UN LEMME DE MARGULIS SANS COURBURE ET SES APPLICATIONS

par Gérard BESSON, Gilles COURTOIS et Sylvestre GALLOT

Prépublication de l'Institut Fourier n$^{\mathrm{o}}$ 595 (2003)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

0. Introduction

Le *rayon d'injectivité en un point y (noté* $\mathrm{inj}(y)$*)* d'une variété riemannienne (Y, g) est défini comme le supremum des rayons des boules de l'espace euclidien tangent $(T_y Y, g_y)$ (centrées à l'origine) sur lesquelles l'application exponentielle $\exp_y$ est injective. Le célèbre « lemme » de Margulis peut s'énoncer, sous sa forme la plus géométrique, comme suit :

0.1. Théorème (G.A. Margulis, cf. par exemple [B-Z], § 37 et [B-K], Proposition 2.5.3). *Sur toute variété riemannienne compacte* (Y, g) *de dimension* n $(n \geq 2)$*, dont la courbure sectionnelle (notée* σ*) vérifie* $-K^2 \leq \sigma < 0$ *(où* K *est une constante positive arbitraire), on a :*

$$\sup_{y\in Y} \mathrm{inj}(y) \geq \frac{C_2(n)}{K}\,, \quad \mathrm{Vol}(Y, g) \geq \frac{C_1(n)}{K^n}\,,$$

où $C_1(n)$ *et* $C_2(n)$ *sont des constantes universelles qui ne dépendent que de la dimension.*

Dans le cas de courbure constante, ce théorème peut aussi se déduire de l'inégalité de Jørgensen (voir par exemple [Bn], § 5.4). La partie « minoration du volume » du théorème 0.1 fut par la suite améliorée, dans le même esprit, par différents auteurs ; citons par exemple le

0.2. Théorème (M. Gromov, [Gr 3], p. 222). — *Si une variété riemannienne* (Y, g)*, de dimension n, de courbure de Ricci minorée par* $-(n-1)K^2$*, admet une application*

Mots-clés : entropie, croissance des groupes, groupes libres, théorèmes de compacité.
Classification math. : 53C20, 53B21, 53C24, 53C25.

propre de degré non nul sur une variété X de volume fini et de courbure sectionnelle négative pincée, il existe un point y de Y tel que $\mathrm{Vol}[B_g(y,1)] \geq \frac{C_1(n)}{K^n}$*, où* $C_1(n)$ *est une constante universelle qui ne dépend que de n.*

Dans la minoration du rayon d'injectivité (Théorème 0.1) le recours à l'hypothèse «$\sigma < 0$» semble indispensable, au vu du contre-exemple classique donné par la variété $Y = M \times \mathbb{T}^k$, où M est une variété de dimension $n - k$, munie d'une métrique g' de courbure négative pincée, et où $\mathbb{T}^k$ ($k \geq 1$) est le tore, muni d'une métrique plate h : en effet, en munissant Y de la métrique $g = g' + \varepsilon^2 h$, et en faisant tendre ε vers 0_+, on réalise un rayon d'injectivité arbitrairement petit, tout en conservant une courbure sectionnelle qui vérifie $-K^2 \leq \sigma_g \leq 0$.

Une première raison pour laquelle l'hypothèse «$\sigma < 0$» paraît nécessaire réside dans le fait qu'elle assure que le rayon d'injectivité $\mathrm{inj}(y)$ coïncide, en tout point $y \in Y$, avec *la longueur* $\ell_g(y)$ (*notée aussi* $\ell(y)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la métrique g) *du plus petit lacet (non homotope à zéro) de point-base* y. Notons que, si Γ désigne le groupe fondamental de Y, agissant par isométries sur le revêtement universel riemannien $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, *on a toujours* :

$$\ell(y) = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} d(\tilde{y}, \gamma\tilde{y})$$

pour tout antécédent $\tilde{y}$ de y dans $\widetilde{Y}$. C'est pourquoi il est tentant de penser qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse «$\sigma < 0$» à condition de considérer que l'invariant géométrique à minorer n'est pas le supremum en y de $\mathrm{inj}(y)$, mais celui de $\ell(y)$. Ce point de vue a l'avantage de souligner que le lemme de Margulis est moins une propriété de la géométrie riemannienne des variétés compactes qu'une propriété algébrico-géométrique des sous-groupes discrets du groupe des isométries d'une variété simplement connexe, non compacte de courbure bornée, c'est précisément ce que dit le

0.3. THÉORÈME (G. A. Margulis, voir par exemple [B-Z], théorème 37.3.1, p. 281). *Considérons une variété riemannienne connexe* (Y', g') *complète, simplement connexe de dimension n, dont la courbure sectionnelle vérifie* $|\sigma| \leq K^2$ *et qui ne possède pas de lacet géodésique de longueur inférieure à* $\frac{1}{K}$*, où* K *est une constante positive arbitraire. Considérons n'importe quel sous-groupe discret* Γ *du groupe des isométries de* Y' *(munie de la distance* $d_{g'}$ *associée à la métrique* g'*) et notons* $\Gamma_\varepsilon(y)$ *le sous-groupe engendré par les éléments* γ *de* $\Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ *qui vérifient* $d_{g'}(y, \gamma(y)) < \varepsilon$*. Alors, il existe une constante universelle* $\varepsilon(n) > 0$ *(ne dépendant que de la dimension) telle que, pour tout* ε *vérifiant* $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon(n)}{K}$*, et pour tout* $y \in Y$*, le groupe* $\Gamma_\varepsilon(y)$ *soit presque nilpotent (i.e. il contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini).*

Le théorème 0.3 a récemment été amélioré par J. Cheeger et T. Colding [C-C 1], qui établissent le même résultat pour les groupes fondamentaux de variétés compactes, en remplaçant l'hypothèse «$|\sigma| \leq K^2$» par l'hypothèse «la courbure de Ricci de (Y, g) est minorée par $-(n-1)K^2$». Nous n'avons cependant pas su vérifier la preuve de ce dernier résultat.

Cependant, toujours au vu du contre-exemple ci-dessus (voir aussi [B-Z], Theorem 37.6.4, p. 293), l'hypothèse «$\sigma < 0$» reste nécessaire pour démontrer que le théorème 0.3 implique l'existence d'un $y \in Y$ tel que $\ell(y) \geq \frac{C_2(n)}{K}$ (une preuve utilisant l'hypothèse «$\sigma < 0$» est disponible, par exemple, dans [B-Z], Section 37.3.4, pp. 281–282). Il est cependant possible de s'en affranchir en la remplaçant par deux hypothèses algébriques que doit vérifier le groupe fondamental Γ de la variété considérée (ces hypothèses sont vérifiées – entre autres – par tous les groupes fondamentaux des variétés de courbure négative) :

(i) Tout sous-groupe presque abélien de Γ est isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$;

(ii) La relation de commutation (*i.e.* $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement si $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma$) est transitive sur $\Gamma \setminus \{e\}$.

La preuve du fait que ces deux conditions, ajoutées aux hypothèses du théorème 0.3, suffisent à prouver l'existence d'un $y \in Y$ tel que $\ell(y) \geq \frac{C_2(n)}{K}$ s'obtient en adaptant la preuve de la remarque 2.7 du présent article.

L'hypothèse de «courbure bornée» ($|\sigma| \leq K^2$ dans les théorèmes 0.1 et 0.3, Ricci $\geq -(n-1)$ dans le théorème 0.2) semble, en revanche, incontournable. La première raison qui la rend indispensable est triviale : l'invariant $g \mapsto \ell_g(y)$ (ou $\mathrm{inj}_g(y)$) étant sensible aux homothéties, il faut fixer l'échelle, ce qui se fait généralement en bornant un autre invariant, d'homogénéité contraire relativement aux homothéties. Cependant, si l'hypothèse $|\sigma| \leq K^2$ du théorème 0.3 était destinée à ce seul usage, il serait plus habile de la remplacer par une hypothèse beaucoup plus faible qui aurait elle aussi pour effet d'interdire les homothéties de rapport tendant vers zéro : le choix qui a été fait dans le présent article est de remplacer la borne de la courbure sectionnelle par une borne supérieure de l'entropie volumique de la variété. Rappelons que *l'entropie d'un espace métrique mesuré Y*, muni d'une distance d et d'une mesure μ, est *définie comme*

$$\mathrm{Ent}(Y, d) = \liminf_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Log}(\mu[B(y, R)]) ,$$

où la définition est indépendante du choix de y et de μ (lorsque μ est une mesure borélienne invariante par un groupe cocompact d'isométries, voir par exemple [Ro]).

Sur une variété riemannienne (Y, g), dont le revêtement universel riemannien sera noté $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, on définit *l'entropie volumique* $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$ comme l'entropie de l'espace métrique mesuré $\widetilde{Y}$, muni de la distance riemannienne $d_{\tilde{g}}$ (associée à la métrique relevée $\tilde{g}$) et de la mesure riemannienne $dv_{\tilde{g}}$. En courbure négative, l'entropie volumique coïncide avec un invariant de la dynamique du flot géodésique : l'entropie topologique $\mathrm{Ent}_{\mathrm{top}}$, alors que, dans le cas général, on a toujours $\mathrm{Ent}_{\mathrm{top}} \geq \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}$ (travaux de Dinaburg et de Manning, voir

[Ma]). Pour comprendre que l'hypothèse «entropie volumique majorée» est beaucoup plus faible que l'hypothèse «courbure bornée», notons que l'entropie topologique est majorée par la valeur moyenne (sur la variété) de la partie négative de la courbure de Ricci (cf. [Ga] en dimension n, voir aussi [Kn] en dimensions 2 et 3), pour une mesure introduite par G. Knieper [Kn].

En dehors de cette limitation de l'échelle, nous verrons que l'hypothèse «la courbure sectionnelle de (X, g_0) vérifie $-K^2 \leq \sigma < 0$ » (faite dans le théorème 0.1) n'est nécessaire que pour assurer certaines propriétés algébriques du groupe fondamental (en particulier le fait que tout sous-groupe dont l'entropie algébrique est inférieure à une certaine constante universelle est isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$, comme il découle de la proposition 1.22 du présent article). Un corollaire est que le théorème de Margulis, puisqu'il est valable pour la variété (X, g_0), reste valable pour toute métrique g d'entropie majorée sur X et pour toute variété riemannienne (Y, g) dont le groupe fondamental est suffisamment semblable à celui de X, sans qu'il soit fait aucune hypothèse sur la courbure de g. Un des buts serait de prouver que la conclusion du lemme de Margulis, sous la forme $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \sup_{y \in Y} \ell_g(y) \geq C_2(n)$, est vraie pour toute variété Y homotopiquement équivalente à X et pour toute métrique g sur Y (sans aucune hypothèse de courbure sur g). Sous cette forme, le résultat est encore conjectural ; en fait nous l'établissons en supposant que le groupe fondamental Γ de Y possède *la propriété (algébrique) de δ-non abélianité*, c'est-à-dire que Γ est non abélien et que, pour toute paire $\{\gamma, \gamma'\}$ d'éléments de Γ qui ne commutent pas, il existe une variété X (de courbure $\sigma \leq -1$ et de rayon d'injectivité global minoré par δ) telle que le sous-groupe $\langle \gamma; \gamma' \rangle$ engendré par γ et γ' admette un morphisme dans $\pi_1(X)$ dont l'image n'est isomorphe ni à $\{0\}$, ni à $\mathbb{Z}$; c'est le

0.4. Théorème (extrait du théorème 2.1 du présent article). — *Choisissons des constantes positives arbitraires δ et H ; sur tout espace métrique mesuré (Y, d, μ) dont l'entropie est majorée par H, considérons n'importe quel sous-groupe Γ, δ-non abélien, du groupe des automorphismes isométriques de (Y, d, μ). En tout point $y \in Y$ dont l'orbite par Γ est discrète et dont le stabilisateur dans Γ est trivial, le sous-groupe $\Gamma_\varepsilon(y)$ est abélien pour tout $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \frac{\mathrm{Log}\, 2}{H}$.*

Ce théorème s'applique en particulier à l'action isométrique du groupe fondamental sur le revêtement universel riemannien $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ d'une variété riemannienne (Y, g) et a, entre autres conséquences, le

0.5. Corollaire (Corollaire 3.3 et Remarque 2.7 du présent article). — *Choisissons des constantes positives arbitraires δ et H ; considérons n'importe quelle variété connexe Y dont le groupe fondamental Γ est δ-non abélien et est tel que la relation de commutation soit transitive sur $\Gamma \setminus \{e\}$ (il suffit, par exemple, pour cela qu'il existe une* *variété compacte de courbure négative Z et un morphisme injectif de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_1(Z)$. Alors toute métrique riemannienne complète g sur Y dont l'entropie volumique est majorée par H vérifie :*

$$\sup_{y\in Y} \ell_g(y) \geq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta}\,\frac{1}{H}\,.$$

Un exemple typique de cas où le lemme de Margulis classique (Théorèmes 0.1 et 0.3) ne s'applique pas est celui d'une variété riemannienne (Y^n, g) obtenue comme somme connexe d'une variété (X^n, g_0) fixée (de rayon d'injectivité supérieur ou égal à i_0, de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$) avec un nombre fini de variétés simplement connexes $M_1, \dots, M_k$, les recollements se faisant à l'aide de cylindres euclidiens de rayons égaux à ε. En effet la courbure sectionnelle atteint des valeurs arbitrairement proches de $-\infty$ aux points de recollement et (en dimension $n \geq 3$), des valeurs arbitrairement proches de $+\infty$ le long du cylindre. Pourtant le groupe fondamental de Y^n est δ-non abélien (avec $\delta = a\, i_0$) et il existe une application contractante de (Y^n, g) sur (X^n, g_0) qui induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux, donc

$$\operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g) \leq \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(X^n, g_0) \leq (n-1)b\,.$$

Les résultats 0.4 et 0.5 permettent de conclure que, si on pose $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta}\,\frac{1}{(n-1)b}$, on a

(i) $\Gamma_{\varepsilon_0}(y)$ est abélien pour tout y ;

(ii) Il existe un point y où $\ell_g(y) \geq \varepsilon_0$ (pour plus de détails sur cet exemple, voir la remarque 3.5).

Le lemme de Margulis 0.1 montre que toute variété riemannienne (Y, g), dont la courbure sectionnelle vérifie $-K^2 \leq \sigma < 0$, se décompose en «partie épaisse» (*i.e.* l'ensemble – non vide – des points y où $\ell(y) \geq \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 = \frac{C_2(n)}{2K}$ et «partie mince» (*i.e.* le complémentaire). Les résultats de G. A. Margulis et ceux de W. P. Thurston sur les variétés hyperboliques de dimension 3 ont été à l'origine de nombreux travaux dont le but est de décrire la topologie et la géométrie des «parties minces» éventuelles des variétés de courbure négative bornée (voir, par exemple, [Gr 1], [Th] Chapter 4, [Bu], [B-G-S],...). Nous retiendrons parmi ces résultats ceux qui sont voisins des préoccupations du présent article : pour un choix convenable de la constante $C_2(n)$:

– chaque composante connexe $Y^i_{\varepsilon_0}$ de la partie mince contient une géodésique périodique dont la longueur ε_i réalise le minimum sur $Y^i_{\varepsilon_0}$ de la fonction $y \mapsto \ell(y)$;

– le voisinage tubulaire de rayon $R_{\varepsilon_i} = a(n)\ \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right) - b(n)$ de cette géodésique (où $a(n)$ et $b(n)$ sont des constantes universelles) est entièrement inclus dans $Y^i_{\varepsilon_0}$ et ressemble à un fibré de fibre B^{n-1} au-dessus de S^1, c'est-à-dire qu'il est le quotient d'un ouvert du revêtement universel riemannien $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ (en l'occurrence : un voisinage tubulaire d'une droite-géodésique de $\widetilde{Y}$) par un groupe Γ_0 d'automorphismes isométriques isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Les mêmes résultats restent valables sur n'importe quelle variété Y dont le groupe fondamental Γ est δ-non abélien et est tel que la relation de commutation soit transitive sur $\Gamma \setminus \{e\}$ et pour toute métrique riemannienne g sur Y (quelle que soit sa courbure) dont l'entropie volumique est majorée par une constante arbitraire H, à condition de remplacer ε_0 par $\left(\frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{2H}\right)$ (cf. les corollaires 3.4 et 3.8 du présent article) ; la seule modification réside dans le fait que le voisinage tubulaire de la géodésique périodique minimisante de $Y^i_{\varepsilon_0}$, de rayon

$$R'_{\varepsilon_i} = \frac{\delta}{8+2\delta}\frac{1}{H}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right) - \operatorname{Log}\left(\frac{4+\delta}{\delta}H\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right],$$

peut rencontrer plusieurs composantes connexes de la partie mince, cependant les géodésiques périodiques de chacune des composantes connexes rencontrées sont toutes (à un multiple entier près) homotopes entre elles (voir le corollaire 3.8 et le deuxième contre-exemple de 3.5).

Lorsqu'un lacet-géodésique c est petit, toutes les classes de lacets-géodésiques qui ne commutent pas avec $[c]$ dans $\pi_1(Y, y)$ correspondent à des lacets très longs. Ceci donne le

0.6. Corollaire (extrait du corollaire 3.9 du présent article, comparer avec [B-K], Proposition 2.5.3, (iii)). — *Choisissons des constantes positives arbitraires δ, H et D ; considérons n'importe quelle variété connexe complète Y dont le groupe fondamental Γ est δ-non abélien et de centre nul. Alors toute métrique riemannienne g sur Y dont l'entropie volumique et le diamètre sont majorés par H et D vérifie, pour tout $y \in Y$,*

$$\ell_g(y) \geq \left(\frac{\delta}{4+\delta}\right)\frac{1}{H}e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta}\,H\,D}\,.$$

Ce corollaire fournit un minorant du rayon d'injectivité en *tout* point de Y, il est donc naturel d'en déduire des théorèmes de compacité sur l'ensemble des métriques d'entropie et de diamètre borné. Cette idée est déjà classique, sous l'hypothèse de courbure sectionnelle négative bornée, et peut (très grossièrement) se décrire ainsi : en reliant le lemme de Margulis aux théorèmes de finitude de J. Cheeger et de compacité de M. Gromov, toute variété de courbure négative bornée est obtenue en recollant à une «partie épaisse» (qui vit dans un compact de l'espace des géométries possibles) des «parties minces» (qui sont de topologie connue). En particulier, si on borne son diamètre, on obtient un résultat de compacité pour la variété toute entière. Un exemple est donné par le

0.7. Théorème (I. Belegradek, [Bk]). — *Soit $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ un ensemble de variétés riemanniennes, de même dimension $n \geq 3$, de courbure sectionnelle comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ (où a et b sont des constantes non nulles arbitraires) et dont les groupes fondamentaux sont tous isomorphes, alors il n'y a qu'un nombre fini de structures différentiables possibles pour ces variétés. De plus, si on munit $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ de la distance de*

Lipschitz-Gromov, cet ensemble est compactifiable et les métriques-limite sont $C^{1,s}$ (pour tout $0 < s < 1$*).*

Dans la section 4.b, nous donnerons, en dimension $n \geq 4$, une version plus générale de ce théorème et nous le rapprocherons d'un théorème de M. T. Anderson et J. Cheeger qui démontrent le même type de résultat pour un ensemble de variétés riemanniennes de courbure de Ricci minorée, de diamètre majoré et de rayon d'injectivité minoré, la compactification se faisant alors dans l'ensemble des métriques $C^{0,s}$. Le point faible du théorème d'Anderson et Cheeger est l'hypothèse sur le rayon d'injectivité, dont notre corollaire 0.6 permet de s'affranchir ; nous obtenons par exemple les

0.8. Proposition (extraits de la proposition 4.9 du présent article). — *Soit $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ un ensemble quelconque de variétés riemanniennes de dimension majorée, de courbure de Ricci minorée et de diamètre majoré, de groupe fondamental δ-non abélien et de centre nul (où δ est une constante positive arbitraire). Supposons que les rayons d'injectivité de leurs revêtements universels $(\widetilde{X}_i, \tilde{g}_i)$ soient minorés (ceci est automatiquement vérifié, par exemple, si la variété est sans points conjugués). Alors $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ est d'adhérence compacte dans l'ensemble des variétés riemanniennes dont la métrique est de classe $C^{0,s}$; en particulier, il n'y a qu'un nombre fini de structures différentiables X_i possibles.*

0.9. Proposition (extraits de la proposition 4.12 du présent article). — *L'ensemble des variétés d'Einstein (modulo isométries), dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre nul (où δ est une constante arbitraire), dont la courbure scalaire est minorée et le diamètre majoré, et dont le revêtement universel est de rayon d'injectivité minoré, est compact pour la topologie C^k.*

Cette dernière proposition implique des résultats de finitude pour l'ensemble des variétés d'Einstein de courbure sectionnelle strictement négative (Corollaires 4.13, 4.14). Nous montrons qu'en dimension 4, presque toute variété n'admet aucune métrique d'Einstein de courbure négative (Proposition 4.16) et que la courbure scalaire d'une variété d'Einstein de courbure négative est bornée loin de zéro (Propositions 4.15 et 4.17). On a par exemple le

0.10. Corollaire (Proposition 4.18 du présent article). — *Fixons une constante V arbitraire ; il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n, V) > 0$ telle que toute variété d'Einstein (Y, g), de courbure négative, de dimension $n \geq 4$, qui admet une application de degré non nul sur une variété hyperbolique (X, g_0) de volume inférieur à V, et dont la courbure scalaire totale $S(g)$ est minorée par $S(g_0) - \varepsilon$, est elle-même de courbure constante et est homothétique à (X, g_0).*

Nous avons aussi énoncé, au paragraphe 4.a, un résultat de précompacité «à la Gromov» dont une des versions est la

0.11. Proposition. — *Soit* $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ *un ensemble quelconque de variétés riemanniennes dont la dimension, le diamètre, le volume et l'entropie volumique sont majorés, dont le groupe fondamental est* δ*-non abélien (pour une même constante arbitraire* δ*) et de centre nul, et dont le revêtement universel ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à une constante arbitraire* L*. Alors* $\{(X_i, g_i)\}_{i\in I}$ *est précompact pour la distance de Gromov-Hausdorff et ne contient qu'un nombre fini de types d'homotopie.*

Un des avantages de cet énoncé, qui établit le résultat de précompacité sous l'hypothèse «entropie minorée» plutôt que «courbure bornée», réside dans le fait que l'entropie passe à la limite, *i.e.* l'espace-limite d'une suite de variétés de cet ensemble (quand elle converge au sens de Gromov-Hausdorff) est un espace métrique mesuré, dont l'entropie est parfaitement définie et est la limite des entropies des variétés de la suite (travaux de G. Reviron). Ceci suggère que le résultat de précompacité ci-dessus pourrait être reformulé comme un résultat de compacité dans l'ensemble des espaces métriques mesurés, mais cette question reste ouverte.

