\rho]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma,\rho^\lambda]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[E^\infty\cdot\Gamma,\delta\rho]).$$

1) Le premier terme converge vers 0 dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, comme $\delta\rho$.
2) De même, le dernier terme converge vers 0 dans $L^1(\Omega_T)$, donc presque partout (à extraction d'une sous-suite près), et à nouveau, l'estimation L^∞ sur ρ^λ montre la convergence dans $L^2(\Omega_T)$, par convergence dominée.
3) Enfin, le deuxième terme est majoré par $C\|\rho\|_{L^\infty}\|\delta E(t')\|_{L^2}$.
On obtient finalement $\|\delta E,\delta H\|_{L^2}(t) \leq C(\int_0^t \|\delta E(t')\|_{L^2}dt' + o(1))$ quand $\lambda \to \infty$, et le lemme de Gronwall montre que $\delta E,\delta H \to 0$ dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$.

Preuve de la proposition 1.2 :

On multiplie (4) par $e^{-2|x|^2}$, et on intègre sur Ω_t :

$$\begin{aligned}\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|_{L^2}^2 = -i \iint e^{-2|x|^2}\big(&\mathrm{Tr}\left([(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma,\rho^\lambda](\rho^\lambda - \rho^\mu)\right)\\ &+ \mathrm{Tr}\left([(E^\infty - E^\mu)\cdot\Gamma,\rho^\mu](\rho^\lambda - \rho^\mu)\right)\big)dxdt'.\end{aligned}$$

Introduisons alors les multiplicateurs de Fourier $\pi_\|$ et $\pi_\perp$, de symboles respectifs $(\xi/|\xi|,.)\xi/|\xi|$ et $(\xi/|\xi|\wedge.)\wedge\xi/|\xi|$, homogènes de degré zéro. Ces opérateurs sont donc continus de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même, pour tout p fini [11]. Ce sont les projecteurs orthogonaux (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) sur les champs de vecteurs à rotationnel nul et à divergence nulle, respectivement (décomposition de Hodge). La condition de divergence (2) entraîne :

$$\pi_\| E^\nu = -\pi_\| S^\nu \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\nu), \text{ et } \pi_\| E^\infty = -\pi_\| \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\infty).$$

Quant à la partie sans divergence de E^ν, par les équations de Maxwell, elle est solution d'une équation d'onde :

$$(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\nu = -\partial_t^2 \pi_\perp S^\nu P^\nu.$$

On a alors la majoration de $\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|_{L^2}^2$ par la somme de deux termes ($\nu = \lambda$ ou μ) s'écrivant chacun, grâce à la décomposition de Hodge :

$$\begin{aligned} & C(\Gamma,\rho) \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} |\rho^\lambda - \rho^\mu|\ |S^\nu \pi_\| \mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu - \rho^\infty))| dx dt' \\ & \qquad + \left| \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu) \pi_\perp (E^\infty - E^\nu) dx dt' \right|. \end{aligned} \tag{5}$$

1) Dans le dernier terme, Q est quadratique en (ρ^λ,ρ^μ). Ainsi, $Q(\rho^\lambda,\rho^\mu)$ et $\pi_\perp(E^\infty - E^\nu)$ sont bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$. La famille d'applications $t \mapsto \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt'$ est donc uniformément (en ν) équicontinue sur $[0,T]$, et il suffit de montrer l'inégalité de la proposition à t fixé. De plus, comme le poids $e^{-2|x|^2}$ tend vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, pour $R = R(\delta)$,

$$\left| \iint_{[0,t]\times\{|x|>R\}} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt' \right| \leq \delta.$$

Sur le compact $[0,t]\times\{|x| \leq R\}$, on utilise la compacité par compensation [3], [12] : comme les variétés caractéristiques

$$\mathcal{C}_{\partial_t} := \{\tau = 0\} \setminus \{0\} \text{ et } \mathcal{C}_\Box := \{\tau^2 - |\xi|^2 = 0\} \setminus \{0\}$$

sont disjointes, il suffit de vérifier que
- $e^{-|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)$ et sa dérivée temporelle sont bornés dans $L^2(\Omega_T)$;
- $\pi_\perp(E^\nu - E^\infty)$ est borné dans $L^2(\Omega_T)$, et $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\nu$, égal à $i\partial_t \pi_\perp S^\nu \mathrm{Tr}\,(\Gamma\cdot$