C'est une des raisons pour laquelle les résultats principaux de cet article (*i.e.* les théorèmes 0.4 à 0.6) ont été formulés dans le cadre plus général d'un groupe discret agissant par isométries sur un espace métrique mesuré (cf. le chapitre 2 du présent article). Il ne s'agit pas là d'une généralisation gratuite, car ces résultats s'appliquent évidemment aux variétés (chapitre 3 du présent article), mais aussi (par exemple) aux espaces métriques qui sont des limites (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) de variétés riemanniennes de courbure de Ricci minorée (cf. [C-C 2]), aux groupes agissant sur un graphe ou sur un polyèdre. Ce type d'applications n'a pas été très développé ici, mais il est sous-jacent à la proposition 1.22 du présent article, où l'on donne un minorant universel explicite de l'entropie algébrique de tous les groupes Γ qui admettent un morphisme ρ non trivial (*i.e.* $\rho(\Gamma)$ n'est isomorphe ni à $\{0\}$, ni à $\mathbb{Z}$) dans le groupe fondamental d'au moins une variété de courbure négative : en effet ce résultat peut être obtenu en appliquant le théorème 0.3 à l'action du groupe $\rho(\Gamma)$ sur son graphe de Cayley muni de la mesure de comptage et de la distance algébrique associée à un système de générateurs. Pour une présentation de différentes conjectures concernant l'entropie algébrique de tels groupes, voir le paragraphe 1.d, une application topologique et géométrique de la minoration ci-dessus de l'entropie algébrique est donnée au corollaire 3.2.

Une liste de conditions suffisantes pour qu'un groupe soit δ-non abélien est donnée aux chapitres 1.a et 1.b : il était en effet nécessaire de montrer que cette condition n'est pas aussi restrictive qu'elle le paraît à première vue. Enfin, le principe fondamental sur lequel repose cet article est démontré au chapitre 1.c : on peut trouver un entier $N = N(\delta)$

tel que, pour tout groupe Γ, δ-non abélien, et pour toute paire $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ d'éléments de ce groupe qui ne commutent pas, un des deux semi-groupes engendrés par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ ou $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ soit libre. Bien que ce résultat ressemble, dans sa formulation, à un résultat de M. Gromov ([Gr 4]), revu et corrigé par T. Delzant ([De]), l'important est qu'ici l'entier N se calcule indépendamment du groupe Γ (puisque $N = \left[\frac{4}{\delta}\right]$).

1. Présence de semi-groupes libres avec petits générateurs dans un groupe fondamental

1.1. DÉFINITIONS. — *Soit δ un nombre réel positif*

(i) Un groupe discret Γ' sera dit δ-épais s'il appartient à l'ensemble des groupes fondamentaux des variétés différentiables compactes connexes (de n'importe quelle dimension) qui admettent une métrique de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 *et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à δ.*

(ii) Un groupe discret Γ sera dit δ-non abélien s'il est non abélien et si, pour toute paire d'éléments γ et γ' de Γ qui ne commutent pas entre eux, il existe un groupe δ-épais Γ' et un morphisme ρ du sous-groupe $\langle\gamma;\gamma'\rangle$ engendré par ces deux éléments vers Γ' tel que $\rho(\langle\gamma;\gamma'\rangle)$ ne soit isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$.

1.2. REMARQUES.

(1) Tout groupe discret, non isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$, qui admet une représentation injective dans un groupe δ-épais est δ-non abélien et de centre réduit à zéro.

(2) Un groupe Γ, qui est isomorphe au groupe fondamental d'au moins une variété compacte de courbure sectionnelle strictement négative, est δ-épais pour une valeur de δ qui ne dépend que de Γ : prendre pour δ le supremum des $\mathrm{inj}(X, g)$, où (X, g) parcourt l'ensemble (non vide) des variétés riemanniennes qui vérifient $\pi_1(X) \simeq \Gamma$ et $\sigma_g \leq -1$, où σ_g est la courbure sectionnelle de g. Le problème réellement difficile sera de trouver des hypothèses qui permettent de choisir δ de manière indépendante de Γ, c'est ce que nous allons faire dans la section 1.b.

a) Exemples de groupes δ-non abéliens qui ne sont pas des groupes fondamentaux de variétés de courbure strictement négative.

1.3. — Tout groupe non abélien Γ, qui admet un morphisme ρ à valeurs dans un groupe δ-non abélien Γ', tel que ρ soit injectif en restriction aux commutateurs, est δ-non abélien.

Preuve. — Pour toute paire $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ d'éléments de Γ qui ne commutent pas, on a : $[\rho(\gamma_1), \rho(\gamma_2)] = \rho([\gamma_1, \gamma_2]) \neq e$. Il existe un morphisme ρ' du sous-groupe $\langle \rho(\gamma_1); \rho(\gamma_2) \rangle$ de Γ' engendré par $\rho(\gamma_1)$ et $\rho(\gamma_2)$ dans un groupe δ-épais Γ'' tel que $\rho' \circ \rho(\gamma_1)$ et $\rho' \circ \rho(\gamma_2)$ ne commutent pas. Donc $\rho' \circ \rho$ est un morphisme de $\langle \gamma_1; \gamma_2 \rangle$ dans Γ'' tel que les images de γ_1 et γ_2 ne commutent pas. ∎

1.4. — Le produit d'un groupe δ-non abélien par un groupe abélien est un groupe δ-non abélien.

Preuve. — La première projection est un morphisme sur un groupe δ-non abélien, qui est injectif en restriction au premier facteur ; or celui-ci contient tous les commutateurs. On conclut en appliquant la propriété 1.3.

1.5. — Le produit Γ de deux groupes δ-non abéliens est un groupe δ-non abélien.

Preuve. — Les deux projections sont des morphismes sur des groupes δ-non abéliens. Si deux éléments de Γ ne commutent pas, leurs images par (au moins) une des deux projections ne commutent pas. ∎

b) Quelques conditions suffisantes pour qu'un groupe soit δ-épais (pour une valeur universelle de δ).

1.6. Lemme. — *Considérons n'importe quelle variété compacte, localement symétrique de rang 1 et de type non compact (i.e. localement symétrique de courbure strictement négative) ; son groupe fondamental contient un sous-groupe normal, d'indice fini, qui est δ-épais pour $\delta = 1$.*

Preuve. — Notons X la variété considérée, Γ son groupe fondamental et normalisons la métrique g_X de X de sorte que sa courbure sectionnelle soit majorée par -1. Notons $c_1, \dots, c_N$ les géodésiques périodiques de X qui sont de g_X-longueur inférieure à 1 et, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ choisissons un élément γ_i dans la classe de conjugaison Γ_i correspondant à la classe d'homotopie libre de c_i. D'après le théorème de Mal'cev, Γ est résiduellement fini, car inclus dans le quotient d'un groupe de matrices par un sous-groupe fini ; pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, il existe donc un morphisme $\rho_i(\gamma_i) \neq e$, ce qui implique que $\mathrm{Ker}(\rho_i) \cap \Gamma_i = \emptyset$. Le noyau Γ' du morphisme-produit (à valeurs dans $G_1 \times \cdots \times G_N$) est un sous-groupe distingué d'indice fini qui ne rencontre aucun des Γ_i, les éléments de $\Gamma' \setminus \{\mathrm{id}\}$ correspondent donc à des géodésiques périodiques de longueurs supérieures ou égales à 1. Le revêtement galoisien fini X' de X de groupe fondamental Γ', est muni de la métrique relevée $g_{X'}$; toute géodésique périodique de X' s'envoie sur une géodésique périodique de X qui correspond à un élément $\gamma' \in \Gamma'$, donc de longueur supérieure ou égale à 1. Le rayon d'injectivité de $(X', g_{X'})$ est donc minoré par 1 et Γ' est 1-épais en vertu de la définition 1.1 *(i)*. ■

1.7. LEMME . — *Pour* $\delta_0 = \operatorname{Arg ch} 2$, *l'ensemble des groupes* δ_0*-épais contient l'ensemble de tous les groupes fondamentaux des surfaces compactes orientables de caractéristique d'Euler négative.*

En effet, sur chaque surface, il existe une métrique hyperbolique obtenue par recollement de pantalons, eux-mêmes obtenus en recollant sur 3 de leurs côtés deux hexagones hyperboliques réguliers d'angles égaux à $\pi/2$. Un calcul direct montre que la longueur de la plus petite géodésique périodique est supérieure ou égale à la longueur du côté de l'hexagone.

1.8. LEMME . — *Pour tous les* $D > 0$ *et tous les* $K \geq 1$, *et pour tout* $n \geq 2$, *il existe une constante universelle* $\delta'(n, D, K) > 0$ *telle que tout groupe fondamental d'une variété de dimension n, de diamètre inférieur ou égal à D et de courbure comprise entre* $-K^2$ *et* -1, *soit* $\delta'(n, D, K)$*-épais.*

Preuve. — Le lemme de Margulis classique (voir par exemple [B-Z], p. 277–294) permet de minorer le rayon d'injectivité *en au moins un point* par une constante $C'(n)/K$, ce qui minore le volume par $v(n, K) = \frac{C'(n)^n \operatorname{vol}(B^n)}{K^n}$, grâce au théorème de comparaison de Rauch. Par ailleurs, puisque la variété est toute entière incluse dans le D-voisinage tubulaire de sa plus courte géodésique périodique (dont la longueur sera noté ℓ), le second théorème de comparaison de Rauch permet de majorer le volume par $(\operatorname{vol} S^{n-2})\ell \int_0^D \operatorname{ch}(Kt) \frac{\operatorname{sh}(Kt)^{n-2}}{K^{n-2}}\, dt$. Ces deux inégalités permettent de minorer *en tout point* le rayon d'injectivité par $\frac{A(n)}{K \operatorname{sh}(KD)^{n-1}}$, où $A(n) = \frac{(n-1) \operatorname{vol} B^n\, C'(n)^n}{2 \operatorname{vol} S^{n-2}}$. ■

Avant d'aborder le critère suivant, rappelons le

1.9. THÉORÈME (M. Gromov [Gr 1]). — *Pour tout entier* $n \geq 4$ *et tout* $K > 0$, *il existe une constante universelle* $C = C(n)$ *telle que toute variété compacte riemannienne* (M, g), *de dimension n, dont la courbure sectionnelle* σ *vérifie* $-K^2 \leq \sigma < 0$, *a son diamètre majoré par :*

$$\operatorname{diam}(M, g) \leq C(n)\, K^{nr-1} \operatorname{vol}(M, g)^r ,$$

où $r = 1$ *si* $n \geq 8$ *et* $r = 3$ *si* $4 \leq n \leq 7$.

Un corollaire de ce théorème est le critère suivant :

1.10. LEMME. — *Pour tout entier* $n \geq 4$, *pour tous les réels* $V_0 > 0$ *et* $K \geq 1$, *il existe une constante universelle* $\delta'' = \delta''(n, V_0, K)$ *telle que l'ensemble des groupes* δ''*-épais contienne tous les groupes fondamentaux de toutes les variétés compactes de* *dimension n qui admettent une métrique de courbure comprise entre $-K^2$ et -1 et de volume inférieur ou égal à V_0. De plus, on peut calculer δ'' par la formule :*

$$\delta''(n, V_0, K) = \frac{A(n)}{K\,\mathrm{sh}[C(n)K^{nr}\ V_0^r]^{n-1}}$$

où $r = 1$ si $n \geq 8$ et $r = 3$ si $4 \leq n \leq 7$, où $A(n)$ est donnée au lemme 1.8 et où $C(n)$ est la constante définie au théorème 1.9.

Preuve. — Le théorème 1.9 donne, comme majorant du diamètre, la valeur $D = C(n)K^{nr-1}\,V_0^r$. Il suffit donc d'appliquer le critère 1.8 en posant $\delta'' = \delta'(n, D, K)$. ∎

Étant donné une variété différentielle Y, nous appellerons *Entropie minimale de Y (notée* Min Ent(Y)*)* l'infimum de $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)\,\mathrm{vol}(Y, g)^{1/n}$ pour toutes les métriques g sur Y. En fait, deux variétés dont les groupes fondamentaux sont isomorphes ont même entropie minimale (voir [Ba]). On a la

1.11. Proposition. — *Soient Y et X deux variétés compactes vérifiant* $\dim(Y) = \dim(X) \geq 3$. *Si X est muni d'une métrique g_X de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1, pour toute application continue $f : Y \to X$ de degré non nul, on a :*

$$(\mathrm{Min\,Ent}(Y))^n \geq |\deg f|(n-1)^n\,\mathrm{vol}(X, g_X)\ .$$

Si l'égalité est atteinte, et s'il existe une métrique g_0 sur Y qui réalise l'entropie minimale, alors f est homotope à un revêtement riemannien homothétique : $(Y, g_0) \to (X, g_X)$.

La preuve est identique à la preuve du corollaire 1.4 de [B-C-G 2] (pp.156-7) qui généralise celle de [B-C-G 1].

1.12. Corollaire. — *Pour tout $H > 0$ et tous les $K \geq 1$, et pour tout entier $n \geq 4$, il existe une constante universelle $\delta = \delta(n, K, H)$ telle que toute variété riemannienne X^n dont la courbure est comprise entre $-K^2$ et -1 et telle qu'il existe une variété compacte Y^n d'entropie minimale majorée par H et une application de degré non nul $f : Y^n \to X^n$*

(i) ait son diamètre majoré par $C(n)K^{nr-1}\left(\frac{H}{n-1}\right)^{nr}$, où $r = 1$ lorsque $n \geq 8$, $r = 3$ lorsque $4 \leq n \leq 7$;

(ii) ait un groupe fondamental δ-épais, où $\delta = \delta(n, K, H) = \frac{A(n)}{K\,\mathrm{sh}\left[C(n)\left(\frac{KH}{n-1}\right)^{nr}\right]^{n-1}}$.

Preuve. — La proposition 1.11 permet de majorer le volume de X par $\left(\frac{H}{n-1}\right)^n$; le théorème 1.9 permet d'en déduire une majoration du diamètre de X par $D = C(n)K^{nr-1}\left(\frac{H}{n-1}\right)^{nr}$, ce qui prouve *(i)*. Le critère 1.10 permet également d'en déduire que le groupe fondamental de X est $\delta''\left(n, \left(\frac{H}{n-1}\right)^n, K\right)$-épais, ce qui conclut. ∎

1.13. COROLLAIRE. — *Toute variété compacte X^n $(n \geq 4)$ dont le volume simplicial est majoré par V et qui admet une métrique de courbure sectionnelle comprise entre $-K^2$ et -1 a un groupe fondamental $\delta_0(n,K,V)$-épais, où $\delta_0(n,K,V) = \frac{A(n)}{K sh^{n-1}[C_0(n)K^{nr}V^r]}$, où $C_0(n) = C(n)\pi^r[(n-1)!]^{-r}$ et où $A(n)$ et $C(n)$ sont donnés dans le lemme 1.8 et le théorème 1.9.*

Preuve. — Elle découle de l'inégalité de M. Gromov ([Gr 3], pp. 226 et suivantes) qui assure, sous ces hypothèses, que $\mathrm{Vol}(X) \leq \frac{\pi}{(n-1)!}\|X\|$, où $\|X\|$ est le volume simplicial de X. On conclut en appliquant le lemme 1.10. ∎

c) Croissance d'un sous-groupe dans un groupe fondamental d'une variété compacte de courbure négative.

Dans un groupe Γ, le semi-groupe engendré par deux éléments γ et σ est l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme des mots formés à partir des lettres γ et σ, *i.e.* comme des produits de puissances *positives* de γ et σ. Un tel semi-groupe sera dit libre si deux mots distincts correspondent à des éléments différents de Γ.

1.14. PROPOSITION. — *Soit $\delta > 0$ un nombre réel donné et N un entier quelconque supérieur ou égal à $\frac{4}{\delta}$. Soit Γ le groupe fondamental d'une variété compacte quelconque de courbure inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité minoré par δ. Soient γ_1 et γ_2 deux éléments quelconques de Γ. Si γ_1 et γ_2 ne commutent pas, alors un des deux semi-groupes engendrés par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ ou par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ est libre.*

Ce résultat n'a d'intérêt que si N peut être calculé *a priori*, indépendamment de γ_1, de γ_2 et de Γ. Une première version de ce lemme fut rédigée par M. Gromov ([Gr 4]) ; la preuve en fut corrigée, complétée et améliorée par Th. Delzant ([De]) ; dans cette première version N ne dépend que de la classe d'isomorphisme Γ du groupe fondamental de X (nous n'avons pas réussi à voir si la preuve de Th. Delzant permet de rendre N indépendant de Γ), cependant la conclusion est plus forte, puisque le sous-groupe engendré par γ_1^N et γ_2^N est alors libre. Nous donnerons de la proposition 1.14 une preuve très simple, qui permet surtout de rendre N *indépendant de* Γ. Dans le même temps Ch. Champetier et V. Guirardel ([C-G]) ont démontré une autre version de ce lemme , valable pour des groupes δ-hyperboliques Γ généraux, mais où N dépend du nombre de générateurs du groupe Γ et de la constante δ d'hyperbolicité de la distance algébrique associée à ce système générateur. Pour prouver ce résultat nous allons utiliser un lemme de Ping-Pong explicite.

Preuve. — Nous supposons que Γ est le groupe fondamental d'une *variété compacte* (X,g), de courbure sectionnelle strictement négative. Nous *appellerons* $(\widetilde{X},\tilde{g})$ *son* *revêtement universel riemannien*, sur lequel Γ agit par transformations isométriques de revêtement. Nous noterons c_i (où $i = 1$ ou 2) l'unique géodésique de $(\widetilde{X}, \tilde{g})$ qui est globalement invariante par γ_i. Pour tout t, on a donc $c_i(t + \ell(\gamma_i)) = \gamma_i \circ c_i(t)$, où $\ell(\gamma_i)$ est la longueur de la géodésique périodique de (X, g) librement homotope au lacet représentant γ_i (cette géodésique est la projection de c_i par l'application p de revêtement). On a donc $\ell(\gamma_i) \geq 2\delta$.

1.15. Lemme. — *Si (X, g) est compacte de courbure négative, les géodésiques c_1 et c_2 ne sont asymptotes (quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) que si elles sont identiques.*
Deux éléments γ_1 et γ_2 de $\Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ commutent si et seulement si leurs géodésiques invariantes sont identiques.
Tout sous-groupe commutatif de Γ est isomorphe à $\{0\}$ ou à $\mathbb{Z}$.

Preuve. — *Si c_1 et c_2 sont asymptotes*, il existe un reparamétrage α de c_1 tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d_g(p \circ c_1 \circ \alpha, p \circ c_2) \leq d_{\tilde{g}}(c_1 \circ \alpha, c_2) \leq \frac{1}{k}$ sur un intervalle I_k de longueur infinie. La distance de Hausdorff entre les deux géodésiques périodiques $p \circ c_1$ et $p \circ c_2$ est donc nulle. Il s'ensuit que $p \circ c_1 \circ \alpha(t) \simeq p \circ c_2(t) = p \circ c_1(t + t_0)$ pour tout $t \in I_k$ et pour un choix convenable t_0 de l'origine de c_1, donc que $\alpha(t) \simeq t + t_0 + q\ell(\gamma_1)$ où $q \in \mathbb{Z}$. Les points $c_1(t + t_0 + q\ell(\gamma_1))$ et $c_2(t)$ appartiennent à $p^{-1}(\{p \circ c_2(t)\})$ et leur distance tend vers zéro ; par compacité ils sont donc égaux et $c_1 = c_2$ à une translation de l'origine des temps près.
Si γ_1 et γ_2 commutent, on a $\gamma_1 \circ \gamma_2(c_1) = \gamma_2 \circ \gamma_1(c_1) = \gamma_2(c_1)$, donc $\gamma_2(c_1) = c_1$ par unicité de la géodésique γ_1-invariante, donc $c_1 = c_2$ par unicité de la géodésique γ_2-invariante. Si $c_1 = c_2$ alors, γ_1 et γ_2 agissant par translations sur c_1, leurs actions sur c_1 commutent ; puisque $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma_2$ admet des points fixes, c'est l'élément neutre et γ_1 et γ_2 commutent.
Tous les éléments d'un sous-groupe commutatif Σ de Γ ont donc la même géodésique invariante, notée c, sur laquelle ils agissent par translations. Cette représentation est un isomorphisme de Σ sur un sous-groupe discret du groupe des translations de c, donc est isomorphe à $\{0\}$ ou à $\mathbb{Z}$. ∎

Suite de la preuve de la proposition 1.14. — Nous supposerons désormais que (X, g) est de courbure sectionnelle majorée par -1 et de rayon d'injectivité minoré par δ. On compactifie $\widetilde{X}$ en lui ajoutant le quotient $\partial\widetilde{X}$ de l'ensemble des géodésiques orientées par la relation «être asymptotes quand $t \to +\infty$». Le bord $\partial\widetilde{X}$ s'identifie à la sphère unitaire de $T_x\widetilde{X}$ par l'application qui, à chaque vecteur unitaire v, associe la classe d'équivalence de la géodésique $t \mapsto \exp_x(tv)$. Notons θ_i^+ et θ_i^- les points de $\partial\widetilde{X}$ correspondant à la géodésique c_i et à son orientation inverse, *i.e.* $\theta_i^{+/-} = \lim_{t \to \pm\infty} [c_i(t)]$ (pour $i = 1$ ou $i = 2$). Notons x_+ et x_- les projections (géodésiques) orthogonales de θ_2^+ et θ_2^- sur c_1.

Quitte à changer γ_2 en γ_2^{-1} (ce qui change c_2 en son orientation inverse, donc θ_2^+ en θ_2^- et réciproquement), on peut supposer que x_+ est celui des deux points qui est le plus proche de θ_1^+ sur c_1. Notons y_0 la projection orthogonale de x_+ sur c_2 et reparamétrons c_1 et c_2 de sorte que $c_1(0) = x_+$ et $c_2(0) = y_0$. Posons $R_i = \frac{1}{2}N\ell(\gamma_i) = \frac{1}{2}\ell(\gamma_i^N)$, on a $R_i \geq 4$. Notons $U_i^{+/-}$ l'ensemble des $x \in \widetilde{X}$ qui vérifient :

$$d(x, c_i(\pm 2R_i)) \leq d(x, c_i(0)) .$$

1.16. Lemme. — *Soit ABC un triangle-géodésique quelconque de $(\widetilde{X}, \tilde{g})$ tel que $\frac{\pi}{6} \leq \widehat{A} \leq \pi$, alors $d(B,C) > d(A,B) + d(A,C) - 4$. De plus, si $\widehat{A} \geq \pi/2$, alors $d(B,C) > d(A,B) + d(A,C) - 1$.*

Preuve. — Notons $a,\ b,\ c$ les longueurs des côtés opposés aux sommets $A,\ B,\ C$. Puisque $\sigma_{\tilde{g}} \leq -1$, on a $\operatorname{ch} a \geq \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \cos \widehat{A} \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c$. Pour prouver le lemme, il suffit donc de prouver que, lorsque $b + c \geq 4$, alors

$$\operatorname{ch}(b + c - 4) - \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \cos \widehat{A} \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c < 0 .$$

Il suffit donc de prouver que le polynôme

$$P(X) = (2e^4 - 1 + \cos \widehat{A})X^2 - 2(1 + \cos \widehat{A})X - (1 - \cos \widehat{A} - 2e^{-4})$$

est négatif pour $X = e^{-(b+c)}$. Il suffit pour cela de vérifier que $P(0)$ et $P(e^{-4})$ sont négatifs, ce qui est le cas dès que $\cos \widehat{A} < 1 - 2e^{-4}$, ce qui est vérifié quand $\widehat{A} \geq \pi/6$. Si $\widehat{A} \geq \pi/2$, la preuve est identique, la condition suffisante s'écrivant alors $\cos \widehat{A} < 1 - 2e^{-1}$. ∎

1.17. Lemme. — *U_1^+ (resp. U_1^-) est inclus dans l'image C_1^+ (resp. C_1^-) par $\exp_{x_+}$ du cône de $T_{x_+}\widetilde{X}$ de demi-angle au sommet $\pi/6$ et d'axe $\dot{c}_1(0)$ (resp. $-\dot{c}_1(0)$).*

Preuve. — Soit c une géodésique quelconque issue de x_+ qui fait avec $\dot{c}_1(0)$ (resp. avec $-\dot{c}_1(0)$) un angle supérieur ou égal à $\pi/6$. Puisque $R_1 \geq 2$, le lemme 1.16 donne, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$d_{\tilde{g}}(c(t), c_1(\pm 2R_1)) > d_{\tilde{g}}(x_+, c(t)) + d_{\tilde{g}}(x_+, c_1(\pm 2R_1)) - 4 \geq d_{\tilde{g}}(c(t), c_1(0)) ;$$

donc c ne rencontre pas U_1^+ (resp. U_1^-). ∎

1.18. Lemme. — *Notons α_t la géodésique qui joint x_+ à $c_2(t)$ et $\alpha_{\pm\infty}$ celles qui joignent x_+ à $\theta_2^{+/-}$. Alors U_2^+ (resp. U_2^-) est inclus dans l'image C_2^+ (resp. C_2^-) par $\exp_{x_+}$ du cône de $T_{x_+}\widetilde{X}$ de demi-angle au sommet $\pi/3$ et d'axe $\dot{\alpha}_{+\infty}(0)$ (resp. $\dot{\alpha}_{-\infty}(0)$).*

Preuve. — L'angle entre $\dot{\alpha}_{2R_2}(0)$ et $\dot{\alpha}_{+\infty}(0)$ est inférieur ou égal à $\pi/6$. Sinon, quand $t \to +\infty$, on aurait, en remarquant que l'angle en y_0 est égal à $\pi/2$, et en appliquant 3 fois le lemme 1.16 :

$$\ell(\alpha_t) > \ell(\alpha_0) + t - 1 ,\ \ \ell(\alpha_{2R_2}) > \ell(\alpha_0) + 2R_2 - 1 ,\ \ t - 2R_2 > \ell(\alpha_t) + \ell(\alpha_{2R_2}) - 4 ,$$

ce qui est contradictoire puisque $R_2 > 3/2$. Soit c une géodésique quelconque issue de x_+ qui fait avec $\dot{\alpha}_{+\infty}(0)$ un angle supérieur ou égal à $\pi/3$, elle fait avec α_{2R_2} un angle supérieur à $\pi/6$. En appliquant encore deux fois le lemme 1.16, nous avons :

$$\begin{aligned} d(c(t), c_2(2R_2)) &> d(c(t), x_+) + \ell(\alpha_{2R_2}) - 4 \\ &> d(c(t), x_+) + \ell(\alpha_0) + 2R_2 - 5 \\ &> d(c(t), y_0) + 2R_2 - 5 > d(c(t), y_0) \end{aligned}$$

car $R_2 > 5/2$. Donc c ne rencontre pas U_2^+. On démontre de manière identique que, si c fait un angle supérieur ou égal à $\pi/3$ avec $\dot{\alpha}_{-\infty}(0)$, alors c ne rencontre pas U_2^-. ■

1.19. LEMME. — *$U_1^+ \cap U_2^+ = \emptyset$, $U_1^+ \cap U_2^- = \emptyset$, $U_1^+ \cap U_1^- = \emptyset$, $U_2^+ \cap U_1^- = \emptyset$ et $U_2^+ \cap U_2^- = \emptyset$.*

Preuve. — Les angles entre le vecteur $\dot{c}_1(0)$ et les vecteurs $\dot{\alpha}_{+\infty}(0)$, $-\dot{c}_1(0)$ et $\dot{\alpha}_{-\infty}(0)$ étant respectivement égaux à $\pi/2$, à π et supérieur ou égal à $\pi/2$, le cône C_1^+ ne rencontre aucun des cônes C_2^+, C_1^- et C_2^- (par l'inégalité triangulaire) ; d'après les lemmes 1.17 et 1.18, ceci implique que U_1^+ ne rencontre ni U_2^+, ni U_1^-, ni U_2^-. L'angle entre les vecteurs $\dot{\alpha}_{+\infty}(0)$ et $-\dot{c}_1(0)$ étant égal à $\pi/2$, les cônes C_2^+ et C_1^- ne se rencontrent pas, donc $U_2^+ \cap U_1^- = \emptyset$.
Si $x \in U_2^+ \cap U_2^-$, on a

$$d(x, c_2(0)) \geq d(x, c_2(-2R_2)) \text{ et } d(x, c_2(0)) \geq d(x, c_2(2R_2)),$$

ce qui est contradictoire avec la convexité de l'application $t \mapsto d(x, c_2(t))$ (la convexité est stricte car x ne peut appartenir à c_2). ■

1.20. LEMME. — *Pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $\gamma_i^N(U_j^+) \subset U_i^+$.*

Preuve. — γ_i^N agit sur c_i par translation, donc $\gamma_i^N[c_i(-2R_i)] = c_i(0)$ et $\gamma_i^N[c_i(0)] = c_i(2R_i)$. Si $x \in \widetilde{X} \smallsetminus U_i^-$, on en déduit que $\gamma_i^N(x) \in U_i^+$. Le lemme 1.19 prouvant que $U_j^+ \subset \widetilde{X} \smallsetminus U_i^-$, ceci conclut. ■

Fin de la preuve de la proposition 1.14. — Supposons que deux mots formés de produits de puissances positives ou nulles de $\sigma = \gamma_1^N$ et de $s = \gamma_2^N$ donnent le *même* élément γ de Γ, *i.e.* $\sigma^{p_1} s^{q_1} \cdots \sigma^{p_k} s^{q_k} = \sigma^{\ell_1} s^{r_1} \cdots \sigma^{\ell_j} s^{r_j}$, où les p_i, q_i, ℓ_i, r_i appartiennent à $\mathbf{N}$. On simplifie, de part et d'autre, par $\sigma^{-\inf(\ell_1, p_1)}$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ne puisse plus simplifier. Dans la relation obtenue après simplification, il est impossible que le premier terme soit une puissance du *même* élément, la relation s'écrit donc sous la forme $\sigma^{p_1} s^{q_1} \cdots = s^{r_1} \sigma^{\ell_1} \cdots$, où les p_i, q_i, r_i, ℓ_i appartiennent à $\mathbf{N} \smallsetminus \{0\}$ si aucun des deux membres ne se réduit à l'élément neutre. En appliquant les deux membres de cette relation à un même élément de U_1^+, nous obtenons dans le membre de gauche un élément de

$\sigma^{p_1}(U_2^+) \subset U_1^+$ et dans le membre de droite un élément de $s^{r_1}(U_1^+) \subset U_2^+$, ce qui est impossible, puisque $U_1^+ \cap U_2^+ = \emptyset$ par le lemme 1.19, sauf si la relation est triviale ; si un des deux membres devient égal à e, il suffit de faire agir les deux membres sur U_2^+ (resp. sur U_1^+) lorsque l'autre membre commence par σ (resp. par s). ∎

d) Minorations universelles de l'entropie algébrique.

1.21. LEMME. — *Soit δ un nombre réel positif donné et N un entier quelconque, supérieur ou égal à $\frac{4}{\delta}$. Soit Γ un groupe finiment engendré. S'il existe un morphisme ρ de Γ dans un groupe δ-épais Γ' tel que $\rho(\Gamma)$ ne soit isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$, alors tout système générateur de Γ contient deux éléments γ_1 et γ_2 tels qu'au moins un des deux semi-groupes engendré par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ ou par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ soit libre.*
Si de plus Γ' est le π_1 d'une surface compacte de genre supérieur ou égal à 2, alors le sous-groupe engendré par $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}\}$ est libre.

Preuve. — Pour tout système générateur Σ de Γ, $\rho(\Sigma)$ contient au moins deux éléments $\rho(\gamma_1)$ et $\rho(\gamma_2)$ qui ne commutent pas (sinon $\rho(\Gamma)$ serait abélien, donc isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$ d'après le lemme 1.15. La proposition 1.14 implique alors que $\{\rho(\gamma_1)^N, \rho(\gamma_2)^{\pm N}\}$ engendrent un semi-groupe libre. Il s'ensuit que le semi-groupe engendré par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{\pm N}\}$ est libre.
Si Γ' est le π_1 d'une surface, le sous-groupe engendré par $\{\rho(\gamma_1), \rho(\gamma_2), \rho(\gamma_1)^{-1}, \rho(\gamma_2)^{-1}\}$ est le π_1 d'une surface hyperbolique non compacte, donc est libre. ∎

Rappelons que la distance algébrique d_Σ, associée à un système fini Σ de générateurs dans un groupe discret Γ, est définie par $d_\Sigma(\alpha, \beta) =$ la plus petite longueur de tous les mots qui représentent $(\alpha^{-1}\beta)$ comme produit d'éléments de $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$. L'entropie algébrique de Γ associée à Σ (notée $\mathrm{Ent}_\Sigma(\Gamma)$) est l'entropie de l'espace métrique (Γ, d_Σ), muni de la mesure $\mu(A) = \#(A)$. L'entropie algébrique de Γ (notée $\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma)$) est définie par :

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma) = \operatorname*{Inf}_{\Sigma}[\mathrm{Ent}_\Sigma(\Gamma)] \, .$$

Lorsque le groupe Γ est à croissance exponentielle, c'est une question ouverte de savoir si on a toujours $\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma) > 0$ (cf. M. Gromov [Gr 2], Remarque 5.12, pour un survey sur ce problème voir [Ha]). Cette question a cependant été résolue affirmativement pour les groupes hyperboliques Γ par M. Koubi ([Ko]). Pour les groupes hyperboliques, et, pour commencer, pour les groupes fondamentaux des variétés de courbure négative, une version plus forte de cette conjecture (toujours attribuée à M. Gromov) devient : pour tout groupe Γ de ce type, peut-on exhiber un nombre $\delta_0 > 0$ *universel* (*i.e.* indépendant du groupe Γ) tel que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma) > \delta_0$? Le survey [Ha] donne un certain nombre d'exemples de groupes (en particulier des produits amalgamés) pour lesquels le calcul d'un minorant δ_0 de l'entropie algébrique est possible. Nous allons ci-dessous en donner d'autres :

1.22. Proposition. — *S'il existe un morphisme ρ de Γ dans un groupe Γ' qui est δ-épais (resp. qui est le groupe fondamental d'une surface compacte de genre $g \geq 2$), et si $\rho(\Gamma)$ n'est isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$, alors* $\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma) \geq \frac{\delta}{4+\delta}\,\mathrm{Log}\,2$ *(resp.* $\mathrm{Ent}_{\mathrm{alg}}(\Gamma) \geq \mathrm{Log}\,3$*).*

Preuve. — Posons $N = [\frac{4}{\delta}] + 1$ (resp. $N = 1$). Le lemme 1.21 permet d'extraire, de tout système générateur Σ de Γ, une paire $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ telle que $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ ou $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ engendre un semi-groupe libre L (resp. un sous-groupe libre L). Le graphe de Cayley de L étant un arbre régulier, où chaque branche est de longueur unitaire et se divise en 2 (resp. 3) nouvelles branches, il est classique que l'entropie algébrique de L, relativement au système de générateurs $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{\pm N}\}$ est égale à $\mathrm{Log}(2)$ (resp. à $\mathrm{Log}(3)$). Si d_L représente la distance algébrique dans L par rapport à ce système générateur, on a (par définition de la distance algébrique) $d_\Sigma(e, \gamma) \leq N\, d_L(e, \gamma)$ pour tout $\gamma \in L$. On en déduit que

$$\mathrm{Ent}_\Sigma(\Gamma) \geq \frac{1}{N}\,\mathrm{Ent}_{\{\gamma_1^N, \gamma_2^{\pm N}\}}(L)\,.$$

On conclut en passant à l'infimum pour tous les systèmes générateurs Σ. ∎

2. Lien entre algèbre du groupe et propriétés géométriques de l'espace sur lequel il opère ; le cas des espaces métriques mesurés

Un *espace métrique mesuré* est un espace Y muni d'une distance d et d'une mesure positive μ, que nous supposerons telle que $\mu[B(y, r)] > 0$ pour tout y et tout $r > 0$. Une application bijective $\gamma : Y \to Y$ sera dite *isométrique* si elle préserve la distance et la mesure. Nous nous intéresserons aux actions isométriques d'un groupe Γ sur (Y, d, μ) et aux points $y \in Y$ tels que l'orbite Γy *soit discrète et tels que le stabilisateur de* y *dans* Γ *soit trivial* (*i.e.* réduit à l'élément neutre). Nous étudions donc ici des représentations discrètes d'un groupe δ-non abélien dans le groupe des isométries de (Y, d, μ). Pour l'étude de représentations éventuellement non discrètes dans les groupes d'isométries d'espaces hyperboliques, voir par exemple [B-C-G 3].

2.0. Définition. — *Pour tout $y \in Y$ et tout $\varepsilon > 0$, nous noterons $\Sigma_\varepsilon(y)$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma \smallsetminus \{e\}$ tels que $d(y, \gamma(y)) < \varepsilon$ et $\Gamma_\varepsilon(y)$ le sous-groupe de Γ engendré par les éléments de $\Sigma_\varepsilon(y)$.*

2.1. Théorème. — *Soient δ et H deux nombres réels positifs arbitraires ; considérons un espace métrique mesuré quelconque (Y, d, μ) dont l'entropie est majorée par H. Si Γ et un groupe δ-non abélien qui agit par isométries sur (Y, d, μ) et si $y \in Y$ est un point de stabilisateur trivial et dont l'orbite Γ_y est discrète, alors, pour tout $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta}\frac{\mathrm{Log}\,2}{H}$, on a :*

(o) $\mathrm{Ent}(Y,d)>0$ *;*

(i) $\Gamma_\varepsilon(y)$ *est abélien ;*

(ii) S'il existe un élément σ *de* $\Gamma\smallsetminus\{\mathrm{id}\}$ *tel que* $d(y,\sigma(y))\leq\varepsilon$*, alors tout élément* γ *de* Γ *qui ne commute pas avec* σ *vérifie :*

$$d(y,\gamma(y))\geq\left(\frac{\delta}{4+\delta}\right)\frac{1}{H}\,\mathrm{Log}\left(\left(\frac{\delta}{4+\delta}\right)\frac{1}{H\varepsilon}\right)\,.$$

Si de plus (Y,d) *est un espace de longueur connexe et si le centre de* Γ *est nul, alors*

(iii) $\inf_{\gamma\in\Gamma\smallsetminus\{\mathrm{id}\}}\left[d(y,\gamma(y))\right]\;\geq\;\frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H}e^{-2\left(\frac{4+\delta}{\delta}\right)HD}$ *pour tout majorant* D *de* $\sup_{z\in Y}\left[d(\Gamma y,\Gamma z)\right]$.

(iv) $\mathrm{Ent}(Y,d)\sup_{z\in Y}d(\Gamma y,z)\geq\frac{\delta\,\mathrm{Log}\,2}{8+2\delta}$.

2.2. Proposition. — *Pour tout* $\delta>0$*, pour tout espace métrique de longueur mesuré connexe* (Y,d,μ)*, pour tout sous-groupe* Γ *du groupe des isométries de* (Y,d,μ) *qui admet un morphisme* ρ *dans un groupe* δ*-épais* Γ' *tel que* $\rho(\Gamma)$ *ne soit isomorphe ni à* $\{0\}$ *ni à* $\mathbb{Z}$*:*

(i) $\mathrm{Ent}(Y,d)\sup_{z\in Y}\left[d(\Gamma y,\Gamma z)\right]\;\geq\;\frac{\delta\,\mathrm{Log}\,2}{8+2\delta}$*, pour tout* $y\in Y$ *dont le stabilisateur dans* Γ *est trivial et dont l'orbite* Γy *est discrète.*

(ii) $\mathrm{Ent}(Y,d)\,\mathrm{diam}(Y/\Gamma)\geq\frac{\delta\,\mathrm{Log}\,2}{(8+2\delta)}$ *si toutes les orbites de* Γ *sont discrètes, et si* Γ *agit sans point fixe, en munissant* Y/Γ *de la distance-quotient.*
De plus, si Γ' *est n'importe quel groupe fondamental de surface de genre* $g\geq 2$*, le dernier membre de ces deux inégalités peut être remplacé par* $\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,3$*, et devient donc indépendant de* δ*.*

Avant de démontrer le théorème 2.1 et la proposition 2.2, nous allons établir les lemmes suivants :

2.3. Lemme. — *Pour tout sous-groupe* Γ *du groupe des isométries de* (Y,d,μ) *et tout point* $y\in Y$ *dont l'orbite* Γy *est discrète et dont le stabilisateur dans* Γ *est trivial, on a*

$$\mathrm{Ent}(Y)\geq\liminf_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R}\,\mathrm{Log}\left[\#(\Gamma y\cap B(y,R))\right]\right)$$

ou, en d'autres termes l'entropie de Y *est minorée par celle de* Γy*, vu comme espace métrique mesuré, muni de la métrique induite* d *et de la mesure de comptage.*

Preuve. — Par l'hypothèse de discrétude, on a :

$$\alpha(y)\;:=\inf_{\gamma\in\Gamma\smallsetminus\{\mathrm{id}\}}d(y,\gamma y)>0\,,\quad \nu(y)\;:=\mu\left[B(y,\frac{\alpha(y)}{2})\right]>0\,.$$

Les boules $B(\gamma y, \frac{\alpha(y)}{2})$ étant disjointes et de même volume, on a, par l'inégalité triangulaire :

$$\mu\left[B\left(y, R+\frac{\alpha(y)}{2}\right)\right] \geq v(y)\,\#(\Gamma y \cap B(y,R))\ .$$

on achève la preuve en passant au logarithme, en divisant par $\left(R+\frac{\alpha(y)}{2}\right)$ et en passant à la limite inférieure de part et d'autre de l'inégalité. ∎

2.4. Lemme. — *Soit L un semi-groupe libre à 2 générateurs γ_1 et γ_2, muni d'une distance d invariante par translations à gauche. Pour tous les (ℓ_1, ℓ_2) tels que $\ell_1 \geq d(e,\gamma_1)$ et $\ell_2 \geq d(e,\gamma_2)$, l'entropie de (L,d) (pour la mesure de comptage) vérifie :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(L,d) &\geq \sup_{a\in]0,+\infty[}\left(\frac{1}{\ell_1+a\ell_2}\right)\left[(1+a)\operatorname{Log}(1+a) - a\operatorname{Log} a\right]\\ &\geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\ell_1}\operatorname{Log}\left(1+\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)+\frac{1}{\ell_2}\operatorname{Log}\left(1+\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\right]\ .\end{aligned}$$

Preuve. — Pour tout $R > 0$, notons L_R l'ensemble des $\gamma \in L$ tels que $d(e,\gamma) \leq R$. Pour tous les $(p_1, p_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p_1\ell_1 + p_2\ell_2 \leq R$, notons Λ_{p_1,p_2} l'ensemble des éléments de L qui sont obtenus en faisant le produit de p_1 fois γ_1 et de p_2 fois γ_2 *dans n'importe quel ordre*. Puisque L est un semi-groupe libre, on a $\#(\Lambda_{p_1,p_2}) = C^{p_1}_{p_1+p_2}$. L'inégalité triangulaire et l'invariance de d par translations à gauche impliquent que $\Lambda_{p_1,p_2} \subset L_R$. On a donc

$$\#L_R \geq C^{p_1}_{p_1+p_2} \geq e^{-(1+\frac{1}{2p_1})}\frac{(p_1+p_2)^{p_1+p_2+1/2}}{(p_1)^{p_1+1/2}(p_2)^{p_2+1/2}}\ ,$$

(la dernière inégalité découlant du fait que $\int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[f(i+1)+f(i)\right]$ lorsque $f(x) = \operatorname{Log}\left(\frac{p+x}{x}\right)$). Pour tout $a \in]0,+\infty[$, posons $p_1 = E\left(\frac{R}{\ell_1+a\ell_2}\right)$ et $p_2 = E(ap_1)$. Comme $\frac{p_1}{R}$ et $\frac{p_2}{R}$ tendent alors respectivement vers $\frac{1}{\ell_1+a\ell_2}$ et vers $\frac{a}{\ell_1+a\ell_2}$ quand R tend vers $+\infty$, nous déduisons de ce qui précède que

$$\liminf\left[\frac{1}{R}\operatorname{Log}(\#L_R)\right] \geq \frac{1}{\ell_1+a\ell_2}\left[(1+a)\operatorname{Log}(1+a) - a\operatorname{Log}(a)\right]\ .$$

Ceci prouve la première inégalité du lemme 2.4, la seconde s'obtient en remplaçant a par $\frac{\ell_1}{\ell_2}$. ∎

2.5. Lemme. — *Soient (Y,d) un espace métrique de longueur connexe, Γ un groupe d'isométries de (Y,d) et y un point quelconque de Y. Posons*

$$D = \sup_{z\in Y} d(\Gamma y, \Gamma z) = \sup_{z\in Y} d(\Gamma y, z)\ ;$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(y,\gamma(y)) < 2D+\varepsilon$ est un système générateur de Γ (donc $\Gamma_{2D+\varepsilon}(y) = \Gamma$).

Preuve. — Elle suit la preuve de la proposition 3.22 de [Gr 2]. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une suite de points $y = x_0, x_1, \ldots, x_N = \gamma(y)$ de Y tels que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ et tels que $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(y, \gamma y) + \varepsilon$ (propriété des espaces de longueur). Par définition de D, il existe un élément γ_i de Γ tel que $d(\gamma_i(y), x_i) \leq D$ (on choisit $\gamma_0 = \mathrm{id}$ et $\gamma_N = \gamma$). Posons $\sigma_i = \gamma_i^{-1} \circ \gamma_{i+1}$, on a $\gamma = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{n-1}$ et l'inégalité triangulaire implique que

$$d(y, \sigma_i(y)) = d(\gamma_i(y), \gamma_{i+1}(y)) < 2D + \varepsilon \,. \qquad \blacksquare$$

Fin de la preuve du théorème 2.1. — Soient γ_1 et γ_2 deux éléments de Γ *qui ne commutent pas entre eux*. Par hypothèse, le sous-groupe $\langle \gamma_1 ; \gamma_2 \rangle$ engendré admet une représentation ρ dans le groupe fondamental d'une variété, de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité au moins égal à δ, telle que $\rho(\gamma_1)$ et $\rho(\gamma_2)$ ne commutent pas (sinon $\langle \rho(\gamma_1) ; \rho(\gamma_2) \rangle$ serait isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$ par le lemme 1.15). Posons $N = E(\frac{4}{\delta}) + 1$; la proposition 1.14 implique que l'un des deux semi-groupes engendrés par $\rho(\gamma_1^N)$ et $\rho(\gamma_2^{\pm N})$ est libre. Par conséquent, l'un des deux semi-groupes de Γ engendrés par γ_1^N et $\gamma_2^{\pm N}$ est libre ; notons L ce semi-groupe. Posons $\ell_1 = d(y, \gamma_1(y))$ et $\ell_2 = d(y, \gamma_2(y))$. La distance d_y définie par $d_y(\gamma, \gamma') = d(\gamma(y), \gamma'(y))$ est invariante par les translations à gauche et on a $d_y(e, \gamma_i^{\pm N}) \leq N d(y, \gamma_i(y)) \leq \left(\frac{4+\delta}{\delta}\right) \ell_i$. En appliquant les lemmes 2.3 et 2.4 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}(Y) \geq \mathrm{Ent}(L, d_y) &\geq \frac{\delta}{4+\delta} \sup_{a \in]0+\infty[} \left(\frac{1}{\ell_1 + a\ell_2} \left[(1+a)\,\mathrm{Log}(1+a) - a\,\mathrm{Log}\, a \right] \right) \\ &\geq \frac{\delta}{2(4+\delta)} \left[\frac{1}{\ell_1} \mathrm{Log}(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}) + \frac{1}{\ell_2} \mathrm{Log}(1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}) \right] . \qquad (1) \end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété *(o)* du théorème 2.1.