$[\Omega - E^\nu.\Gamma,\rho^\nu]$), est borné dans $H^{-1}(\Omega_T)$. À la limite, cela est vrai aussi pour $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\infty$, et donc finalement pour $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp(E^\nu - E^\infty)$. Par conséquent,

$$\iint_{[0,t]\times\{|x|\leq R\}} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu)dxdt' \underset{\lambda,\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) On majore le premier terme par

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\iint_{\Omega_t} e^{-|x|^2}\big|\rho^\lambda - \rho^\mu|\ |[S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]\mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu - \rho^\infty))\big|dxdt' \\ &+ \iint_{\Omega_t} e^{-|x|^2}\ \Big|\rho^\lambda - \rho^\mu|\ |S^\nu\pi_\| e^{-|x|^2}\mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu - \rho^\infty))\Big|\ dxdt'.\end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro quand $\nu \to \infty$ grâce au lemme suivant ([6], lemme 4.3) :

Lemme 1.1. *Pour tout $p > 2$, les opérateurs $[S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]$ sont compacts de $(L^2 \cap L^p)(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, uniformément en ν :*
Si $u^\nu \rightharpoonup 0$ dans $(L^2 \cap L^p)(\mathbb{R}^3)$ faible, $\quad [S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]u^\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.*

On peut donc majorer (6) par

$$C\left(\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t')\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\nu - \rho^\infty)(t')\|_{L^2}^2 dt' + o(1)\right).$$

3) Rassemblant les estimations de 1) et 2), on majore (5) par

$$C\left(\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t')\|_{L^2}^2 dt' + \int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\infty)(t')\|_{L^2}^2 dt' + o(1)\right),$$

et le lemme de Gronwall conclut la preuve de la proposition 1.2.

2 Preuve du théorème 0.2 : solutions régulières et unicité

2.1 Propagation de la régularité $H(rot)$

On va montrer que lorsque $\mathrm{rot}\, E$ et $\mathrm{rot}\, H$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ initialement, ils le restent pour tout temps. L'idée est d'utiliser les équations de Maxwell pour convertir les dérivées spatiales en dérivées temporelles : $\mathrm{rot}\, E = -\partial_t H$, et ce dernier est contrôlé par estimation d'énergie sur le système de Maxwell dérivé par rapport à t. Enfin, si $u \in L^2$, dire que $\mathrm{rot}\, u \in L^2$ équivaut à dire que la partie sans divergence $u_\perp$ de u est H^1, donc, ρ étant déjà connu, on écrit le système des équations de Maxwell comme un système linéaire portant sur $u := (E_\perp, H_\perp) = (u_1, u_2)$:

$$Lu = \Pi B u + \Pi f, \tag{7}$$

$$\text{avec :} \quad L = \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & -\pi_\perp \mathrm{rot} \\ \pi_\perp \mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}, \; \Pi = \begin{pmatrix} \pi_\perp & 0 \\ 0 & \pi_\perp \end{pmatrix},$$

$$Bu = \begin{pmatrix} i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[u_1 \cdot \Gamma, \rho]) \\ 0 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 0 \\ i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[\Omega + \pi_\parallel \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho) \cdot \Gamma, \rho]) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, B est une matrice 6×6 à coefficients $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, ainsi que leur dérivée temporelle, et $f, \partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^3))$ pour tout $p < \infty$. De plus, L, restreint à $\mathrm{I}m\,\Pi$, est symétrique hyperbolique, donc le problème de Cauchy associé à (7) pour une donnée initiale $u_0 = \Pi u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ admet une unique solution $u = \Pi u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$.

Proposition 2.1. *Si $f, \partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, et si les coefficients de B et $\partial_t B$ sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, pour tout $u_0 = \Pi u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, la solution u du problème de Cauchy associé à (7) est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^3))$.*

Preuve : Fixons $T > 0$. On sait que u est la limite, dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, de la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u^0 = u_0$ et $u^{n+1} = \mathcal{T} u^n$, où $\mathcal{T} v =: w$ est la solution de $Lw = \Pi B v + \Pi f$, $w_{|t=0} = u_0$.