Si $\ell_1 \leq \varepsilon$, en faisant $a = (\frac{4+\delta}{\delta}) H \varepsilon$ dans la première inégalité de la formule (1), en majorant $\mathrm{Ent}(Y)$ par H et en minorant $\mathrm{Log}(1+a)$ par $\frac{a}{1+a}$, nous obtenons :

$$\frac{\ell_1}{\varepsilon} + (\frac{4+\delta}{\delta}) H \ell_2 \geq 1 - \mathrm{Log}\left(\frac{4+\delta}{\delta} H \varepsilon \right) ,$$

ce qui achève la preuve de la partie *(ii)* du théorème 2.1.

Par ailleurs, en remplaçant a par 1 dans la première inégalité de la formule (1), nous obtenons

$$H \geq \mathrm{Ent}(Y) > \frac{\delta\,\mathrm{Log}\,2}{4+\delta} \frac{1}{\mathrm{Max}(\ell_1, \ell_2)} .$$

Deux éléments γ_1 et γ_2 de Γ de longueur inférieure à $\left(\frac{\delta}{4+\delta} \frac{\mathrm{Log}\,2}{H} \right)$ commutent donc toujours, donc $\Gamma_\varepsilon(y)$ est abélien dès que $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \frac{\mathrm{Log}\,2}{H}$, ce qui prouve *(i)*.

Si le centre de Γ est réduit à l'élément neutre, pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe un élément γ du système générateur (formé par l'ensemble des $g \in \Gamma$ tels que $d(y, g(y)) < 2D + \tau$, où

$D = \sup_{z\in Y} d(\Gamma y, z)$, cf. le lemme 2.5) qui ne commute pas avec σ ; la propriété *(ii)* du théorème 2.1 implique alors que

$$2D + \tau > d(y, \gamma(y)) \geq \frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H}\operatorname{Log}\left(\frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{Hd(y,\sigma(y))}\right) ,$$

ce qui prouve *(iii)*. De même, il existe un couple d'éléments (de longueurs notées ℓ_1 et ℓ_2) de ce système générateur qui ne commutent pas. L'avant-dernière inégalité donne : $\frac{4+\delta}{\delta \operatorname{Log} 2} \operatorname{Ent}(Y, d) > \frac{1}{\operatorname{Max}(\ell_1, \ell_2)} \geq \frac{1}{2D+\tau}$, ce qui prouve *(iv)*. ■

Preuve de la proposition 2.2. — Posons $N = \left[\frac{4}{\delta}\right] + 1$ (resp. $N = 1$) suivant que Γ' est δ-épais (resp. est le groupe fondamental d'une surface compacte de genre $g \geq 2$). Le lemme 1.21 permet d'extraire de tout système générateur Σ de Γ une paire $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ telle que $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ ou $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ engendre un semi-groupe libre L (resp. un sous-groupe libre L) ; c'est le cas en particulier si Σ est le système générateur formé des $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(y, \gamma(y)) < 2D + \tau$ (cf. le lemme 2.5), où $D = \sup_{z\in Y} d(\Gamma y, z)$. Comme dans la formule (1), on applique les lemmes 2.3 et 2.4 (en y remplaçant a par 1 et ℓ_1 et ℓ_2 par le majorant $(2D + \tau)N$ des longueurs de γ_1^N et $\gamma_2^{\pm N}$), ce qui donne :

$$\operatorname{Ent}(Y, d) \geq \operatorname{Ent}(L, d_y) \geq \frac{C_0}{N(2D + \tau)} ,$$

où $C_0 = \operatorname{Log} 2$ (resp. $\operatorname{Log} 3$).
Ceci prouve *(i)* (resp. la remarque qui termine la proposition 2.2) en faisant tendre τ vers zéro. Les inégalités *(ii)* découlent de *(i)* en passant à l'infimum en y. ■

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le sous-groupe d'isométries Γ de (Y, d) admet une représentation injective quelconque (notée ρ) dans le groupe fondamental d'une variété compacte de courbure strictement négative quelconque (notée X). Rappelons que tout élément non trivial γ de $\pi_1(X)$ admet un unique axe (*i.e.* une géodésique $\tilde{c}$ du revêtement universel riemannien $\widetilde{X}$ de X globalement invariante par γ, et sur laquelle γ agit par translation, cf. le lemme 1.15). Supposons de plus que (Y, d, μ) vérifie les hypothèses du théorème 2.1 (en tout point $y \in Y$) et posons $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(4+\delta)H}$. Nous avons vu au théorème 2.1 *(i)* que $\Gamma_{\varepsilon_0}(y)$ est alors abélien pour tout y, donc $\rho[\Gamma_{\varepsilon_0}(y)] \simeq \{0\}$ ou $\mathbb{Z}$ d'après le lemme 1.15. *Posons* $\ell(y) = \inf_{\gamma\in\Gamma\smallsetminus\{\mathrm{id}\}}[d(y, \gamma y)]$ et *notons* Y_{ε_0} l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\ell(y) < \varepsilon_0$. Pour tout $y \in Y_{\varepsilon_0}$, le groupe $\rho[\Gamma_{\varepsilon_0}(y)]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et tous ses éléments ont donc le même axe, *que nous noterons* $\operatorname{axe}(y)$. Dans ce cas, on a le

2.6. Théorème. — *Pour tous les nombres réels positifs δ et H, pour tout espace métrique mesuré connexe (Y, d, μ) dont l'entropie est majorée par H, pour tout sous-groupe Γ, δ-non abélien, du groupe des isométries de (Y, d, μ), qui agit sans point fixe, dont toutes les orbites sont discrètes et qui admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété compacte X quelconque de courbure négative,* *(i) Il existe un $y \in Y$ tel que*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} [d(y, \gamma(y))] \geq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \frac{1}{H} \,;$$

(ii) Le sous-ensemble Y_{ε_0} des $y \in Y$ tels que $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} [d(y, \gamma(y))] < \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \frac{1}{H}$ est ouvert et l'application $y \mapsto \mathrm{axe}(y)$ est définie, équivariante sur Y_{ε_0} (pour l'action de $\rho(\Gamma)$ sur les géodésiques de $\widetilde{X}$), et constante sur chaque composante connexe de Y_{ε_0}.

Preuve. — (Comparer avec la preuve obtenue, dans le cas de courbure négative minorée, par G. Margulis, cf. [B-Z], pp.281–282) : en vertu du lemme 2.3 et de la borne sur l'entropie, le nombre d'éléments de $(\Gamma y \cap B(y, R))$ est fini pour tout R ; on en déduit que, pour tout $y \in Y_{\varepsilon_0}$, l'ensemble $\Sigma_{\varepsilon_0}(y)$ des $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ tels que $d(y, \gamma(y)) < \varepsilon_0$ (où $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \frac{1}{H}$) est fini et non vide (par définition de Y_{ε_0}). Par continuité de la distance, $\Sigma_{\varepsilon_0}(z)$ contient $\Sigma_{\varepsilon_0}(y)$ pour tout point $z \in Y$ suffisamment voisin de y, donc Y_{ε_0} est ouvert ; de plus comme $\rho[\Gamma_{\varepsilon_0}(z)]$ est abélien (par le théorème 2.1 *(i)*) et non trivial, tous ses éléments (dont, en particulier, les éléments de $\rho[\Gamma_{\varepsilon_0}(y)]$, qui est inclus dans $\rho[\Gamma_{\varepsilon_0}(z)]$) ont le même axe d'après le lemme 1.15 ; on a donc $\mathrm{axe}(z) = \mathrm{axe}(y)$ pour tout z suffisamment voisin de y. L'image réciproque (par l'application $y \mapsto \mathrm{axe}(y)$) d'une géodésique donnée est donc ouverte ; elle est aussi fermée comme complémentaire de la réunion des images réciproques de toutes les autres géodésiques. On en déduit que l'application $y \mapsto \mathrm{axe}(y)$ est constante sur chaque composante connexe de Y_{ε_0}.
Par ailleurs, pour tout $g \in \Gamma$, on a $\Gamma_{\varepsilon_0}(g(y)) = g\Gamma_{\varepsilon_0}(y)g^{-1}$ par définition des Γ_{ε_0}. L'axe c de y est la géodésique de $\widetilde{X}$ invariante par $\rho(\Gamma_{\varepsilon_0}(y))$, par conséquent la géodésique $\rho(g) \circ c$ est invariante par $\rho(g)\rho(\Gamma_{\varepsilon_0}(y))\rho(g^{-1})$, donc par $\rho(\Gamma_{\varepsilon_0}[g(y)])$, elle coïncide donc avec l'axe de $g(y)$. On a donc $\mathrm{axe}[g(y)] = \rho(g)[\mathrm{axe}(y)]$, d'où l'équivariance et la preuve de *(ii)*.
S'il n'existe pas de point y tel que $\ell(y) \geq \varepsilon_0$, alors $Y_{\varepsilon_0} = Y$ est connexe et l'application $y \mapsto \mathrm{axe}(y)$ est constante sur Y entier ; en particulier on a, pour tout $g \in \Gamma$, $\mathrm{axe}(y) = \mathrm{axe}[g(y)] = \rho(g)(\mathrm{axe}(y))$. Tous les éléments de $\rho(\Gamma)$ ayant le même axe invariant, $\rho(\Gamma)$ serait abélien d'après le lemme 1.15, donc Γ le serait aussi, ce qui contredirait l'hypothèse. On en déduit l'existence d'un point $y \in Y$ tel que $\ell(y) \geq \varepsilon_0$, ce qui prouve *(i)*. ∎

2.7. Remarque. — Dans le théorème 2.6 *(i)* (et dans les théorèmes des chapitres suivants qui comportent cette hypothèse), l'hypothèse :

(H_1) Γ *admet une représentation injective ρ dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte X de courbure négative*

peut être remplacée par l'hypothèse :

(H_2) *la relation de commutation « $\sim$ » (i.e. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$) est transitive sur $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.*

qui est plus faible (et surtout plus intrinsèque), les autres hypothèses restant inchangées. La conclusion est toujours qu'il existe un $y \in Y$ tel que $\ell(y) \geq \varepsilon_0$, où $\ell(y) = \operatorname*{Inf}_{\gamma \in \Gamma^*} \left[d(y, \gamma(y)) \right]$ et où $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \frac{1}{H}$.

Preuve. — Montrons d'abord que (H_1) implique (H_2). En effet, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ équivaut à $\rho(\gamma_1) \sim \rho(\gamma_2)$, qui se traduit (d'après le lemme 1.15) par l'égalité des géodésiques invariantes par $\rho(\gamma_1)$ et par $\rho(\gamma_2)$. Cette égalité étant transitive, (H_1) implique (H_2).

Supposons maintenant qu'on substitue (H_2) à (H_1) dans les hypothèses du théorème 2.6. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence dont chaque classe (quand on lui rajoute l'élément neutre) est un sous-groupe abélien maximal de Γ. Le groupe $\Gamma_{\varepsilon_0}(y)$ étant abélien (par le théorème 2.1 *(i)*), s'il est non trivial, alors $\Gamma_{\varepsilon_0}(y) \smallsetminus \{e\}$ est entièrement inclus dans une seule classe d'équivalence, que nous noterons $C(y)$. En reprenant les notations et la démarche de la preuve du théorème 2.6, puisque $\Gamma_{\varepsilon_0}(y) \subset \Gamma_{\varepsilon_0}(z)$ pour tout z voisin de y, l'application $y \mapsto C(y)$ est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de Y_{ε_0}. Supposons que $\ell(y) < \varepsilon_0$ pour tout $y \in Y$, alors Y_{ε_0} est égal à Y, donc connexe, et $C(y) \cup \{e\}$ est un groupe abélien constant, que nous noterons Γ_0. Comme $\Gamma_{\varepsilon_0}(gy) = g\Gamma_{\varepsilon_0}(y)g^{-1}$, on a $C(gy) = gC(y)g^{-1}$, d'où $\Gamma_0 = g\Gamma_0 g^{-1}$ et, pour tout $(\gamma, g) \in \Gamma_0 \times \Gamma$, $g\gamma g^{-1}$ commute avec γ. Supposons qu'il existe un couple $(\gamma, g) \in \Gamma_0 \times \Gamma$ tel que g ne commute pas avec γ : comme Γ est δ-non abélien, il existe une variété compacte X de courbure négative et un morphisme ρ' du sous-groupe $\langle g; \gamma \rangle$ (engendré par g et γ) dans $\pi_1(X)$ tel que $\Gamma' = \rho(\langle g; \gamma \rangle)$ soit non abélien, ce qui implique que $\rho(g)$ et $\rho(\gamma)$ ne commutent pas. Comme (H_1) implique (H_2), la relation de commutation (que nous noterons encore « $\sim$ ») est transitive sur $(\Gamma')^*$; notons C_0' la classe d'équivalence de $\rho(\gamma)$ et posons $\Gamma_0' = C_0' \cup \{\mathrm{id}\}$. Pour tout $\gamma' \in C_0'$, on a $\gamma' \sim \rho(\gamma)$, ce qui implique que $\rho(g)\gamma'\rho(g)^{-1} \sim \rho(g)\rho(\gamma)\rho(g)^{-1} \sim \rho(\gamma)$, les mêmes relations restant vérifiées quand on remplace g par g^{-1}. L'application $\gamma' \mapsto \rho(g)\gamma'\rho(g)^{-1}$ est donc un automorphisme de Γ_0', qui envoie un générateur τ de Γ_0' sur $\tau^{\pm 1}$ (puisque $\Gamma_0' \simeq \mathbb{Z}$ d'après le lemme 1.15). On en déduit que $\rho(g)^2\tau\rho(g)^{-2} = \tau$, donc que $\rho(\gamma) \sim \tau \sim \rho(g)^2 \sim \rho(g)$, car $\rho(g)^2 \neq \mathrm{id}$ dans $\pi_1(X)$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\rho(\gamma)$ et $\rho(g)$ ne commutent pas. On en déduit que tous les $g \in \Gamma$ commutent avec tous les $\gamma \in \Gamma_0$, donc que $\Gamma = \Gamma_0$, ce qui est contradictoire avec la non abélianité de Γ. La seule issue est donc qu'il existe un $y \in Y$ tel que $\ell(y) \geq \varepsilon_0$. ■

3. Le cas des variétés riemanniennes

Considérons une variété riemannienne connexe (Y, g) et son revêtement universel riemannien $\pi : (\widetilde{Y}, \tilde{g}) \to (Y, g)$. Nous appellerons entropie volumique de (Y, g) l'entropie de l'espace métrique mesuré $\widetilde{Y}$, muni de la distance $d_{\tilde{g}}$ et de la mesure riemannienne $dv_{\tilde{g}}$. Elle sera notée $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$, ou $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté. Pour tout $y \in Y$, *nous noterons* $\ell(y)$ *la longueur du plus petit lacet (non homotope à zéro) de point-base* y, *et* $\mathrm{inj}(y)$ *le rayon d'injectivité de l'application exponentielle* centrée en y. On a toujours $\ell(y) \geq 2\,\mathrm{inj}(y)$, l'égalité ayant lieu en particulier lorsque la courbure sectionnelle est négative ou nulle. Nous noterons $\mathrm{inj}(Y, g)$ l'infimum de $\mathrm{inj}(y)$ quand y parcourt Y.

Le groupe fondamental Γ de Y est le groupe des isomorphismes du revêtement, il agit donc par isométries sur $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, il est isomorphe au groupe $\pi_1(Y, y)$ des classes d'homotopie de lacets de point-base y. On a

$$(3.0) \qquad \inf_{\gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{id}\}} d(\tilde{y}, \gamma(\tilde{y})) = \ell(y) \geq 2\,\mathrm{inj}(y) > 0\,.$$

Les boules géodésiques de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ sont de volume non nul, Γ agit sans point fixe sur $\widetilde{Y}$ et l'orbite $\Gamma\tilde{y}$ de tout point $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ est discrète, on peut donc appliquer les résultats de la section 2 en considérant Γ comme un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace métrique mesuré $(\widetilde{Y}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$; ceci nous donne les résultats suivants :

3.1. Corollaire. — *Pour tout $\delta > 0$, pour toute variété connexe Y dont le groupe fondamental est δ-non abélien, et pour toute métrique riemannienne g sur Y, on a :*

(o) $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) > 0$,

(i) $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ *est abélien pour tout* $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ *et tout* $\varepsilon \leq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta} \frac{1}{\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g)}$,

La preuve est immédiate, les propriétés *(o)* et *(i)* du corollaire 3.1 étant les traductions (dans le cas des variétés riemanniennes) des propriétés *(o)* et *(i)* du théorème 2.1 (en y remplaçant le majorant H de l'entropie par l'entropie elle-même).

3.2. Corollaire. — *Pour tout $\delta > 0$, pour toute variété connexe Y^n dont le groupe fondamental est finiment engendré , pour toute variété riemannienne compacte (X^m, h), de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité minoré par δ,*

(i) Soit toute application continue f de Y^n dans X^m est homotope à une application de la forme $f_2 \circ f_1$, où f_1 est continue de Y^n dans S^1 et où f_2 est continue de S^1 dans X^m ;

(ii) Soit l'entropie algébrique du groupe fondamental de Y^n est minorée par $\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8+2\delta}$ et toute métrique g sur Y vérifie :

$$\mathrm{diam}(Y, g)\, \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8 + 2\delta}\,.$$

Remarque.

(1) Lorsque $m = 2$ (et n quelconque), l'hypothèse $\mathrm{inj}(X, h) \geq \delta$ n'est plus nécessaire et le corollaire 3.2 reste valable lorsqu'on y remplace $\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8+2\delta}$ par $\frac{1}{2} \operatorname{Log} 3$.

(2) Une version plus faible du corollaire 3.2 est la suivante : étant donné un groupe quelconque Γ, qui est le groupe fondamental d'au moins une variété compacte de courbure sectionnelle strictement négative, il existe une constante $d = d(\Gamma)$ (ne dépendant que de Γ) telle que, sur toute variété Y telle que $\pi_1(Y)$ admette un morphisme ρ non trivial dans Γ (*i.e.* l'image de $\rho : \pi_1(Y) \to \Gamma$ est différente de $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$), toute métrique g telle que $\mathrm{Ricci}_g \geq -\frac{1}{n-1}$ satisfait à l'inégalité : $\mathrm{diam}(Y, g) \geq d(\Gamma)$.
En effet, d'après la remarque 1.2 (2), Γ est δ-épais pour une valeur $\delta = \delta(\Gamma)$ ne dépendant que de Γ. En remarquant que (Y, g) est le quotient de son revêtement universel $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ par l'action (discrète, sans points fixes) de $\pi_1(Y)$, la proposition 2.2 (ii) démontre que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)\, \mathrm{diam}(Y, g) \geq d(\Gamma)$, où $d(\Gamma) = \frac{\delta(\Gamma) \log 2}{8+2\delta(\Gamma)}$. On conclut en remarquant que le théorème de comparaison de R. L. Bishop permet de majorer le volume des boules de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ en s'appuyant sur l'hypothèse $\mathrm{Ricci}_g \geq -\frac{1}{n-1}$, ce qui donne $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \leq 1$.

(3) Une autre version affaiblie du corollaire 3.2 est la suivante : pour tout $\alpha \in \left[0, \frac{\operatorname{Log} 2}{2\sqrt{n-1}}\right[$, si une variété Y^n admet une métrique g telle que $\mathrm{Ricci}_{\min} \mathrm{diam}(g)^2 > -\alpha^2$ (resp. telle que $\mathrm{Ricci}_{\min} \mathrm{diam}(g)^2 > -\frac{(\operatorname{Log} 3)^2}{4(n-1)}$), où $\mathrm{Ricci}_{\min}$ désigne l'infimum des valeurs propres du tenseur de courbure de Ricci, alors toute application continue f de Y^n dans une variété compacte arbitraire X^m de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité minoré par $\frac{8\alpha\sqrt{n-1}}{\operatorname{Log} 2 - 2\alpha\sqrt{n-1}}$ (resp. dans une surface compacte X^2 de genre supérieur ou égal à 2) est homotope soit à une application constante, soit à une application à valeurs dans le cercle (plus précisément, à valeurs dans une des géodésiques périodiques de X^m). En particulier, si le premier nombre de Betti de Y^n est nul, toute application continue f de Y^n dans X^m est homotope à une application constante.
En effet, le théorème de R.L. Bishop et le raisonnement fait dans la remarque (2) prouvent que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g)\, \mathrm{diam}(Y^n, g)$ est alors majoré par $\alpha\sqrt{n-1}$ (resp. par $\frac{1}{2} \operatorname{Log} 3$), ce qui prouve que nous ne sommes pas dans le cas *(ii)* du corollaire 3.2, donc que nous sommes dans le cas *(i)*, ce qui conclut. Si f est une application à valeurs dans le cercle, celle-ci est homotope à une application harmonique f_0, et df_0 fournit une 1-forme harmonique sur (Y, g) : ce cas n'est donc possible que si le premier nombre de Betti de Y est non nul ou si $df_0 = 0$.

(4) Un autre corollaire du corollaire 3.2 est une amélioration du lemme classique de Margulis sur le volume en courbure négative. Plus précisément, supposons que (Y^n, g) est n'importe quelle variété riemannienne de courbure sectionnelle strictement comprise entre -1 et 0, le lemme de Margulis classique implique que, dans ce cas, $\mathrm{Vol}(Y^n, g) \geq C_0(n)$, où $C_0(n)$ est une constante universelle strictement positive qui ne dépend que de la dimension de Y^n. Si nous supposons de plus l'existence d'une variété

riemannienne compacte (X^m, h), de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1 et de rayon d'injectivité minoré par δ (resp. l'existence d'une surface X^2 de genre supérieur ou égal à 2) et d'une application $f : Y^n \to X^m$ qui n'est pas homotope à une application constante ou à valeurs dans un cercle (voir ci-dessus pour plus de détails), alors, si $n \geq 4$, $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g)\,\mathrm{Vol}(Y^n, g)^r$ (où $r = 1$ si $n \geq 8$ et $r = 3$ si $4 \leq n \leq 7$) est minoré par $\frac{1}{C(n)} \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8+2\delta}$ (resp. par $\frac{1}{2C(n)} \operatorname{Log} 3$), où $C(n)$ est la constante définie au théorème 1.9. Ce résultat découle en effet du corollaire 3.2 (qui minore $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g)\,\mathrm{diam}(Y^n, g)$) et du théorème 1.9 (qui majore $\mathrm{diam}(Y^n, g)$ en fonction du volume).
On notera que, puisque $0 > \sigma_g \geq -1$, on a $0 < \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g) \leq n-1$, donc le résultat ci-dessus fournit bien une minoration universelle du volume. Il montre de plus que, pour que l'entropie devienne petite, il faut que le volume tende vers l'infini.