Commençons par l'équation avec terme source, $Lw = \Pi f \in L^1([0,T], L^2)$. Par l'estimation d'énergie classique, on a

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq \|w(0)\|_{L^2} + 2 \int_0^t \|f(t')\|_{L^2} dt'.$$

De plus, $L = \partial_t + iP(D_x)$, avec $P(D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole ayant des valeurs propres $\pm|\xi|$ de multiplicité constante. Notant $\pi_\pm$ les projecteurs associés, on a la décomposition

$$w = w_+ + w_-, \quad \text{où} \;\; \widehat{w_\pm}(t, \xi) = e^{\pm it|\xi|} \pi_\pm \hat{w}_0(\xi) + \int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|} \pi_\pm \hat{f}(t', \xi) dt'.$$

Lorsque $f \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t f \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, on peut intégrer par parties :

$$\frac{1}{i}\widehat{\partial_x w_\pm}(t,\xi) = e^{\pm it|\xi|}\xi\pi_\pm\widehat{w_0}(\xi) \\ \pm i\left[e^{\pm i(t-t')|\xi|}\pi_\pm\hat{f}(t',\xi)\right]_0^t \pm i\int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|}\frac{\xi}{|\xi|}\pi_\pm\widehat{\partial_t f}(t',\xi)dt'.$$

On obtient ainsi

$$\|\partial_x w(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_x w(0)\|_{L^2} + 2\|f\|_{\mathcal{C}(L^2)} + 2\int_0^t \|\partial_t f(t')\|_{L^2}dt'. \tag{8}$$

De plus, l'équation $\partial_t w = -iP(D_x)w + \Pi f$ implique

$$\|\partial_t w(t)\|_{L^2} \leq C\|\partial_x w(t)\|_{L^2} + \|f(t)\|_{L^2}. \tag{9}$$

Dans le cas où $Lw = \Pi Bv + \Pi f$ avec $v \in \mathcal{C}([0,T],H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T],L^2)$, d'après (8) et (9), pour assurer que w est dans le même espace, il suffit de contrôler $\partial_t(Bv)$ (on a bien $Bv \in L^1(L^2)$). Or, à t fixé,

$$\begin{aligned} \|\partial_t(Bv)\|_{L^2} &\leq \|(\partial_t B)v\|_{L^2} + \|B\partial_t v\|_{L^2} \\ &\leq \|\partial_t B\|_{L^3}\|v\|_{L^6} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial_t B\|_{L^3}\|\partial_x v\|_{L^2} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Les estimations (8), (9) et (10) prouvent que $\mathcal{T}$ est continu de $\mathcal{C}([0,T],H^1)\cap \mathcal{C}^1([0,T],L^2)$ dans lui-même. En procédant de même avec la différence $u^{n+1} - u^n$, on obtient, pour $n \geq 1$:

$$\|\partial_{t,x}(u^{n+1} - u^n)(t)\|_{L^2} \leq C\Big(\|u^n - u^{n-1}\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} \\ + \int_0^t \|\partial_{t,x}(u^n - u^{n-1})(t')\|_{L^2}dt'\Big).$$

Pour T_1 assez petit ($CT_1 < 1/2$, qui ne dépend pas de la donnée initiale, mais seulement de B), cette inégalité entraîne que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T_1],H^1)\cap\mathcal{C}^1([0,T_1],L^2)$. En réitérant sur $[T_1,2T_1]$, $[2T_1,3T_1]$,..., on a la convergence sur tout $[0,T]$.

2.2 Unicité

Supposons que U_1 et U_2 sont deux solutions d'énergie de (1) pour la même donnée initiale, et telles que $\operatorname{rot} E_j, \operatorname{rot} H_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, $j = 1,2$. On peut écrire, par différence, le système satisfait par $\delta U := U_2 - U_1$ sous la forme synthétique

$$M(\delta U) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\mathrm{Tr}\,(\Gamma \delta F) \\ \delta F \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta F = i[(E_2 - E_1)\cdot\gamma, \rho_2] - i[\Omega - E_1\cdot\gamma, \rho_2 - \rho_1].$$

Lorsque les champs électriques E_j sont dans $L^\infty(\Omega_T)$, on a, par estimation d'énergie, $\|\delta U(t)\|_{L^2} \leq e^{Ct}\|\delta U(0)\|_{L^2}$, qui implique l'égalité de $U_1(t)$ et $U_2(t)$ pour $t \in [0,T]$ si $\delta U(0) = 0$ (et en fait, la propriété plus forte de stabilité dans L^2 ; voir [6]).