Preuve du corollaire 3.2. — Notons Γ et Γ' les groupes fondamentaux de Y^n et X^m. Toute application continue f induit un morphisme $f_* : \Gamma \to \Gamma'$ et un relevé $\tilde f : \widetilde Y \to \widetilde X$. Si $f_*(\Gamma)$ est contenue dans un sous-groupe de Γ' de la forme $\{\tau^k / k \in \mathbb{Z}\}$ et si $\tilde c$ est la géodésique du revêtement universel $(\widetilde X^m, \tilde h)$ de (X^m, h) qui est invariante par τ, la projection orthogonale p de $\widetilde X^m$ sur $\tilde c$ commute avec τ donc avec $f_*(\Gamma)$. L'application $p \circ \tilde f : \widetilde Y \to \tilde c \simeq \mathbb{R}$ vérifie donc $p \circ \tilde f \circ \gamma = f_*(\gamma) \circ p \circ \tilde f$ et passe donc au quotient en une application $f_1 : Y \to \mathbb{R}/(\mathbb{Z}\, \ell(\tau))$. On définit alors f_2 comme l'application canonique du cercle sur la géodésique périodique $\pi \circ \tilde c = \tilde c / \tau^{\mathbb{Z}}$.
Dans le cas contraire, $f_*(\Gamma)$ n'est isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$, on peut donc appliquer la proposition 1.22, puis la proposition 2.2 (ainsi que la remarque qui la suit) qui prouvent *(ii)* (et la remarque qui suit le corollaire 3.2). ∎

3.3. Corollaire. — *Pour tout $\delta > 0$, pour toute variété connexe Y^n, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété quelconque X^m de courbure négative, on a :*

(i) Pour toute métrique riemannienne g sur Y^n,

$$\left(\sup_{y \in Y} \ell(y)\right) \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g) \geq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4 + \delta} \,,$$

(ii) Pour toute métrique riemannienne g sur Y^n dont l'entropie volumique est majorée par H et dont le revêtement universel riemannien ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à L, on a :

$$\mathrm{vol}(Y^n, g) \geq C_n \left[\min\left(L, \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(4+\delta)} \frac{1}{H} \right) \right]^n \,,$$

si, de plus, la courbure sectionnelle σ vérifie $\sigma \leq K^2$, on a

$$\sup_{y \in Y} \mathrm{inj}(y) \geq \min\left(\frac{\pi}{K}, \frac{L}{2}, \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{2(4+\delta)} \frac{1}{H} \right) .$$

(iii) En particulier, pour tout métrique g, de courbure négative ou nulle (ou, plus généralement, si g est sans points conjugués), on a :

$$\sup_{y\in Y} \mathrm{inj}(y)\, \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g) \geq \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{2(4+\delta)}$$

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y^n, g)^n \operatorname{Vol}(Y^n, g) \geq \left(\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta}\right)^n \frac{\operatorname{Vol}(S^{n-1})}{2n\pi^{n-1}} .$$

Exemple. — Soit Y une variété compacte qui admet une métrique g_0 de courbure strictement négative. Notons K_0 le maximum de sa courbure sectionnelle et $\mathrm{inj}(g_0)$ son rayon d'injectivité et posons $\delta = \mathrm{inj}(g_0)\sqrt{-K_0}$. Alors, pour cette valeur de δ, *les propriétés des corollaires 3.1 et 3.2, ainsi que celles décrites dans les corollaires qui suivent, sont vérifiées pour toute métrique riemannienne g sur Y*, même si celle-ci n'est pas de courbure négative (en effet, le groupe fondamental de Y est alors δ-épais, cf. la section 1).

Preuve du corollaire 3.3. — Posons $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{2(4+\delta)} \frac{1}{\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g)}$. L'égalité (3.0) et l'inégalité *(i)* du théorème 2.6 impliquent l'existence d'un $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ tel que $\ell[\pi(\tilde{y})] \geq 2\varepsilon_0$, ce qui démontre l'inégalité *(i)* du corollaire 3.3.
Posons $R = \mathrm{Min}(\frac{L}{2}, \varepsilon_0)$. Le corollaire 2.6 *(i)* assure l'existence d'un point $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ tel que l'application π de revêtement soit une isométrie de la boule $\widetilde{B}(\tilde{y}, R)$ de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ sur la boule $B(y, R)$ de (Y, g). Le théorème principal de [Sa] assure que toute boule de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, de rayon R inférieur ou égal à $\frac{L}{2}$, a un volume supérieur à $C_n R^n$. Ceci prouve la première inégalité du corollaire 3.3 *(ii)* en remarquant que $\mathrm{vol}(Y, g) \geq \mathrm{vol}\, B(y, R)$.
Si la courbure sectionnelle est inférieure à K^2, en tout point y où le rayon d'injectivité est inférieur à $\frac{\pi}{K}$, le rayon d'injectivité ne peut être réalisé par un point conjugué, il est donc obligatoirement égal à la moitié de la longueur du plus petit lacet-géodésique de point-base y. Si de plus $\mathrm{inj}(y) < L/2$, ce lacet ne peut être homotope à zéro, sinon il se relèverait en un lacet de longueur inférieure à L dans $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, on a donc alors $\mathrm{inj}(y) = \frac{1}{2}\ell(y)$ et la deuxième inégalité du corollaire 3.3 *(ii)* découle du fait que $\sup_{y\in Y} \ell(y) \geq 2\varepsilon_0$, d'après le corollaire 3.3 *(i)*.
Une métrique de courbure sectionnelle négative ou nulle vérifie les hypothèses du corollaire 3.3 *(ii)* pour tout $L < +\infty$ et tout $K > 0$. On obtient les inégalités du corollaire 3.3 *(iii)* en faisant tendre K vers zéro, L vers l'infini et en posant $H = \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$ dans les inégalités du corollaire 3.3 *(ii)*. L'amélioration de la constante C_n vient du théorème de comparaison de Rauch qui remplace le recours à [Sa]. ■

Les corollaires 3.1 et 3.3 suggèrent qu'on peut décomposer Y en «parties épaisses» (les zones où $\ell(y)$ est minoré) et «parties minces» (les zones où $\ell(y)$ est «petit»). L'énoncé suivant précise cette idée et décrit la géométrie des «parties minces». Rappelons que $\ell(y)$ est la longueur du plus petit lacet non homotope à zéro, de point-base y.

3.4. COROLLAIRE. — *Fixons des nombres réels positifs arbitraires δ et H et posons $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(4+\delta)H}$. Considérons n'importe quelle variété connexe Y qui a les propriétés topologiques suivantes : son groupe fondamental Γ est δ-non abélien et admet une représentation injective (notée ρ) dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte X de courbure négative. Considérons sur Y n'importe quelle métrique riemannienne g dont l'entropie volumique est majorée par H. On appelle «partie mince » de Y (notée Y_{mince}) l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\ell(y) < \varepsilon_0$. Les composantes connexes de Y_{mince} étant notées $(Y^i_{\text{mince}})_{i\in I}$, chacune de ces composantes connexes a les propriétés suivantes :*

(i) Il existe un ouvert $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ de $\widetilde{Y}$ tel que la restriction π_i de π à $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ soit un revêtement de Y^i_{mince}, et coïncide avec le quotient de $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ par l'action d'un sous-groupe Γ_i de Γ isomorphe à $\mathbb{Z}$. [Plus précisément, $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ est une des composantes connexes de $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0} = \left\{\tilde{y} \in \widetilde{Y} \mid \operatorname*{Inf}_{\gamma\in\Gamma\smallsetminus\{\text{id}\}} d_{\tilde{g}}(\tilde{y},\gamma\tilde{y}) < \varepsilon_0\right\}$ et Γ_i est le sous-groupe de Γ qui laisse $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ stable].

(ii) Pour tout $y \in Y^i_{\text{mince}}$, l'image de $\pi_1(Y^i_{\text{mince}}, y)$ dans $\Gamma \simeq \pi_1(Y, y)$ (par le morphisme associé à l'inclusion) coïncide avec Γ_i, est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et contient $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde{z})$ pour tout $\tilde{z} \in \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$.

(iii) L'application $\tilde{y} \mapsto \operatorname{axe}(\tilde{y})$ est constante sur $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ et son image est l'unique géodésique $\tilde{c}_i$ de X invariante par $\rho(\Gamma_i)$. Cette application passe au quotient en une application de Y_{mince} dans l'ensemble des géodésiques périodiques de X, constante sur chaque composante connexe.

(iv) Si Y est compacte (ou, plus généralement, si $\liminf[\ell(y)] \geq \varepsilon_0$ quand y tend vers l'infini), Y^i_{mince} contient au moins une géodésique périodique de (Y, g), non homotope à zéro, dont la longueur réalise le minimum de $\ell(z)$ quand $z \in Y^i_{\text{mince}}$.

(v) Si le revêtement universel $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ est de courbure sectionnelle majorée par H^2 et ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à $1/H$, alors Y_{mince} est l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\operatorname{inj}(y) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, le volume de chacune des composantes connexes de Y_{mince} qui contiennent au moins un point y tel que $\operatorname{inj}(y) \leq \varepsilon_0/4$ (donc au moins une géodésique périodique de longueur inférieure ou égale à $\frac{\varepsilon_0}{2}$) est minoré par C/H^n, où $C = \operatorname{vol}(S^{n-1}) \int_0^{\alpha/4} (\sin t)^{n-1}\, dt$, et où $\alpha = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{4+\delta}$, et leur nombre est majoré par $\frac{1}{C} \operatorname{vol}(Y, g) \operatorname{Ent}_{\text{vol}}(Y, g)^n$.

3.5. REMARQUES, EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES. — Dans le corollaire 3.4, on n'impose pas que la dimension de X soit égale à celle de Y. Les propriétés énoncées dans le corollaire 3.4 sont bien connues pour les variétés de courbure strictement négative (voir par exemple [B-G-S]). Nous insistons ici sur le fait qu'elles restent valables pour des métriques dont la courbure est de signe quelconque (pourvu que leur entropie soit bornée) et qu'elles ne dépendent que des propriétés algébriques «d'hyperbolicité » du groupe fondamental. Par exemple, dès qu'une variété Y admet une métrique g_0 de courbure négative, les propriétés du corollaire 3.4 sont vérifiées pour toute autre métrique g sur Y d'entropie majorée.

Cependant certaines autres propriétés, valables pour les «parties minces» des variétés de courbure négative (éventuellement minorée), ne peuvent être attendues ici, sous les hypothèses du corollaire 3.4. En particulier :

— les composantes connexes Y^i_{mince} de la partie mince ne sont généralement pas des cylindres topologiques car $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ n'est généralement pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ (voir cependant les propriétés *(i)* et *(ii)* du corollaire 3.4). On peut construire un contre-exemple en partant d'une surface hyperbolique (Σ, g_0) qui possède une petite géodésique périodique c de longueur $\varepsilon \ll 1$. L'ensemble des points y où le rayon d'injectivité $\text{inj}_{g_0}(y)$ est inférieur à $\varepsilon_0/2$ est alors un voisinage tubulaire U de cette géodésique, de rayon $L \geq \text{Log}(\varepsilon_0/\varepsilon)$, qui est difféomorphe à $]-L, L[\times S^1$. Notons $\rho(y) = d_{g_0}(y, c)$ la distance à la géodésique c et choisissons des points $y_1, \ldots, y_N \in U$ tels que $\text{inj}_{g_0}(y_i) \leq \varepsilon_0/4$ et $|\rho(y_i) - \rho(y_j)| \geq 5\varepsilon^2$ pour $i \neq j$; posons $V = \coprod_{i=1}^{N} B_{g_0}(y_i, \varepsilon^2)$ et $W = \coprod_{i=1}^{N} B_{g_0}(y_i, 2\varepsilon^2)$. Considérons une fonction différentiable $f : \Sigma \to [1, +\infty[$ telle que $f = 1/\varepsilon^2$ sur V et $f = 1$ sur $\Sigma \setminus W$. La métrique $g = f^2 g_0$ vérifie $g \geq g_0$, on a donc, dans le revêtement universel riemannien, $B_{\tilde{g}}(\tilde{y}, R) \subset B_{\tilde{g}_0}(\tilde{y}, R)$, donc $\text{Ent}_{\text{vol}}(g) \leq \text{Ent}_{\text{vol}}(g_0) = 1$. Nous pouvons donc choisir $H = 1$, ce qui donne dans le cas présent : $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{4+\delta} \text{Log}\, 2$. Tout lacet non homotope à zéro de point-base y_i doit sortir de la boule $B_{g_0}(y_i, \varepsilon^2)$ (puisque $\varepsilon^2 < \varepsilon \leq \text{inj}_{g_0}(y_i)$), donc sa longueur (mesurée par la métrique g) est supérieure ou égale à 2. On a donc $Y^i_{\text{mince}} = U \setminus \left(\coprod_{i=1}^{N} V_i\right)$, où chaque V_i est un voisinage fermé de y_i contenu dans $B_{g_0}(y_i, 2\varepsilon^2)$ qui, pour un choix ad hoc de f, est homéomorphe à un disque. Il est évident que $\pi_1(Y^i_{\text{mince}}, y)$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$, mais au groupe libre à $(N+1)$ générateurs .

— la longueur de chaque composante connexe Y^i_{mince} de la partie mince n'est généralement pas minorée, même si l'entropie est majorée (voir cependant à ce sujet le corollaire 3.8 qui suit). Un contre-exemple peut être construit en modifiant de nouveau la métrique de la surface hyperbolique (Σ, g_0) de l'exemple qui précède : paramétrons U en envoyant chaque point y sur le couple $(r, c(s)) \in]-L, L[\times S^1$, où $r = \rho(y)$ et où $c(s)$ est la projection géodésique orthogonale (associée à la métrique g_0) de y sur la géodésique périodique c, paramétrée par $[0, 2\pi]$. On a alors $g_0 = dr^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}(\text{ch}\, r)^2 ds^2$ en tout point de U. Considérons $I = \mathbb{Z} \cap [-L, L-1]$ et une fonction différentiable $u : [-L, L] \to [1, +\infty[$ qui vérifie

$$\begin{cases} u = 1 & \text{au voisinage de } -L \text{ et } L \text{ et sur } \coprod_{k \in I} [k - \varepsilon^2, k + \varepsilon^2] \\ u = 1/\varepsilon & \text{sur } \coprod_{k \in I} [k + 2\varepsilon^2, k + 1 - 2\varepsilon^2] \end{cases}$$

et modifions la métrique g_0 sur U en la transformant en la métrique g, où $g = dr^2 + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} u(r)^2 (\operatorname{ch} r)^2 ds^2$. Pour tout $k \in I$ et tout $y \in \rho^{-1}(\{k + \frac{1}{2}\})$, tout lacet γ de point-base y soit sort de $\rho^{-1}([k + 2\varepsilon^2, k + 1 - 2\varepsilon^2])$, et alors sa longueur est supérieure ou égale à $2(\frac{1}{2} - 2\varepsilon^2) = 1 - 4\varepsilon^2$, soit reste dans $\rho^{-1}([k + 2\varepsilon^2, k + 1 - 2\varepsilon^2])$ et alors, s'il n'est pas homotope à zéro, il doit faire le tour complet du cylindre, c'est-à-dire que (en coordonnées) $\gamma(t) = (r(t), s(t))$ où s varie (au moins) de 0 à 2π. Comme $g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{1/2} \geq \frac{\varepsilon}{2\pi} u(r(t)) \operatorname{ch}(r(t)) |s'(t)| \geq \frac{1}{2\pi} |s'(t)|$, on obtient que la g-longueur de γ est au moins égale à 1. On a donc $\ell(\gamma) \geq 1 - 4\varepsilon^2 > \varepsilon_0$ pour tout $y \in \rho^{-1}(\{k + \frac{1}{2}\})$, donc $(Y_{\text{mince}} \cap U)$ a une composante connexe dans chaque portion $U_k = \rho^{-1}(]k + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}[)$ du cylindre. De plus, la longueur de chaque composante connexe ne tend pas vers l'infini quand $\varepsilon \to 0_+$, comme c'est le cas pour une surface de courbure négative minorée.

— il n'y a généralement pas unicité de «la» géodésique périodique dont l'existence est prouvée (par le corollaire 3.4 *(iv)*) dans chaque composante connexe de Y_{mince}. Un contre-exemple est obtenu en reprenant l'exemple qui précède et en posant $u = 2$ (au lieu de $\frac{1}{\varepsilon}$) sur $\coprod_{k \in I} [k + 2\varepsilon^2, k + 1 - 2\varepsilon^2]$. Sur chaque intervalle $]k + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}[$, on fait alors apparaître un minimum local de $r \to u(r) \operatorname{ch}(r)$ (noté r_k) et la courbe $s \mapsto (r_k, c(s))$ est une géodésique périodique, alors que Y^i_{mince} est un cylindre long.

Le lemme suivant est établi en préliminaire à la preuve du corollaire 3.4.

3.6. Lemme. — *Soit V_0 un ouvert connexe quelconque d'une variété Y, soit U_0 une composante connexe de $\pi^{-1}(V_0)$ dans son revêtement universel $\widetilde{Y}$. Alors*

(i) La restriction π_0 de π à U_0 est un revêtement de U_0 sur V_0 ;

(ii) Le sous-groupe Γ_0 des éléments γ du groupe fondamental Γ tels que $\gamma(U_0) = U_0$ est tel que $V_0 = U_0/\Gamma_0$, où l'application de passage au quotient coïncide avec π_0. De plus, pour tout $\tilde{y} \in U_0$, $\Gamma_0 = \{\gamma / \gamma(\tilde{y}) \in U_0\}$;

(iii) Pour tout $y \in V_0$ et tout $\tilde{y} \in \pi_0^{-1}(\{y\})$, l'isomorphisme $\varphi_{\tilde{y}}$ entre Γ et $\pi_1(Y, y)$ ($\varphi_{\tilde{y}}(\gamma)$ étant défini comme la classe du lacet $\pi \circ \tilde{c}$, où $\tilde{c}$ est une courbe joignant $\tilde{y}$ à $\gamma(\tilde{y})$) envoie Γ_0 sur $i_*[\pi_1(V_0, y)]$, où i_* est le morphisme de $\pi_1(V_0, y)$ dans $\pi_1(Y, y)$ induit par l'injection canonique $i : V_0 \hookrightarrow Y$. Si Γ_0 est abélien, l'identification entre Γ_0 et $i_*[\pi_1(V_0, y)]$ ainsi obtenue ne dépend que de y et pas du choix de $\tilde{y} \in \pi_0^{-1}(y)$.

La preuve de ce lemme est relativement classique et laissée au lecteur, qui pourra noter qu'on a toujours soit $\gamma(U_0) = U_0$, soit $\gamma(U_0) \cap U_0 = \emptyset$ et que, par ailleurs, $\varphi_{\gamma\tilde{y}}(\gamma') = \varphi_{\tilde{y}}(\gamma^{-1}\gamma'\gamma)$.

Preuve du corollaire 3.4. — Posons $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(4+\delta)H}$. L'égalité (3.0) implique que $\tilde{y} \in \widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$ si, et seulement si, $\pi(\tilde{y}) \in Y_{\text{mince}}$. D'où on déduit que $\pi^{-1}(Y_{\text{mince}}) = \widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$. D'après le corollaire 3.1 *(i)* et le lemme 1.15, $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour tout $\tilde y \in \widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$. D'après le théorème 2.6 *(ii)*, $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$ est un ouvert de $\widetilde{Y}$ sur lequel l'application qui, à chaque $\tilde y \in \widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$, associe son axe (*i.e.* l'unique géodésique de $\widetilde{X}$ invariante par les éléments de $\rho([\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y)])$ est définie, équivariante et constante sur chacune des composantes connexes de $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$. Puisque π est ouverte, l'application $\tilde y \to \operatorname{axe}(\tilde y)$ passe au quotient en une application de Y_{mince} dans l'ensemble des géodésiques périodiques de X qui est toujours localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de Y_{mince}. Nous décrirons plus précisément cette application plus loin.

Considérons maintenant l'une quelconque des composantes connexes de Y_{mince}, que nous noterons Y^i_{mince}. Fixons un point $z_i \in Y^i_{\text{mince}}$ et un point $\tilde z_i$ dans $\pi^{-1}(\{z_i\})$, et notons $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ (resp. $\overline{Y}^i_{\varepsilon_0}$) la composante connexe de $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$ (resp. de $\pi^{-1}(Y^i_{\text{mince}})$) qui contient $\tilde z_i$. Comme $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0} = \pi^{-1}(Y_{\text{mince}})$, on a $\overline{Y}^i_{\varepsilon_0} \subset \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$. Comme $\pi(\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0})$ est un connexe contenant z_i et inclus dans Y_{mince}, il est inclus dans Y^i_{mince}, donc $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ est un connexe contenant $\tilde z_i$ et inclus dans $\pi^{-1}(Y^i_{\text{mince}})$, donc $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0} \subset \overline{Y}^i_{\varepsilon_0}$. Comme $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ est une composante connexe de $\pi^{-1}(Y^i_{\text{mince}})$, on peut lui appliquer le lemme 3.6, qui démontre les propriétés *(i)* et *(ii)* du corollaire 3.4 à condition de prouver que Γ_i est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y) \subset \Gamma_i$. Remarquons que le lemme 3.6 donne également $\Gamma_i = \{\gamma / \gamma(\tilde y) \in \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}\}$ pour n'importe lequel des éléments $\tilde y \in \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$.

Soit $\tilde y$ un point quelconque de $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ et soit $\sigma \in \Gamma$ tel que $d_{\tilde g}(\tilde y, \sigma(\tilde y)) < \varepsilon_0$. Notons $\tilde c$ une géodésique minimisante qui joint $\tilde y$ à $\sigma(\tilde y)$. Pour tout point $\tilde c(t)$ de cette géodésique, on a :

$$
\begin{aligned}
(3.7) \qquad d(\tilde c(t), \sigma \circ \tilde c(t)) &\leq d(\tilde c(t), \sigma(\tilde y)) + d(\sigma(\tilde y), \sigma \circ \tilde c(t)) \\
&= (\text{longueur}(\tilde c) - t) + t = d(\tilde y, \sigma(\tilde y)) < \varepsilon_0 \,,
\end{aligned}
$$

l'égalité étant atteinte si, et seulement si, $\pi \circ \tilde c$ est une géodésique périodique de Y (car alors $\sigma \circ \tilde c$ prolonge $\tilde c$). Donc tout point $\tilde c(t)$ de la géodésique appartient à $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$, donc à la composante connexe $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ de $\tilde y$. On en déduit que $\sigma(\tilde y) \in \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$, donc que $\sigma \in \Gamma_i$. Ceci implique que le groupe $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y)$, engendré par les éléments σ de ce type, est inclus dans Γ_i.

Par ailleurs, pour tout $\gamma \in \Gamma_i$, puisque $\tilde y$ et $\gamma(\tilde y)$ appartiennent à une même composante connexe de $\widetilde{Y}_{\varepsilon_0}$, le théorème 2.6, *(ii)* implique que : $\operatorname{axe}(\tilde y) = \operatorname{axe}[\gamma(\tilde y)] = \rho(\gamma)[\operatorname{axe}(\tilde y)]$, donc que $\rho(\Gamma_i)$ est un sous-groupe discret du groupe des translations de la géodésique $\tilde c_i$ de $\widetilde{X}$ qui est l'axe commun à tous les éléments de $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$. Comme ce groupe n'est pas nul (puisqu'il contient $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y)$, comme nous venons de le démontrer), il est obligatoirement isomorphe à $\mathbb{Z}$, ce qui achève de prouver les parties *(i)* et *(ii)* du corollaire 3.4. Le groupe Γ_i est donc de la forme $\{\tau^k / k \in \mathbb{Z}\}$, où τ est le générateur de Γ_i (défini au passage à l'inverse près). L'action sur $\tilde c_i$ se faisant par translations, on a, pour tout point $\tilde x$ de $\tilde c_i$,

$$
d(\tilde x, \rho(\tau^k)\tilde x) = |k| d(\tilde x, \rho(\tau)\tilde x) = |k| \,(\text{longueur de } c_i) \,,
$$

où c_i est l'image par l'application de revêtement $\pi_X : \widetilde{X} \to X$ de la géodésique minimisante qui joint $\tilde x$ à $\rho(\tau)\tilde x$; cette dernière géodésique coïncidant avec $\tilde c_i$, c_i est une géodésique périodique qui représente la classe d'homotopie $\varphi_{\tilde{x}}(\rho(\tau)) \in \pi_1(X,x)$, où $x = \pi_X(\tilde{x}) = c_i(0)$. Remarquons que les géodésiques périodiques $\varphi_{\tilde{x}}(\rho(\tau^k))$ associées aux autres éléments de Γ_i sont des multiples de c_i (ce qui n'exclut pas l'existence d'une géodésique périodique plus courte, qui serait l'image de $\tilde{c}_i$ par π_X, et dont c_i serait une itérée). Ceci achève de prouver la partie *(iii)* du corollaire 3.4.

De *(ii)*, on déduit l'existence d'un $\gamma \in \Gamma_i \setminus \{\mathrm{id}\}$ et d'un $\tilde{z} \in \widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ tels que $d(\tilde{z}, \gamma(\tilde{z})) < \varepsilon_0$. Fixons cet élément $\gamma \in \Gamma_i \setminus \{\mathrm{id}\}$ et considérons la fonction $\tilde{f}_\gamma$ définie sur $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ par $\tilde{f}_\gamma(\tilde{y}) = d(\tilde{y}, \gamma(\tilde{y}))$. L'abélianité de Γ_i implique que $\tilde{f}_\gamma$ est Γ_i-invariante et passe au quotient en une fonction f_γ qui prend des valeurs inférieures à ε_0 à l'intérieur de $Y^i_{\min}$ et des valeurs supérieures ou égales à ε_0 sur le bord de son compactifié ; donc f_γ atteint son minimum en un point $y_0 \in Y^i_{\min}$ et on a $f_\gamma(y_0) < \varepsilon_0$. La formule (3.7) montre que, si $\tilde{y}_0 \in \pi_i^{-1}(\{y_0\})$ et si $\tilde{c}$ est une géodésique minimisante joignant $\tilde{y}_0$ à $\gamma(\tilde{y}_0)$, alors la géodésique $\pi \circ \tilde{c}$ est entièrement incluse dans Y^i_{mince}. Le fait que y_0 minimise f_γ implique que nous sommes dans le cas d'égalité de la formule (3.7), donc que $\pi \circ \tilde{c}$ est une géodésique périodique (que nous noterons c) entièrement incluse dans Y^i_{mince}. De plus, par définition de l'isomorphisme $\varphi_{\tilde{y}_0}$ de Γ sur $\pi_1(Y, y_0)$, on a $\varphi_{\tilde{y}_0}(\gamma) = [c]$, ce qui achève la preuve de la partie *(iv)* du corollaire 3.4.

Si (Y,g) est de courbure sectionnelle inférieure ou égale à H^2, et si son revêtement universel ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à $\frac{1}{H}$, en tout point $y \in Y$ tel que $\mathrm{inj}(y) < \frac{\varepsilon_0}{2} < \frac{1}{2H}$, le rayon d'injectivité est égal à la demi-longueur du plus petit lacet (non homotope à zéro) de point-base y, donc à $\frac{\ell(y)}{2}$ (la preuve de ce fait est identique à celle donnée dans la preuve du corollaire 3.3). Donc l'ensemble des y tels que $\mathrm{inj}(y) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ coïncide avec Y_{mince}, dont nous noterons $Y^1_{\mathrm{mince}}, \dots, Y^k_{\mathrm{mince}}, \dots$ les composantes connexes qui contiennent au moins un point y tel que $\mathrm{inj}(y) \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$ (donc, d'après le *(iv)*, au moins une géodésique périodique de longueur inférieure à $\frac{\varepsilon_0}{4}$). Comme le corollaire 3.3 *(ii)* assure l'existence d'un point z tel que $\ell(z) \geq \varepsilon_0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure, dans chacun des Y^k_{mince}, l'existence d'un point y_k tel que $\mathrm{inj}(y_k) = \frac{1}{2}\ell(y_k) = \frac{\varepsilon_0}{4}$. Pour tout $\tilde{y}_k \in \pi^{-1}(y_k)$, notons γ_k l'élément de $\Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ tel que $d(\tilde{y}_k, \gamma_k(\tilde{y}_k)) = \frac{\varepsilon_0}{2}$; l'inégalité triangulaire donne alors, pour tout $\tilde{y}' \in B_{\tilde{g}}(\tilde{y}_k, \frac{\varepsilon_0}{4})$,

$$d(\tilde{y}', \gamma_k(\tilde{y}')) < d\big(\tilde{y}_k, \gamma_k(\tilde{y}_k)\big) + 2\frac{\varepsilon_0}{4} = \varepsilon_0 \,.$$

En projetant par π, on en déduit que $\mathrm{inj}[\pi(\tilde{y}')] < \frac{\varepsilon_0}{2}$, donc que la boule géodésique $B_g(y_k, \frac{\varepsilon_0}{4})$ est incluse dans Y_{mince} donc (par connexité), dans Y^k_{mince}. Par le théorème de comparaison de Rauch, puisque $\sigma \leq H^2$ et $\mathrm{inj}(y_k) = \frac{\varepsilon_0}{4}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_g(Y^k_{\mathrm{mince}}) \geq \mathrm{vol}_g\left[B_g(y_k, \frac{\varepsilon_0}{4})\right] \geq \mathrm{vol}\, S^{n-1} \int_0^{\varepsilon_0/4} \left(\frac{1}{H}\sin(Ht)\right)^{n-1} dt \\ = \frac{\mathrm{vol}\, S^{n-1}}{H^n} \int_0^{\alpha/4} (\sin r)^{n-1}\, dr \,,\end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{\delta \log 2}{4+\delta}$. Donc le nombre de ces parties minces est majoré par le rapport des volumes et ceci prouve la partie *(v)* du corollaire 3.4 en remplaçant H par $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$. ∎

Nous avons remarqué qu'il est impossible, dans le cas général où la métrique g n'est pas supposée de courbure négative ni de courbure sectionnelle minorée, d'obtenir une minoration de la longueur de chaque composante connexe Y^i_{mince} de la partie mince. Il est cependant possible de prouver que tout petit lacet σ admet un grand voisinage tubulaire qui ressemble à un cylindre (mais, évidemment, ce voisinage tubulaire peut rencontrer le complémentaire de la «partie mince» de Y) : cette situation est illustrée par les exemples donnés dans la remarque 3.5 et précisée dans le

3.8. Corollaire. — *Considérons des nombres réels positifs quelconques δ, H, ε tels que $\varepsilon \le \varepsilon_0$, où $\varepsilon_0 = \frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(4+\delta)H}$ et posons $R_\varepsilon = \operatorname{Max}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{\delta}{2(4+\delta)}\frac{1}{H}\operatorname{Log}\left(\frac{\delta}{4+\delta}\ \frac{1}{H\varepsilon}\right)\right]$ et $R'_\varepsilon = R_\varepsilon - \frac{\varepsilon_0}{2}$; alors, pour toute variété connexe Y dont le groupe fondamental est δ-non abélien et admet un morphisme injectif (noté ρ) dans le groupe fondamental d'une variété de courbure négative, pour toute métrique g sur Y dont l'entropie volumique est majorée par H, et pour tout lacet σ (non homotope à zéro) dont la longueur est inférieur à ε, notons y le point-base de σ, B_{R_ε} la boule géodésique de rayon R_ε dans (Y, g), centrée en y, fixons un point $\tilde{y} \in \pi^{-1}(\{y\})$ et notons $\widetilde{U}_{R_\varepsilon} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})} B(\gamma(\tilde{y}), R_\varepsilon)$. Alors*

(i) $\widetilde{U}_{R_\varepsilon}$ est la composante connexe de $\tilde{y}$ dans $\pi^{-1}(B_{R_\varepsilon})$ et $B_{R_\varepsilon} = \widetilde{U}_{R_\varepsilon}/\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$, où l'application de passage au quotient est la restriction de π à $\widetilde{U}_{R_\varepsilon}$;

(ii) $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$;

(iii) Pour tout $z \in B_{R_\varepsilon}$, l'image de $\pi_1(B_{R_\varepsilon}, z)$ dans $\pi_1(Y, z) \simeq \Gamma$ (par le morphisme i_* induit par l'injection canonique $i : B_{R_\varepsilon} \hookrightarrow Y$) est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et s'identifie à $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$;

(iv) Si $B_{R'_\varepsilon}$ rencontre plusieurs composantes connexes de la partie mince, chacune contient au moins une géodésique périodique (non homotope à zéro) de longueur inférieure à ε_0, et toutes ces géodésiques sont (à un multiple entier près) homotopes entre elles.

(v) Si deux géodésiques périodiques (non homotopes à zéro et de longueurs inférieures à ε) n'admettent pas de multiples qui soient homotopes, leurs $\frac{R'_\varepsilon}{2}$-voisinages tubulaires sont disjoints.

Remarque. — Comme B_{R_ε} contient le $(R_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2})$-voisinage tubulaire T_{R_ε} de σ, on a également $i^*[\pi_1(T_{R_\varepsilon}, z)] \simeq \mathbb{Z}$ pour tout $z \in T_{R_\varepsilon}$, donc T_{R_ε} (et B_{R_ε}) ressemble à un cylindre. Le minorant $\left(R_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ de la demi-longueur de ce «cylindre» donné ici est optimal (à une constante universelle près) : en effet, sur toute surface hyperbolique Σ, l'existence d'une géodésique périodique de (petite) longueur ε implique l'existence d'un voisinage tubulaire de cette géodésique, de rayon $C\,\mathrm{Log}(\frac{1}{\varepsilon})$, qui est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$, donc de groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$, ainsi que l'image de celui-ci dans $\pi_1(\Sigma)$.

Preuve du corollaire 3.8. — Comme $d_g(x,z)$ est l'infimum des $d_{\tilde g}(\tilde x,\tilde z)$ pour tous les $\tilde x \in \pi^{-1}(x)$ et tous les $\tilde z \in \pi^{-1}(z)$, on a $\pi^{-1}(B_{R_\varepsilon}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_{\tilde g}(\gamma(\tilde y), R_\varepsilon)$, où $B_{\tilde g}(\tilde z, R)$ désigne la boule géodésique de centre $\tilde z$ et de rayon R dans $(\widetilde Y, \tilde g)$. Notons $\overline{U}_{R_\varepsilon}$ la composante connexe de $\tilde y$ dans $\pi^{-1}(B_{R_\varepsilon})$ et Γ_0 le sous-groupe des éléments γ de Γ qui laissent $\overline{U}_{R_\varepsilon}$ (globalement) stable ; d'après le lemme 3.6, on a $\Gamma_0 = \{\gamma/\gamma(\tilde y) \in \overline{U}_{R_\varepsilon}\}$. Pour tout γ tel que $d(\tilde y, \gamma(\tilde y)) < 2R_\varepsilon$, $\gamma(\tilde y)$ est connecté à $\tilde y$ dans $B_{\tilde g}(\tilde y, R_\varepsilon) \cup B_{\tilde g}(\gamma(\tilde y), R_\varepsilon)$, donc appartient à $\overline{U}_{R_\varepsilon}$, donc $\gamma \in \Gamma_0$; ce qui implique que $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y) \subset \Gamma_0$. Inversement, si $\gamma \in \Gamma_0$, il existe une suite de boules $(B_{\tilde g}(\gamma_i(\tilde y), R_\varepsilon))_{0\le i\le N}$ telles que $\gamma_0 = \mathrm{id}$ et $\gamma_N = \gamma$ et que $B_{\tilde g}(\gamma_i(\tilde y), R_\varepsilon) \cap B_{\tilde g}(\gamma_{i+1}(\tilde y), R_\varepsilon)$ soit non vide. On en déduit que γ est le produit des $\gamma_i^{-1} \circ \gamma_{i+1}$ (pour i allant de 0 à $n-1$) et que $(\gamma_i^{-1} \circ \gamma_{i+1}) \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y)$ puisque $d(\gamma_i(\tilde y), \gamma_{i+1}(\tilde y)) < 2R_\varepsilon$. Donc $\gamma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y)$ et $\Gamma_0 = \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y)$, ce qui implique que $\widetilde{U}_{R_\varepsilon} = \overline{U}_{R_\varepsilon}$. Le lemme 3.6 achève la preuve de la propriété *(i)* du corollaire 3.8. L'existence d'un lacet σ (non homotope à zéro) de longueur inférieure à ε implique l'existence d'un élément $\gamma_\sigma \in \Gamma$ tel que $d(\tilde y, \gamma_\sigma(\tilde y)) < \varepsilon$ (on a $\gamma_\sigma = \varphi_{\tilde y}^{-1}([\sigma])$). Le théorème 2.1, appliqué à l'espace métrique mesuré $(\widetilde Y, d_{\tilde g}, dv_{\tilde g})$, montre que tout élément $\gamma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y)$ commute avec γ_σ (ceci découle du théorème 2.1 *(i)* lorsque $2R_\varepsilon = \varepsilon_0$, et du théorème 2.1 *(ii)* sinon). Le lemme 1.15 permet d'en déduire que $\rho(\gamma)$ a le même axe-géodésique invariant $\tilde c$ que $\rho(\gamma_\sigma)$, donc que $\rho(\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y))$ agit par translations sur $\tilde c$. Il s'ensuit que $\rho(\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y))$ est abélien non trivial (puisqu'il contient $\rho(\gamma_\sigma)$), donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ceci prouve *(ii)*. Enfin, la propriété *(iii)* du lemme 3.6 implique que $i_*[\pi_1(B_{R_\varepsilon}, z)] = \varphi_{\tilde z}(\Gamma_0) = \varphi_{\tilde z}(\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y))$. Puisque la propriété *(ii)* du corollaire 3.8 assure que $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y) \simeq \mathbb{Z}$, $\varphi_{\tilde z}$ ne dépend que de z et pas du choix de $\tilde z$ dans $\pi^{-1}(z) \cap \overline{U}_{R_\varepsilon}$.

Supposons maintenant que $B_{R'_\varepsilon}$ rencontre plusieurs composantes connexes $Y^1_{\mathrm{mince}}, \dots, Y^k_{\mathrm{mince}}$ de la partie mince, en des points $x_1, \dots, x_k$ respectivement. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le corollaire 3.4 *(iv)* prouve l'existence, dans chaque Y^i_{mince}, d'une géodésique périodique c_i de longueur inférieure à ε_0, dont le point-base sera noté y_i. Choisissons des relevés $\tilde x_i$ des x_i dans la composante connexe $\widetilde{U}_{R'_\varepsilon}$ de $\tilde y$ dans $\pi^{-1}(B_{R'_\varepsilon})$, notons $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$ la composante connexe de $\tilde x_i$ dans $\pi^{-1}(Y^i_{\mathrm{mince}})$ et choisissons un relevé $\tilde y_i$ de y_i dans $\widetilde{Y}^i_{\varepsilon_0}$. L'inégalité triangulaire implique que $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde x_i) \subset \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde y)$ et le corollaire 3.4 *(ii)* assure que tous les éléments de $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y_i)$ commutent avec ceux de $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde x_i)$. Comme aucun de ces sous-groupes n'est trivial, la transitivité de la relation de commutation (prouvée dans la remarque 2.7) montre que tous les $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde y_i) \setminus \{\mathrm{id}\}$ sont inclus dans une même classe d'équivalence pour cette relation, que nous noterons $\Gamma_0 \setminus \{\mathrm{id}\}$. Comme $\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}$, les éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de Γ qui correspondent à $c_1, \dots, c_k$ (*i.e.* tels que le segment-géodésique $[\tilde y_i, \gamma_i(\tilde y_i)]$ soit le relevé de c_i) sont tous multiples d'un même élément générateur, ce qui prouve *(iv)*. Soient maintenant σ_1 et σ_2 deux géodésiques périodiques de longueurs inférieures à ε et soient y_1 et y_2 les points les plus proches sur ces deux géodésiques. Si les $\frac{R'_\varepsilon}{2}$-voisinages tubulaires de σ_1 et σ_2 se rencontrent, la boule $B(y_2, R'_\varepsilon)$ rencontre σ_1 et le point *(iv)* implique que $[\sigma_1]$ et $[\sigma_2]$ sont multiples d'un même élément. ■

Pour tout $y \in Y$, notons $\tilde{d}_y(Y,g)$ (resp. $\widetilde{D}_y(Y,g)$) l'infimum des nombres réels R tels que l'image (par le morphisme i_* induit par l'injection canonique $i : B_g(y,R) \hookrightarrow Y$) de $\pi_1(B_g(y,R),y)$ dans $\pi_1(Y,y)$ ne soit isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$ (resp. soit un sous-groupe non trivial de centre réduit à $\{0\}$). Une conséquence du corollaire 3.8 *(iii)* est que (sous les mêmes hypothèses), tout lacet σ de point-base y (non homotope à zéro) vérifie $\ell_g(\sigma) \geq \frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H} e^{-2\left(\frac{4+\delta}{\delta}\right)H\,\tilde{d}_y(Y,g)}$. Remarquons que, si $\pi_1(Y,y)$ est non trivial et de centre réduit à zéro, alors $\tilde{d}_y(Y,g) \leq \widetilde{D}_y(Y,g) \leq \operatorname{diam}(Y,g)$. Sous des hypothèses plus faibles que celles du corollaire 3.8, on obtient le

3.9. Corollaire. — *Soient δ et H deux nombres réels positifs arbitraires ; pour toute variété Y dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre réduit à zéro, pour toute métrique riemannienne g sur Y dont l'entropie volumique est majorée par H, et en tout point $y \in Y$, la longueur $\ell_g(\gamma)$ de tout lacet γ non homotope à zéro et de point-base y vérifie :*

(i) $\ell_g(\gamma) \geq \frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H} e^{\frac{-2(4+\delta)}{\delta}H\widetilde{D}_y(Y,g)} \geq \frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H} e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta}H\operatorname{diam}(Y,g)}$.

Si on note $\operatorname{inj}(\widetilde{Y},\tilde{g})$ *le rayon d'injectivité global du revêtement universel riemannien de* (Y,g)*, on a de plus :*

(ii) $\operatorname{inj}(y) \geq \operatorname{Min}\left(\frac{\delta}{8+2\delta}\frac{1}{H} e^{-\left(\frac{8+2\delta}{\delta}\right)H\widetilde{D}_y(Y,g)}, \operatorname{inj}(\widetilde{Y},\tilde{g})\right)$.

(iii) $\operatorname{inj}(Y,g)\operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g) \geq \operatorname{Min}\left(\operatorname{inj}(\widetilde{Y},\tilde{g})\operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g), \frac{\delta}{8+2\delta} e^{-\left(\frac{8+2\delta}{\delta}\right)H\operatorname{diam}(Y,g)}\right)$

où $\operatorname{inj}(Y,g)$ *désigne le rayon d'injectivité global de* (Y,g)*, i.e. l'infimum des* $\operatorname{inj}(y)$ *pour tous les* $y \in Y$.

Remarques.

(1) Le rayon d'injectivité de $(\widetilde{Y},\tilde{g})$ est toujours plus grand que celui de (Y,g) et est minoré dans beaucoup de cas ; par exemple :

– En courbure négative ou nulle, ou si la variété est sans points conjugués, on a : $\operatorname{inj}(\widetilde{Y},\tilde{g}) = +\infty$.

– Si (Y,g) est de courbure sectionnelle majorée par K^2 et si $(\widetilde{Y},\tilde{g})$ ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à L, alors $\operatorname{inj}(\widetilde{Y},\tilde{g}) \geq \operatorname{Min}\left(\frac{\pi}{K},\frac{L}{2}\right)$ (voir la preuve du corollaire 3.3 *(ii)*).

(2) Remplacer $\operatorname{diam}(Y,g)$ par $\widetilde{D}_y(Y,g)$ dans les estimations permet également de traiter le cas des variétés non-compactes ayant plusieurs «bouts».

Preuve du corollaire 3.9. — Notons ε la longueur du plus petit lacet σ non homotope à zéro de point-base y, et posons $R'_\varepsilon = \frac{\delta}{2(4+\delta)}\frac{1}{H}\,\mathrm{Log}\left(\frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H\varepsilon}\right)$. Considérons l'action du groupe fondamental Γ de Y sur l'espace métrique mesuré $(\widetilde{Y}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$. Les boules géodésiques de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ sont de volume non nul, Γ agit sans point fixe sur $\widetilde{Y}$, l'orbite $\Gamma\tilde{y}$ de tout point $\tilde{y}$ est discrète (cf. le début de la section 3) et on a : $\mathrm{Ent}(\widetilde{Y}, d_{\tilde{g}}) = \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \leq H$. Pour tout $\tilde{y} \in \pi^{-1}(\{y\})$, l'égalité (3.0) prouve l'existence d'un élément $\sigma' \in \Gamma$ tel que $d(\tilde{y}, \sigma'(\tilde{y})) \leq \varepsilon$. Le théorème 2.1 *(ii)* permet d'en déduire que σ' commute avec tous les éléments de $\Gamma_{2R'_\varepsilon}(\tilde{y})$. L'isomorphisme $\varphi_{\tilde{y}}$, qui identifie Γ avec $\pi_1(Y, y)$, identifie $\Gamma_{2R}(\tilde{y})$ avec $i_*[\pi_1(B_g(y, R), y)]$ (où i est l'injection canonique $B_g(y, R) \hookrightarrow Y$). En effet, tout élément $\gamma' \in \Gamma$ tel que $d(\tilde{y}, \gamma'(\tilde{y})) < 2R$ s'envoie sur un lacet-géodésique de longueur inférieure à $2R$, donc inclus dans $B_g(y, R)$. Réciproquement, tout lacet de point-base y dans $B_g(y, R)$ est un produit de lacets de longueur inférieure à $2R$ (la preuve est identique à celle du lemme 2.5 ou à celle de [Gr 2], proposition 3.22), chacun de ces lacets se relevant en un élément $\gamma_i \in \Gamma$ tel que $d(\tilde{y}, \gamma_i(\tilde{y})) < 2R$. On a donc $i_*[\pi_1(B_g(y, R), y)] \simeq \Gamma_{2R}(\tilde{y})$, ce sous-groupe étant trivial si $R \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et contenant σ' dans son centre lorsque $\frac{\varepsilon}{2} < R \leq R'_\varepsilon$. Il s'ensuit que R'_ε est un minorant de $\widetilde{D}_y(Y, g)$, ce qui prouve l'inégalité *(i)* du corollaire 3.9. Pour tout point $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$, posons $y = \pi(\tilde{y})$ (où π est le revêtement $\pi : \widetilde{Y} \to Y$) et

$$i_0 = \mathrm{Min}\left(\mathrm{inj}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \,,\ \frac{\delta}{8 + 2\delta}\frac{1}{H} e^{-\left(\frac{8+2\delta}{\delta}\right) H \widetilde{D}_y(Y, g)}\right) .$$

Identifions $(T_{\tilde{y}}\widetilde{Y}, \tilde{g}_{\tilde{y}})$ avec $(T_y Y, g_y)$ comme espaces euclidiens. Comme π est une isométrie locale, on a $\pi \circ \exp_{\tilde{y}} = \exp_y$. Or $\exp_{\tilde{y}}$ est bijective de la boule euclidienne $B(0, i_0)$ sur la boule géodésique $B_{\tilde{g}}(\tilde{y}, i_0)$. Soient $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ deux points de $B_{\tilde{g}}(\tilde{y}, i_0)$ tels que $\pi(\tilde{y}_1) = \pi(\tilde{y}_2)$ et $\tilde{c}$ une géodésique minimisante de $\tilde{y}_1$ à $\tilde{y}_2$, alors $c = \pi \circ \tilde{c}$ est un lacet-géodésique de point-base $y_1 = \pi(\tilde{y}_1)$ et de longueur $\ell_g(c) = \ell_{\tilde{g}}(\tilde{c}) < 2i_0$. Le corollaire 3.9 *(i)* implique que c doit être homotope à zéro, mais alors c se relève en un lacet-géodésique $\tilde{c}$ et on a $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2$. Donc π est injective en restriction à $B_{\tilde{g}}(\tilde{y}, i_0)$, ce qui implique que $\exp_y$ est injective sur $B(0, i_0)$ et démontre *(ii)*. En posant $H = \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$, et en remarquant que $\mathrm{diam}(Y, g) \geq \widetilde{D}_y(Y, g)$ pour tout y, on en déduit *(iii)*. ■

3.10. Exemples. — Toute surface compacte Y de caractéristique d'Euler négative et *toute* métrique g sur Y (sans condition de courbure) vérifient les conclusions des corollaires 3.1, 3.3, 3.8 et 3.9, en y remplaçant δ par $\mathrm{Arg\,ch}\,2$ et H par n'importe quel majorant de $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$. De plus, si Y_{mince} désigne l'ensemble des points $y \in Y$ où il existe au moins un lacet (non homotope à zéro) de longueur inférieure à $\frac{\mathrm{Arg\,ch}\,2\,\mathrm{Log}\,2}{4+\mathrm{Arg\,ch}\,2}\frac{1}{\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g)}$, chaque composante connexe de Y_{mince} vérifie les conclusions du corollaire 3.4 et le nombre de ces composantes connexes est majoré comme indiqué en 3.4 *(v)*. En effet, il découle du lemme 1.7 que le groupe fondamental de Y est δ-épais pour $\delta = \mathrm{Arg\,ch}\,2$, donc δ-non abélien. De plus Y admet une métrique de courbure strictement négative, le morphisme ρ peut donc être choisi égal à l'identité.