Pour de telles solutions d'énergie, on ne dispose cependant pas de l'estimation *a priori* $E \in L^\infty(\Omega_T)$. Elle est vraie lorsqu'on tronque E en fréquence. On estime donc l'erreur commise dans cette troncature, par un analogue du lemme 6.2 de [6] :

Lemme 2.1. *Soit U une solution d'énergie de (1) telle que* $\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$. *Alors, pour tous $T > 0$, $\lambda \geq e$, il existe $E^\lambda \in L^\infty(\Omega_T)$, $\alpha_\lambda \in L^2(0,T)$, $\beta_\lambda \in L^\infty(0,T)$, $C > 0$ tels que, pour tout $t \in [0,T]$:*

$$\begin{aligned}
&\|E^\lambda(t)\|_{L^\infty} \leq \alpha_\lambda + \beta_\lambda \quad \textit{et} \quad \|(E - E^\lambda)(t)\|_{L^2} \leq C/\lambda, \\
&\textit{avec} \quad \|\alpha_\lambda\|_{L^2} \leq C\sqrt{\ln \lambda}, \quad \|\beta_\lambda\|_{L^\infty} \leq C \ln \lambda.
\end{aligned}$$

On a ainsi la majoration

$$\begin{aligned}
\|\delta F(t)\|_{L^2} \leq C(\Gamma,\Omega)\Big(&\|\delta E(t)\|_{L^2} + \|\delta\rho(t)\|_{L^2} + (\alpha_\lambda + \beta_\lambda)\|\delta\rho(t)\|_{L^2} \\
&+ \frac{1}{\lambda}\|\delta\rho(t)\|_{L^\infty}\Big) \\
\leq C(\Gamma,\Omega)\,&((1 + \alpha_\lambda + \beta_\lambda)\|\delta U(t)\|_{L^2} + 1/\lambda)\,,
\end{aligned}$$

et l'estimation d'énergie, puis le lemme de Gronwall, donnent :

$$\|\delta U(t)\|_{L^2} \leq C\frac{t}{\lambda} e^{C\int_0^t (1+\alpha_\lambda+\beta_\lambda)(t')dt'}.$$

Comme $\int_0^t (1 + \alpha_\lambda + \beta_\lambda)(t')dt' \leq C(T)\ln\lambda$, avec $C(T) \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit, en faisant tendre λ vers l'infini, que $\delta U(t)$ est nul sur $[0,T_0]$, pour T_0 assez petit. On conclut en répétant cette opération sur des intervalles de taille T_0.

Preuve du lemme 2.1 :

On veut extraire de E un terme L^∞, qui soit une bonne approximation de E dans L^2. Commençons par la décomposition de Hodge :

$$E = \pi_\perp E + \pi_\parallel E = \pi_\perp E - P_\parallel,$$

où la partie irrotationnelle de la polarisation s'écrit $P_\parallel = \pi_\parallel \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho)$.
1) Pour estimer $P_\parallel$, on utilise que pour p fini, $\pi_\parallel$ est continu de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même, avec une norme majorée par $C_0 p$, pour une certaine constante C_0 (voir [11]). On en déduit la majoration :

$$\|P_\parallel(t)\|_{L^p} \leq C_0\ p\ \|\rho(t)\|_{L^2\cap L^\infty} \leq C_0\ p\ \|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty},$$

grâce à la conservation ponctuelle de $|\rho|$. On définit alors $P_\parallel^\lambda$ par :

$$P_\parallel^\lambda(t,x) := \left|\begin{array}{l} P_\parallel(t,x) \text{ si } |P_\parallel(t,x)| \leq C\ln\lambda \text{ (où } C \text{ est une constante à choisir),} \\ 0 \text{ sinon,} \end{array}\right.$$

si bien qu'on a

$$\begin{aligned} \|(P_\parallel - P_\parallel^\lambda)(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\{|P_\parallel|\geq C\ln\lambda} |P_\parallel(t)|^2 dx \\ &\leq (C\ln\lambda)^{2-p}\|P_\parallel(t)\|_{L^p}^p \\ &\leq \frac{(C_0\ p\ \|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty})^p}{(C\ln\lambda)^{p-2}} = \left(C\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

en choisissant $C := 2eC_0\|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty}$, $p := 2\ln\lambda$. Cette quantité est bien majorée par C'/λ, pour $\lambda \geq e$ (et on pose $\beta_\lambda(t) := \|P_\parallel^\lambda\|_{L^\infty} \leq C\ln\lambda$).
2) Concernant $\pi_\perp E$, il vérifie l'équation d'onde

$$(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E = i\pi_\perp \mathrm{Tr}\ (\Gamma\cdot(i[\Omega - E\cdot\Gamma,[\Omega - E\cdot\Gamma,\rho] - [\partial_t E\cdot\Gamma,\rho]))\,.$$