Pour tout $K \geq 1$ et tout $V > 0$, *notons* $\mathcal{R}(n, K, V)$ l'ensemble des variétés compactes connexes *de dimension n dont le volume simplicial est majoré par V et qui admettent une métrique de courbure comprise entre* $-K^2$ *et* -1.

3.11. Proposition. — *Pour tout* $V > 0$ *et tout* $K \geq 1$, *pour tout entier* $n \geq 4$, *posons*

$$\alpha(n, K, V) = \frac{A(n) \operatorname{Log} 2}{A(n) + 4K \operatorname{sh}^{n-1}[C_0(n) K^{nr} V^r]} ,$$

où $A(n)$ *et* $C_0(n)$ *sont définis aux lemmes 1.8 et 1.13, où* $r = 1$ *si* $n \geq 8$ *et* $r = 3$ *si* $n \leq 7$. *Pour toute variété compacte connexe* Y, *dont le groupe fondamental n'est isomorphe ni à* $\{0\}$, *ni à* $\mathbb{Z}$, *et admet un morphisme injectif dans le groupe fondamental d'au moins une variété* $X \in \mathcal{R}(n, K, V)$, *et pour toute métrique riemannienne g sur* Y, *si on note* $\ell_g(y)$ *le minimum des longueurs des lacets non homotopes à zéro de point-base y, on a :*

(i) $\operatorname{diam}(Y, g) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq \frac{1}{2} \alpha(n, K, V)$.

(ii) Il existe un $y \in Y$ *tel que* $\ell_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq \alpha(n, K, V)$.

(iii) Pour tout $y \in Y$, *on a :*

$$\ell_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq \frac{\alpha(n, K, V)}{\operatorname{Log} 2} e^{\frac{-2 \operatorname{Log} 2}{\alpha(n,K,V)} \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g) \operatorname{diam}(Y,g)} .$$

(iv) Si Y_{mince} *désigne l'ensemble des points* $y \in Y$ *tels que* $\ell_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) < \alpha(n, K, V)$, *chaque composante connexe de* Y_{mince} *vérifie les conclusions du corollaire 3.4, en particulier le nombre de ces composantes connexes est majoré par le corollaire 3.4 (v).*

(v) En tout point y tel que $\ell_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \leq \varepsilon < \alpha(n, K, V)$, *la boule géodésique de centre y et de rayon*

$$\frac{\alpha(n, K, V)}{2 \operatorname{Log} 2 \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)} \operatorname{Max}\left(\operatorname{Log} 2, \operatorname{Log}\left(\frac{\alpha(n, K, V)}{\operatorname{Log} 2} \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)$$

ressemble homotopiquement à un cylindre, plus précisément elle possède les propriétés topologiques et géométriques données par les conclusions du corollaire 3.8.

3.12. Remarques.

(a) La dimension de Y peut être différente de *n*.

(b) Aucune hypothèse de courbure n'est faite sur la métrique *g*.

(c) Comme id : $\pi_1(Y) \to \pi_1(Y)$ est un morphisme injectif, la proposition 3.11 s'applique en particulier à toute variété Y^n, de volume simplicial inférieur à V, qui admet une métrique g_0 de courbure sectionnelle comprise entre $-K^2$ et -1, et à *toute* autre métrique *g* sur Y^n (sans hypothèse de courbure sur *g*).

(d) Si on impose de plus à la courbure sectionnelle σ_g de (Y, g) de vérifier $\sigma_g \leq K'^2 \operatorname{Ent}(Y, g)^2$ et si son revêtement universel riemannien $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à $\frac{L'}{\operatorname{Ent}(Y,g)}$, alors, comme nous l'avons vu dans la preuve du corollaire 3.3 :

$$2 \operatorname{inj}_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq \operatorname{Min} \left(\frac{2\pi}{K'}, L', \ell_g(y) \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)\right)$$

et la proposition 3.11 reste vraie si on y remplace $\ell_g(y)$ par $2 \operatorname{inj}_g(y)$ et α par $\operatorname{Min}\left(\frac{2\pi}{K'}, L', \alpha(n, K, V)\right)$.

Preuve de la proposition 3.11. — D'après le corollaire 1.13, le groupe fondamental de toute variété $X \in \mathcal{R}(n, K, V)$ est δ_0-épais, où

$$\delta_0 = \delta_0(n, K, V) = \frac{A(n)}{K \operatorname{sh}^{n-1}[C_0(n) K^{nr} V^r]} .$$

La remarque 1.2 (1) montre que $\pi_1(Y)$ est alors δ_0-non abélien et de centre nul. Comme de plus il existe un morphisme injectif de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_1(X)$ et que $\operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$ est majoré par $H = \operatorname{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g)$ lui-même, la proposition 3.11 découle des corollaires 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.8 et 3.9. ■

En adaptant une définition due à M. Gromov, nous dirons qu'une variété X^n est « topologiquement dominée » par une variété Y^n (ou, inversement, *que Y^n domine topologiquement X^n*) s'il existe une application continue de degré non nul $Y^n \to X^n$ et un morphisme injectif $\pi_1(Y^n) \to \pi_1(X^n)$.

3.13. Remarque. — Pour tout $H > 0$, tout $K \geq 1$ et tout entier $n \geq 4$, pour toute variété compacte connexe Y dont l'entropie minimale est majorée par H (resp. dont le volume simplicial est majoré par H) et qui domine topologiquement au moins une variété X^n de courbure sectionnelle comprise entre $-K^2$ et -1, les conclusions de la proposition 3.11 restent valables pour toute métrique riemannienne g sur Y, à condition de remplacer $\alpha(n, K, V)$ par $\alpha\left(n, K, \left(\frac{H}{n-1}\right)^n\right)$ (resp. par $\alpha(n, K, H)$).

Preuve. — Si $f : Y \to X$ est de degré non nul, on a :

$$\text{Volume simplicial de } Y \geq |\deg f| \text{ (Volume simplicial de } X) ,$$
$$(\operatorname{Min} \operatorname{Ent}(Y))^n \geq C'_n \text{ (Volume simplicial de } Y)$$

(cf. [Gr 3], pp. 216 et 245). L'une ou l'autre des hypothèses de la remarque 3.13 implique donc que le volume simplicial de X est majoré. La proposition 3.11 implique donc la remarque 3.13, à condition de démontrer que $\pi_1(Y)$ n'est isomorphe ni à $\{0\}$, ni à $\mathbb{Z}$. Supposons que $\pi_1(Y)$ est isomorphe à $\{0\}$ ou à $\mathbb{Z}$, alors $\Gamma' = f_*[\pi_1(Y)]$ est un sous-groupe de

$\pi_1(X)$ isomorphe à $\{0\}$ ou à $\mathbb{Z}$. La preuve du corollaire 3.2 montre que f est alors homotope à une application de Y sur une des géodésiques périodiques de X, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « $\deg f \neq 0$ », ceci achève la preuve de la remarque 3.13 avec une valeur de α un peu moins bonne que celle annoncée lorsque l'entropie minimale de Y est supposée majorée par H. Pour obtenir la valeur annoncée, on peut faire une autre preuve directe (et plus simple) : le corollaire 1.12 et la domination de X^n par Y assurent que $\pi_1(X^n)$ est δ-épais, où $\delta = \delta_0\left(n, K, \left(\frac{H}{n-1}\right)^n\right)$. Comme $\pi_1(Y)$ n'est isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$ (voir ci-dessus), on en déduit qu'il est δ-non abélien et de centre nul, et la remarque 3.13 découle des corollaires 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.8 et 3.9. ■

4. Théorèmes de précompacité et de compacité

a) Précompacité.

Si A et B sont deux parties d'un espace métrique Z, *nous noterons $d_H^Z(A, B)$ la distance de Hausdorff dans Z entre A et B.* Si X et Y sont deux espaces métriques quelconques, *leur distance de Gromov-Hausdorff (notée $d_{GH}(X, Y)$)* est la borne inférieure des $d_H^Z(i(X), j(Y))$, pour tous les espaces métriques Z et tous les plongements isométriques i et j de X et Y dans Z. Plus concrètement, *on appelle ε-approximation de Hausdorff* entre X et Y toute application $\varphi : Y \to X$ (éventuellement non continue) telle que

(i) Pour tout $x \in X$, $d_X(x, \varphi(Y)) < \varepsilon$

(ii) Pour tous les $y, y' \in Y$, $|d_X(\varphi(y), \varphi(y')) - d_Y(y, y')| < \varepsilon$.

Quitte à changer ε en 2ε ou $\frac{\varepsilon}{2}$, il y a équivalence entre l'existence d'une ε-approximation de Hausdorff et le fait que d_{GH} soit inférieur à ε. Plus précisément, si $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, alors il existe une 2ε-approximation de Hausdorff de Y sur X (et de X sur Y) ; réciproquement, l'existence d'une ε-approximation de Hausdorff de Y sur X implique que $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Nous appellerons « rayon de contractibilité » du revêtement universel, noté $\mathrm{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ le supremum des $r \in \mathbb{R}^+$ tels que toute boule géodésique de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ de rayon inférieur ou égal à r soit contractile. Par le théorème d'Hadamard-Cartan, $\mathrm{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) = +\infty$ si (Y, g) est de courbure négative ou nulle (ou, plus généralement, sans points conjugués). Plus généralement $\mathrm{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \mathrm{inj}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$; en particulier, si la courbure est majorée par K^2 et si tout lacet-géodésique de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ est de longueur minorée par L, on a $\mathrm{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \mathrm{Min}\left(\frac{\pi}{K}, \frac{L}{2}\right)$. On a alors la

4.1. Proposition. — *Pour tous les nombres réels positifs D, V, H, δ, α et pour tout entier $n \geq 2$, considérons l'ensemble des variétés riemanniennes compactes connexes, de dimension n, dont le diamètre, le volume et l'entropie volumique sont respectivement* *majorés par D, V et H, dont le revêtement universel a un rayon de contractibilité supérieur ou égal à α, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre nul. Cet ensemble de variétés riemanniennes*

(i) est précompact si on le munit de la distance de Gromov-Hausdorff ;

(ii) contient un nombre fini de types d'homotopie (et un nombre fini de types topologiques si $n \neq 3$) ;

(iii) contient un nombre fini de structures différentiables si $n \neq 3, 4$.

4.2. Remarques.

(1) Si les variétés riemanniennes considérées sont supposées de courbure négative ou nulle (ou, plus généralement, sans points conjugués), l'hypothèse sur le rayon de contractibilité peut être supprimée dans la proposition 4.1 (puisque ce rayon vaut alors $+\infty$).

(2) Fixons une fois pour toutes une fonction continue $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $\rho(0) = 0$ et $\rho(r) \geq r$ pour tout r. En suivant une démarche initiée par M. Gromov et développée dans [G-P], on aurait pu modifier la définition du rayon de contractibilité en le remplaçant par le supremum des $r \in \mathbb{R}^+$ tels que toute boule géodésique de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ de rayon $t \leq r$ soit contractable à l'intérieur de la boule concentrique de rayon $\rho(t)$. Si on note $\widetilde{\text{contract}}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ ce nouvel invariant, la proposition 4.1 reste vraie si on y remplace $\text{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ par $\widetilde{\text{contract}}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$; comme $\widetilde{\text{contract}}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \text{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g})$, la nouvelle hypothèse « $\widetilde{\text{contract}}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \alpha$ » donne une version plus forte de la proposition 4.1.

Il serait possible de reformuler la proposition 4.1 en remplaçant l'hypothèse « $\text{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \alpha$ » par la double hypothèse « courbure sectionnelle majorée par K^2 et $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à L » (en effet nous avons vu qu'on a alors $\text{contract}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq \text{Min}\left(\frac{\pi}{K}, \frac{L}{2}\right)$). Cependant, un tel énoncé ne serait satisfaisant que si on pouvait s'affranchir de l'hypothèse faite sur la courbure ; c'est ce qu'établit la

4.3. Proposition. — *Pour tous les nombres réels positifs D, V, H, δ, L, et pour tout entier $n \geq 2$ considérons l'ensemble des variétés riemanniennes compactes (Y, g) de dimension n, dont le diamètre, le volume et l'entropie volumique sont respectivement majorés par D, V et H, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre nul et dont le revêtement universel $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à L. Cet ensemble de variétés est précompact pour la distance de Gromov-Hausdorff et contient un nombre fini de types d'homotopie.*

Preuve de la proposition 4.1. — Soit (Y, g) une variété riemannienne qui véri-

fie les hypothèses de la proposition 4.1, notons $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ son revêtement universel, Γ son groupe fondamental et π le revêtement $\widetilde{Y} \to Y$. D'après le théorème 2.1 *(iii)*, pour tout $y \in Y$, la distance entre deux points distincts de $\pi^{-1}(y)$ est supérieure ou égale à $\eta_0 = \frac{\delta}{4+\delta}\frac{1}{H}e^{-2\left(\frac{4+\delta}{\delta}\right)HD}$. Par conséquent, pour tout $\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)$, π est une isométrie de la boule géodésique $\widetilde{B}(\tilde{y}, \frac{\eta_0}{2})$ de $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ sur la boule géodésique $B(y, \frac{\eta_0}{2})$ de (Y, g). Toute boule géodésique de (Y, g) dont le rayon est inférieur à $\varepsilon_0' = \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{\eta_0}{2}\right)$ est donc contractile (dans elle-même). Une généralisation, due à R. Greene et P. etersen, du théorème de M. Berger et C. Croke sur la minoration du volume des boules de rayon inférieur au rayon d'injectivité, permet d'établir que toute boule géodésique de rayon $r \leq \varepsilon_0'$ est de volume minoré par une fonction universelle positive $v_n(r)$ (cf. [G-P], theorem 1).
Notons $N(\varepsilon, Y)$ le nombre maximal de boules géodésiques *disjointes* de rayon ε qu'on peut faire tenir dans une variété vérifiant les hypothèses du théorème 4.1. D'après ce qui précède, $N(\varepsilon, Y)$ est majoré par la *fonction universelle* $\frac{V}{v_n(\varepsilon)}$. D'après le théorème de précompacité de M. Gromov (cf. [Gr 2], proposition 5.2), l'ensemble des variétés considérées est alors précompact.
La contractibilité des boules de (Y, g) de rayon inférieur à ε_0' permet d'appliquer le théorème 2 de [G-P], ce qui démontre les résultats de finitude *(ii)* et *(iii)* de la proposition 4.1. ■

Preuve de la proposition 4.3. — De la même manière que dans la preuve précédente, la boule $B(y, \frac{\eta_0}{2})$ est isométrique à $\widetilde{B}(\tilde{y}, \frac{\eta_0}{2})$, donc elle ne contient aucun lacet-géodésique de longueur inférieure à L. Tout lacet-géodésique de (Y, g) est donc de longueur supérieure ou égale à $L' = \mathrm{Min}(L, \eta_0)$. D'après le théorème A de [Sa], toute boule de (Y, g), de rayon $R \leq L'/2$, a un volume supérieur à $v_n(R) = C_n R^n$. On en déduit, par le même raisonnement que dans la preuve précédente, que $N(\varepsilon, Y) \leq \frac{V}{v_n(\varepsilon)}$, ce qui prouve la précompacité de l'ensemble des variétés riemanniennes considéré. La finitude homotopique découle du théorème D de [Sa]. ■

Preuve de la remarque 4.2 (2). — La preuve de la proposition 4.1 montre que, si on définit ε_0'' comme le premier point tel que $\rho(\varepsilon_0'') = \varepsilon_0'$, alors toute boule géodésique de (Y, g), de rayon $r < \varepsilon_0''$, est contractable à l'intérieur de la boule concentrique de rayon $\rho(r) < \varepsilon_0' = \mathrm{Min}(\alpha, \frac{\eta_0}{2})$. Le théorème 1 de [G-P] prouve alors l'existence d'une fonction universelle positive $v_{n,\rho}(r)$ telle que, pour tout (Y, g) appartenant à la classe de variétés riemanniennes considérée, pour tout $y \in Y$ et tout $r < \varepsilon_0''$, le volume de $B(y, r)$ soit minoré par $v_{n,\rho}(r)$. Par conséquent $N(\varepsilon, Y)$ est majoré par $\frac{V}{v_{n,\rho}(\varepsilon)}$ et la précompacité de la classe de variétés considérée s'ensuit, comme précédemment (dans la preuve de la proposition 4.1). Cette propriété de précompacité et la contractibilité de toute boule de rayon $r < \varepsilon_0''$ dans la boule concentrique de rayon $\rho(r)$ implique la finitude topologique et différentiable (d'après [Fe], theorem 1 et corollary 1.5). ∎

4.4. Corollaire. — *Soient D, H et α des nombres réels positifs arbitraires et X une variété compacte connexe quelconque qui admet une métrique de courbure strictement négative. Considérons l'ensemble des variétés différentiables connexes Y, de dimension n, dont le groupe fondamental n'est isomorphe ni à $\{0\}$ ni à $\mathbb{Z}$ et admet une représentation injective dans $\pi_1(X)$.*

(i) Pour tout $n \neq 3, 4$, parmi toutes ces variétés, il n'en existe qu'un nombre fini qui admettent une métrique g complète vérifiant :

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(g)\,\mathrm{Vol}(g)^{1/n} \leq H\,, \quad \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(g)\,\mathrm{diam}(g) \leq D \ \text{ et } \ \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g)\,\mathrm{contract}(\widetilde{Y},\tilde{g}) \geq \alpha\,.$$

De plus, sur chacune de ces variétés, l'ensemble des métriques g qui vérifient ces trois inégalités est précompact pour la distance de Gromov-Hausdorff (modulo les homothéties).

(ii) Pour $n = 4$ (resp. $n = 3$), sous les mêmes hypothèses, il n'y a qu'un nombre fini de types topologiques (resp. de types d'homotopie) possibles (et l'ensemble des métriques qui vérifient les trois inégalités ci-dessus est précompact pour la distance de Gromov-Hausdorff).

Remarques. — La dimension de X n'a aucune importance, en particulier elle peut être différente de celle de Y. Sous les hypothèses ci-dessus, les variétés Y considérées sont automatiquement compactes (cf. la preuve ci-dessous).

Preuve du corollaire 4.4. — Quitte à lui faire subir une homothétie, X peut être muni d'une métrique de courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1, dont le rayon d'injectivité sera noté δ. Par construction, le groupe fondamental de X est δ-épais et la remarque 1.2 (1) implique que toute variété Y, qui vérifie les hypothèses du corollaire 4.4, a un groupe fondamental qui est δ-non abélien et de centre réduit à zéro. Le corollaire 3.1 *(o)* permet d'en déduire que toute métrique g sur Y est d'entropie non nulle. Quitte à faire subir une homothétie à la métrique g, nous sommes autorisés à supposer que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y,g) = 1$ les hypothèses du corollaire 4.4 se traduisent en $\mathrm{Vol}(g) \leq H^n$, $\mathrm{diam}(g) \leq D$ et $\mathrm{contract}(\widetilde{Y},\tilde{g}) \geq \alpha$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 4.1 (dont nous venons de vérifier toutes les hypothèses), ce qui achève la preuve. ∎

Notons $\mathrm{sgl}(\widetilde{Y},\tilde{g})$ *la longueur du plus petit lacet-géodésique dans le revêtement universel* $(\widetilde{Y},\tilde{g})$ ($\mathrm{sgl}(\widetilde{Y},\tilde{g}) = +\infty$ en l'absence de lacets géodésiques, comme c'est le cas en courbure négative par exemple). Le corollaire 4.4 reste valable si on y remplace $\mathrm{contract}(\widetilde{Y},\tilde{g})$ par $\mathrm{sgl}(\widetilde{Y},\tilde{g})$, mais c'est alors le nombre de types d'homotopie qui est fini. Dans le corollaire 4.4, la variété X était fixée ; on peut cependant la faire varier dans l'ensemble (infini) des variétés qui admettent au moins une métrique de courbure négative pincée, comme le prouve le

4.5. Corollaire. — *Pour tous les nombres réels positifs H, L et K et tout entier $n \geq 4$, considérons l'ensemble des variétés riemanniennes (Y^n, g) qui dominent topologiquement au moins une variété de courbure comprise entre $-K^2$ et -1 (voir la définition de ce terme avant la remarque 3.13) et qui vérifient*

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(g)\,\mathrm{Vol}(g)^{1/n} \leq H, \;\; \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(g)\,\mathrm{diam}(g) \leq D\,, \;\; \mathrm{sgl}(\widetilde{Y}, \tilde{g})\,\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(Y, g) \geq L\,.$$

Cet ensemble est précompact (modulo homothéties) pour la distance de Gromov-Hausdorff et contient un nombre fini de types d'homotopie pour Y.

Preuve. — Pour chacune des variétés Y^n considérées, il existe (par définition) une variété riemannienne (X^n, g_X), de courbure comprise entre $-K^2$ et -1 telle que X^n soit dominée topologiquement par Y^n. Comme Y^n est d'entropie minimale majorée par H, le corollaire 1.12 *(ii)* permet d'en déduire que le groupe fondamental de X est δ-épais, où $\delta = \delta(n, K, H)$ est défini au corollaire 1.12. En raisonnant comme dans la preuve de la remarque 3.13, on en déduit que le groupe fondamental de Y^n est δ-non abélien et de centre nul. Le corollaire 3.1 *(o)* implique que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(g) \neq 0$ et, quitte à lui faire subir une homothétie, on peut supposer que l'entropie volumique de (Y, g) est égale à 1, ce qui donne $\mathrm{vol}(Y, g) \leq H^n$, $\mathrm{diam}(Y, g) \leq D$ et $\mathrm{sgl}(\widetilde{Y}, \tilde{g}) \geq L$. On achève la preuve en appliquant la proposition 4.3. ∎

b) Compacité.