Le second membre est majoré, à une constante multiplicative près, par $|\rho| + |E| + |E|^2 + |\partial_t E|$. Or, $\partial_t E = \mathrm{rot}\ H - \partial_t P \in \mathcal{C}([0,T],L^2)$. Les deux premiers termes, ρ et E, sont également dans cet espace. Enfin, $|E|^2$ aussi, car $E = \pi_\perp E + \pi_\parallel E \in \mathcal{C}([0,T],H^1) + \mathcal{C}([0,T],L^4) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T],L^4)$ par injection de Sobolev.

L'idée est alors d'utiliser une estimation de Strichartz pour contrôler $\|\pi_\perp E\|_{L^2(L^\infty)}$ par $\|\Box\pi_\perp E\|_{L^1(L^2)}$. C'est malheureusement le cas limite interdit : on ne peut contrôler les normes $L^r(L^p)$ que pour p fini [4], [8], [7]. On contourne cette difficulté en tronquant en fréquence ([6], proposition 6.3) :

Proposition 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\lambda, T > 0$ et $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^3))$,*

$$\|S^\lambda u\|_{L^2([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\sqrt{\ln(1+\lambda T)}\Big(\|\partial_{t,x}u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Box u\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))}\Big).$$

On termine la preuve en posant $E^\lambda := S^\lambda \pi_\perp E + P_\parallel^\lambda$:
avec $\alpha_\lambda(t) := \|S^\lambda \pi_\perp E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, on a $\|\alpha_\lambda\|_{L^2} \leq C\sqrt{\ln \lambda}$ par la proposition 2.2, et

$$\begin{aligned}
\|(\pi_\perp E - S^\lambda \pi_\perp E)(t)\|_{L^2} &\leq \|\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq\lambda\}}\widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|\frac{(1+|\xi|^2)^{1/2}}{(1+\lambda^2)^{1/2}}\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq\lambda\}}\widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C}{(1+\lambda^2)^{1/2}}\|\mathrm{rot}\, E\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)}.
\end{aligned}$$

Éric Dumas, INSTITUT FOURIER,
Laboratoire de Mathématiques, UMR5582 (UJF-CNRS),
BP 74, 38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France),
edumas@ujf-grenoble.fr

Références

[1] B. Bidégaray, A. Bourgeade and D. Reignier. *Introducing physical relaxation terms in Bloch equations.* Journal of Computational Physics, 170, 603-613, 2001.

[2] P. Donnat and J. Rauch. *Global solvability of the Maxwell-Bloch equations from nonlinear optics.* Arch. Ration. Mech. Anal., 136(3), 291-303, 1996.

[3] P. Gérard. *Microlocal defect measures.* Communications in Partial Differential Equations, 16, 1761–1794, 1991.

[4] J. Ginibre and G. Velo. *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation.* Journal of Functional Analysis, 133, no. 1, 50–68, 1995.

[5] H. Haddar. *Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : couches minces et homogénéisation.* Thèse INRIA-École Nationale des Ponts et Chaussées, 2000.

[6] J.L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. *Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium.* Annales Henri Poincaré, 1, no. 2, 307–340, 2000.

[7] H. Lindblad. *Counterexamples to local existence for semilinear wave equations.* American Journal of Mathematics, 118, no. 1, 1–16, 1996.

[8] H. Lindblad and C.D. Sogge. *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations.* Journal of Functional Analysis, 130, 357–426, 1995.

[9] A.C. Newell and J.V. Moloney. *Nonlinear optics.* Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1992.

[10] R. Pantell and H. Puthoff. *Fundamentals of quantum electronics.* Wiley and Sons Inc., N.Y., 1969.

[11] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, 1970.

[12] L. Tartar. *H-measures, a new approach for studying homogeneization, oscillations and concentrations effects in partial differential equations.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 115(A), 193–230, 1990.