Dans la suite, pour tous les $V > 0$, pour tous les $b \geq a > 0$ et tous les entiers $n \geq 2$, nous noterons $\mathcal{N}_{n,a,b,V}$ l'ensemble des variétés différentiables compactes connexes X, de dimension n, dont le volume simplicial est majoré par V et qui admettent au moins une métrique riemannienne de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$. Si l'on reprend les notations de la proposition 3.11, on remarquera que $\mathcal{N}_{n,a,b,V} = \mathcal{R}\big(n, \frac{b}{a}, V\big)$.

4.6. Corollaire. — *Pour tous les nombres réels strictement positifs a, b et V, et pour tout entier $n \geq 4$, l'ensemble $\mathcal{N}_{n,a,b,V}$ est fini.*
De plus, pour toute variété compacte X de dimension $n \geq 4$, l'ensemble des métriques riemanniennes g sur X dont la courbure sectionnelle est comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ est soit vide, soit compact pour la topologie donnée par la distance de Lipschitz entre métriques (définie dans [Gr 2]).

Preuve. — Considérons l'ensemble des variétés riemanniennes (X, g) telles que $X \in \mathcal{N}_{n,a,b,V}$ et telles que g soit de courbure sectionnelle comprise entre $-b^2$ et $-a^2$. En appliquant le corollaire 1.13 à la métrique $a^2 g$, nous obtenons que le groupe fondamental de X est δ_0-épais (où $\delta_0 = \delta_0\big(n, \frac{b}{a}, V\big)$ est défini au corollaire 1.13) et que toutes les variétés considérées sont de volume majoré par $\frac{\pi}{(n-1)!}\,\frac{V}{a^n}$ (cf. la preuve du corollaire 1.13), donc de diamètre majoré par

$$D = \frac{1}{b} C(n) \Big(\frac{b}{a}\Big)^{nr} \frac{\pi^r}{((n-1)!)^r} V^r$$

(d'après le théorème 1.9). Comme de plus $\mathrm{inj}(\widetilde{X}, \tilde{g}) = +\infty$ et $\mathrm{Ent_{vol}}(X, g) \leq (n-1)b$, le corollaire 3.9 *(iii)* permet de minorer le rayon d'injectivité de (X, g) par une constante $i_0 = i_0(n, a, b, V) > 0$.
L'ensemble des variétés riemanniennes que nous considérons coïncide donc avec l'ensemble des variétés riemanniennes dont la courbure sectionnelle est pincée entre $-b^2$ et $-a^2$, dont le diamètre est majoré par D, dont le rayon d'injectivité est minoré par i_0 et telles que la variété différentiable sous-jacente appartienne à $\mathcal{N}_{n,a,b,V}$. Par le théorème de finitude de J. Cheeger, cet ensemble ne contient qu'un nombre fini de structures différentiables. Par le théorème de compacité de M. Gromov (cf. [Gr 2], voir aussi [Pe]) cet ensemble est compact pour la topologie associée à la distance de Lipschitz. On achève la preuve en remarquant que chaque variété compacte X^n qui admet une métrique de courbure sectionnelle comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ est un élément de $\mathcal{N}_{n,a,b,V_X}$, où V_X = Volume simplicial de X. ■

4.7. Remarque. — Soient a et b deux nombres réels strictement positifs quelconques et soit Y une variété compacte quelconque de dimension $n \geq 4$. L'ensemble des variétés différentiables X, de même dimension, qui admettent une métrique de courbure sectionnelle comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ et telles qu'il existe une application f de degré non nul de Y sur X, est un ensemble fini. De plus, sur chacune de ces variétés, l'ensemble des métriques g de courbure sectionnelle comprise entre $-a^2$ et $-b^2$ est compact pour la distance de Lipschitz. En effet, on a alors

$$(\text{Volume simplicial de } X) \leq \tfrac{1}{|\deg f|}\,(\text{Volume simplicial de } Y)\,,$$

et la remarque 4.7 découle du corollaire 4.6.

La remarque 4.7 donne, en dimension $n \geq 4$, une nouvelle preuve du théorème suivant, dû à I. Belegradek :

4.8. Théorème ([Bk]). — *Soit (X_0, g_0) une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ et de dimension $n \geq 3$, alors :*

(i) L'ensemble des variétés compactes X dont le groupe fondamental est isomorphe à celui de X_0 et qui admettent une métrique de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ est fini ;

(ii) Sur chacune de ces variétés, l'ensemble des métriques de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ est compact pour la distance de Lipschitz.

Preuve. — Les espaces X et X_0 étant des $K(\pi,1)$, l'hypothèse $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_0)$ implique que X est homotopiquement équivalent à X_0 ; il existe donc une application de degré non nul $f : X_0 \to X$. On peut donc appliquer la remarque 4.7 (en y remplaçant Y par X_0), ce qui conclut en dimension $n \geq 4$. ∎

Sur chacune des variétés homotopiquement équivalentes à X_0, la compacité de l'ensemble des métriques de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ implique que leur diamètre est uniformément majoré. Un majorant explicite est fourni par le corollaire 1.12 : toute métrique de courbure comprise entre $-b^2$ et $-a^2$ est de diamètre majoré par $b^{nr-1}C(n)\left(\frac{b}{a}\right)^{nr}\mathrm{vol}(X_0,g_0)^r$. En effet, le théorème de comparaison de Rauch-Bishop permet de majorer l'entropie volumique de (X_0,g_0) par $(n-1)b$, donc l'entropie minimale de X_0 est majorée par $(n-1)b\,\mathrm{vol}(X_0,g_0)^{1/n}$, on conclut en appliquant le corollaire 1.12.

Problème ouvert: le théorème de Belegradek (théorème 4.8) est également valable en dimension 3. Au contraire, le corollaire 4.6 n'est plus valable en dimension 3. En effet, en procédant par chirurgie à partir d'une variété tridimensionnelle, non compacte, de volume V fini, on sait, depuis les travaux de W. P. Thurston ([Th]), construire une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variétés hyperboliques compactes tridimensionnelles telle que la suite $(\mathrm{Vol}(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et tende vers V. Le théorème de rigidité de Mostow implique que ces variétés sont deux à deux non homotopiquement équivalentes, ce qui prouve que $\mathcal{N}_{3,1,1,c_3V}$ a une infinité d'éléments. Remarquons que M. Gromov (cf. [Gr 1], section 5) prouvait déjà qu'il existe un V tel que $\mathcal{N}_{3,\frac{1}{2},1,V}$ contienne une infinité d'éléments : en effet, il construit une suite de variétés tridimensionnelles $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$, deux à deux non homotopiquement équivalentes, de courbure sectionnelle pincée entre -1 et $-1+\varepsilon_i$ (avec $\varepsilon_i \to 0$ quand $i \to +\infty$) et dont le volume simplicial est uniformément borné.
La remarque 4.7 reste-t-elle vraie en dimension 3 ? Existe-t-il une version du corollaire 4.6 qui soit vraie en dimension 3 ?
À propos de la remarque 4.7, on remarquera que, pour une variété compacte tridimensionnelle Y donnée, il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques tridimensionnelles X qui admettent une application de degré non nul de Y sur X (ce résultat est dû à T. Soma [So], on en trouvera une preuve très simple dans [B-C-G 3]) ; donc, si la conjecture de W. Thurston est vraie (*i.e.* si toute variété tridimensionnelle compacte de courbure strictement négative admet une métrique hyperbolique), alors la remarque 4.7 sera vérifiée : *i.e.* il n'existe qu'un nombre fini de variétés X de courbure négative qui admettent une application de degré non nul de Y sur X.

4.9. Proposition. — *Pour toute donnée d'un nombre réel positif δ et d'une entier $n \geq 2$, considérons l'ensemble des variétés différentiables de dimension n, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre réduit à zéro.*

(i) Parmi ces variétés M, il n'y en a qu'un nombre fini (à difféomorphismes près)

qui admettent au moins une métrique g qui vérifie $\mathrm{diam}(g) \leq D$, $\mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)K^2 g$ *et* $\mathrm{inj}(\widetilde{M}, \tilde{g}) \geq \alpha$, *où* $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ *est le revêtement universel riemannien de* (M, g) *et où* D, K *et* α *sont des constantes positives quelconques.*

(ii) Sur chacune de ces variétés M*, l'ensemble des métriques riemanniennes complètes g de diamètre majoré, de courbure de Ricci minorée et dont le relevé* $\tilde{g}$ *au revêtement universel a un rayon d'injectivité minoré, admet pour tout* $s \in [0, 1[$ *une compactification dans l'ensemble des métriques riemanniennes de classe* $C^{0,s}$ *sur* M *: ceci signifie (et signifiera désormais) que, pour tout* $s' \in]s, 1[$*, et pour toute suite* $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de métriques appartenant à cet ensemble, il existe une métrique* g^* *de classe* $C^{0,s'}$ *sur* M*, une sous-suite* $(g_j)_j$ *de la suite initiale et des difféomorphismes* $\varphi_j : M \to M$ *tels que la suite de métriques* $(\varphi_j^* g_j)$ *converge vers* g^* *au sens* $C^{0,s}$*.*
De plus g^* *a sa géométrie bornée par des bornes analogues à celles de la géométrie des* g_i *: plus précisément, si* D, $-(n-1)K^2$ *et* α *sont respectivement le majorant (uniforme) du diamètre des* g_i*, le minorant de leur courbure de Ricci et du rayon d'injectivité du relevé* $\tilde{g}_i$ *de* g_i*, alors le diamètre et l'entropie de* g^* *sont majorés par* D *et* $(n-1)K$ *respectivement et le rayon d'injectivité de la métrique* $\tilde{g}^*$ *(relevée de* g^* *au revêtement universel) est minoré par* $\frac{\alpha}{2}$ *(ce qui signifie ici que la fonction* $d_{\tilde{g}^*}(\tilde{x},\ )^2$ *est* $C^{1,s}$ *sur la boule* $B_{\tilde{g}^*}(\tilde{x}, \frac{\alpha}{2})$ *pour tout* $\tilde{x} \in \widetilde{M}$*).*

4.10. COMMENTAIRES ET REMARQUES.

(1) La convergence $C^{k,\alpha}$ utilisée ici est la convergence $C^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ dans toute carte de l'atlas complet de M. Elle signifie qu'il existe un sous-atlas tel que, dans chacune des cartes de ce sous-atlas, la convergence soit $C^{k,\alpha}$ par rapport à la norme euclidienne de l'ouvert de carte.

(2) Une métrique $C^{0,s}$ n'ayant pas de courbure de Ricci, nous avons été contraints de considérer l'ensemble des métriques de courbure de Ricci minorée comme un sous-ensemble de l'ensemble des métriques d'entropie majorée, et de compactifier à l'intérieur de ce dernier. Cette compactification est d'autant plus naturelle que l'entropie est correctement définie pour toute métrique C^0 et passe à la limite pour la convergence C^0 des métriques. Si on ne peut pas définir la courbure de Ricci sur les espaces-limite de la compactification, il est cependant possible d'y définir une notion de «courbure de Ricci minorée »: en effet, J. Cheeger et T. Colding montrent que la limite (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) d'une suite de variétés, de courbure de Ricci minorée par $-(n-1)$, hérite (après renormalisation) d'une mesure-limite ν, qui vérifie la même inégalité de Bishop-Gromov que les variétés riemanniennes de courbure de Ricci minorée par $-(n-1)$, *i.e.* $\frac{\nu[B(x,r)]}{\nu[B(x,R)]} \geq \frac{b_n(r)}{b_n(R)}$ si $r \leq R$, où $b_n(r)$ est le volume de la boule de rayon r dans l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$ (cf. [C-C 2], theorem 1.10). C'est donc cette inégalité

de Bishop-Gromov qui, sur l'espace limite, remplace la propriété de courbure de Ricci minorée.

(3) Pour une métrique C^∞, on définit le rayon d'injectivité au point x comme le supremum des rayons des boules géodésiques vérifiant l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes :

- $*$ la fonction $d_g(x,\ )^2$ est régulière en restriction à la boule ;
- $*$ l'application exponentielle est bijective sur la boule.

Dans le cas d'une métrique $C^{0,s}$, nous avons du adopter la première de ces deux définitions, car l'application exponentielle n'est plus correctement définie, puisque deux géodésiques de même vitesse initiale peuvent bifurquer (un exemple est donné par la variété riemannienne obtenue en recollant deux exemplaires de $\mathbb{R}^2 \setminus B^2$ sur leur bord S^1).

(4) Dans [A-C] (sur lequel s'appuie notre preuve) on compactifie l'ensemble des métriques de diamètre majoré, de courbure de Ricci minorée, mais c'est le rayon d'injectivité de la variété riemannienne compacte elle-même qui est supposé minoré. L'hypothèse faite dans la proposition 4.9 (rayon d'injectivité du *revêtement universel* minoré) est beaucoup plus faible, puisqu'elle est automatiquement vérifiée pour toute métrique de courbure sectionnelle négative ou nulle et, plus généralement, pour toute métrique g sans points conjugués (*i.e.* telle que l'application exponentielle est un difféomorphisme local), le rayon d'injectivité du revêtement universel $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ étant alors infini, tandis que le rayon d'injectivité de (M, g) peut, en général, être rendu arbitrairement petit.

4.11. Corollaire. — *Soit X une variété compacte quelconque qui admet une métrique de courbure strictement négative. Pour tous les réels positifs D, K et tout entier $n \geq 2$, l'ensemble des variété riemanniennes (M, g) de dimension n, dont le groupe fondamental est non isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$ et admet une représentation injective dans $\pi_1(X)$, dont la métrique g est sans points conjugués et vérifie* $\mathrm{diam}(M, g) \leq D$ *et* $\mathrm{Ricci}_{(M,g)} \geq -(n-1)K^2 g$

(i) ne contient qu'un nombre fini de structures différentiables ;

(ii) admet (pour tout $s \in]0,1[$) une compactification (au sens défini dans la proposition 4.9) dans l'ensemble des métriques riemanniennes de classe $C^{0,s}$ sur ces variétés.

Les conclusions (i) et (ii) valent encore si l'hypothèse « sans points conjugués » est remplacée par l'hypothèse (plus faible) : $\mathrm{inj}(\widetilde{M}, \tilde{g}) \geq \alpha > 0$.

Exemples. — Le corollaire 4.11 s'applique aux variétés qui sont homotopiquement équivalentes à un des revêtements finis de X, mais aussi aux variétés obtenues par somme connexe d'un de ces revêtements avec n'importe quelle variété compacte simplement connexe.

Preuve de la proposition 4.9. — Soit M une variété de dimension n, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre réduit à zéro ; soit g une métrique riemannienne sur M dont le diamètre est majoré par D et la courbure de Ricci minorée par $-(n-1)K^2$. Notons $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ le revêtement universel riemannien de (M, g). Le théorème de comparaison de R.L. Bishop donne, pour tout point $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ et tout $R > 0$,

$$\mathrm{vol}[B_g(\pi(\tilde{y}), R)] \leq \mathrm{vol}[B_{\tilde{g}}(\tilde{y}, R)] \leq v(n, K, R) ,$$

où $v(n, K, R)$ est le volume d'une boule de rayon R dans l'espace simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à $-K^2$. Comme M est inclus dans $B_g(\pi(\tilde{y}), D)$, on a $\mathrm{Vol}(M, g) \leq v(n, K, D)$. D'autre part, par définition de l'entropie volumique, on a :

$$\mathrm{Ent_{vol}}(M, g) \leq \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{R} \mathrm{Log}[v(n, K, R)] \right) = (n-1)K .$$

Le corollaire 3.9 *(iii)* permet d'en déduire que

$$\mathrm{inj}(M, g) \geq \mathrm{Min} \left[\alpha, \frac{\delta}{8+2\delta} \frac{1}{(n-1)K} e^{-(\frac{8+2\delta}{\delta})(n-1)KD} \right] ,$$

lorsque le rayon d'injectivité du revêtement universel $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ est supposé minoré par α.
Comme les variétés riemanniennes (M, g) considérées sont toutes de courbure de Ricci et de rayon d'injectivité minoré et de volume majoré, elles satisfont les hypothèses du théorème de compacité de M.T. Anderson et J. Cheeger ([A-C], theorem 0.2) ; ce théorème prouve qu'il n'y a qu'un nombre fini de types différentiables possibles et que, pour tout $s' \in]0, 1[$, pour toute suite (M_i, g_i) de variétés, satisfaisant aux bornes sur le volume, le rayon d'injectivité et la courbure de Ricci établies ci-dessus, il existe une sous-suite (M_j, g_j), de structure différentiable M fixée, et des difféomorphismes $\varphi_j : M \to M_j$ tels que la suite des métriques $\varphi_j^* g_j$ converge (au sens $C^{0,s}$ pour tout $s < s'$) vers une métrique riemannienne g^* de classe $C^{0,s'}$ (la variété M et les difféomorphismes φ_j ne sont *a priori* que $C^{1,s'}$, mais on peut «lisser» les $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ en des difféomorphismes C^∞ qui sont $C^{1,\alpha}$-proches, ce qui définit une structure C^∞ compatible sur M, cf. [A-C]).
La convergence des métriques étant (au moins) C^0, on a :

$$(1 - \varepsilon_j) d_{g^*} \leq d_{\varphi_j^* g_j} \leq (1 + \varepsilon_j) d_{g^*} , \quad (1 - \varepsilon_j) d_{\tilde{g}^*} \leq d_{\widetilde{\varphi_j^* g_j}} \leq (1 + \varepsilon_j) d_{\tilde{g}^*} ,$$

où $(\varepsilon_j)_j$ est une suite tendant vers 0_+, et où $\tilde{g}^*$ et $\widetilde{\varphi_j^* g_j}$ sont les métriques relevées de g^* et $\varphi_j^* g_j$ au revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. La première inégalité implique que les diamètres vérifient :

$$\mathrm{diam}(g^*) = \lim_{j\to+\infty} \mathrm{diam}(\varphi_j^* g_j) \leq D ;$$

la seconde inégalité implique que

$$\frac{1}{1+\varepsilon_j}\,\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,g^*) \le \mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,\varphi^* g_j) \le \frac{1}{1-\varepsilon_j}\,\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,g^*)\,,$$

donc que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,g^*) \le (n-1)K$, puisque nous avons prouvé ci-dessus que, pour tout j, on a $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,\varphi_j^* g_j) \le (n-1)K$.
La seconde inégalité implique également que, si on fixe n'importe quel point $\tilde{x}$ de $\widetilde{M}$ et si on pose $\rho_j = d_{\widetilde{\varphi_j^* g_j}}(\tilde{x},\ )^2$ et $\rho = d_{\tilde{g}^*}(\tilde{x},\ )^2$, alors ρ_j tend vers ρ au sens C^0 sur tout compact. D'après [A-C] (theorem 0.1 et commentaires pp. 266–267), il est possible de choisir les difféomorphismes φ_j, un système de cartes $\tilde{g}^*$-harmoniques $\{(U_\ell, H_\ell)\}_{\ell\in I}$ de $\widetilde{M}$ (à valeurs dans la boule euclidienne $B(r)$ de rayon r fixé) et un système de cartes $\tilde{g}_j$-harmoniques $\{(U_{j,\ell}; H_{j,\ell})\}_{\ell\in I}$ de $\widetilde{M}$ (à valeurs dans la même boule) de telle sorte que les $\left\{H_\ell^{-1}[B(r/2)] \cap (H_{j,\ell}\circ\widetilde{\varphi}_j)^{-1}[B(r/2)]\right\}_{\ell\in I}$ forment encore un recouvrement de $\widetilde{M}$ et que $H_{j,\ell}\circ\widetilde{\varphi}_j\circ H_\ell^{-1}$ converge (au sens $C^{1,s}$ pour tout $s < s'$) vers l'inclusion canonique de $B(r/2)$ dans $B(r)$.
En substituant $\varphi_j^* g_j$ à g_j, on peut supposer que $\varphi_j = \mathrm{id}_M$. En explicitant un raisonnement schématisé dans [A-C], on montre dans un premier temps que ρ_j est de $\tilde{g}_j$-Laplacien borné sur la $\tilde{g}^*$-boule géodésique $B_{\tilde{g}^*}(\tilde{x}, \frac{\alpha}{2})$ de $(\widetilde{M}, \tilde{g}^*)$ (ceci découle directement de [A-C], lemma 1.4) ; on en déduit que les $\rho_j\circ H_{j,\ell}^{-1}$ sont de norme H_2^p bornée (pour tout p) sur la boule euclidienne de rayon $\frac{r}{2}$ (cf. [A-C], formule (0.10)), donc convergent (en norme $C^{1,s}$ sur cette même boule et quitte à extraire une sous-suite) vers une fonction-limite, notée f_ℓ, qui est de classe $C^{1,s}$. Soit $\tilde{y}$ un point quelconque de $B_{\tilde{g}^*}(\tilde{x}, \frac{\alpha}{2})$, choisissons ℓ de sorte que $\tilde{y}\in H_\ell^{-1}[B(r/2)] \cap H_{j,\ell}^{-1}[B(r/2)]$, on a :

$$\begin{aligned}|\rho(\tilde{y}) - f_\ell\circ H_\ell(\tilde{y})| \le |\rho(\tilde{y}) - \rho_j(\tilde{y})| + |\rho_j\circ H_{j,\ell}^{-1}[H_{j,\ell}(\tilde{y})] - f_\ell[H_{j,\ell}(\tilde{y})]| \\ + |f_\ell\circ(H_{j,\ell}\circ H_\ell^{-1})[H_\ell(\tilde{y})] - f_\ell[H_\ell(\tilde{y})]|\,.\end{aligned}$$

Tous les termes du membre de droite tendent vers zéro quand $j\to+\infty$, en vertu de la convergence uniforme de ρ_j, de $(\rho_j\circ H_{j,\ell}^{-1})$ et de $(H_{j,\ell}\circ H_\ell^{-1})$, donc $\rho = f_\ell\circ H_\ell$ au voisinage de tout point de $B_{\tilde{g}^*}(\tilde{x}, \frac{\alpha}{2})$, donc ρ est $C^{1,s}$ sur $B_{\tilde{g}^*}(\tilde{x}, \frac{\alpha}{2})$. ∎

Preuve du corollaire 4.11. — Soit (X, g_0) une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, quelconque ; notons $\delta = \mathrm{inj}(g_0)\sqrt{|\,\mathrm{Max}\,\sigma_{g_0}|}$, où σ_{g_0} est la courbure sectionnelle de g_0. Notons $\mathcal{V}_{D,K,\alpha}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{V}}_{D,K}$) l'ensemble des variétés riemanniennes (M,g) dont le groupe fondamental est non isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}$ et admet une représentation injective dans le groupe fondamental de X, et qui vérifient $\mathrm{diam}(M,g) \le D$, $\mathrm{Ricci}_{(M,g)} \ge -(n-1)K^2 g$ et $\mathrm{inj}(\widetilde{M},\tilde{g}) \ge \alpha$ (resp. g est sans points conjugués). On a $\widetilde{\mathcal{V}}_{D,K} \subset \mathcal{V}_{D,K,\alpha}$ pour tout α, puisque, lorsque g est sans points conjugués, alors $\mathrm{inj}(\widetilde{M},\tilde{g}) = +\infty$. D'après la remarque 1.2 (2), $\pi_1(X)$ est δ-épais ; ceci et la remarque 1.2 (1) impliquent que tous les groupes fondamentaux des variétés de $\mathcal{V}_{D,K,\alpha}$ sont δ-non abéliens et de centre réduit à zéro. On peut alors appliquer la proposition 4.9 qui prouve que, pour tous les $D, K, \alpha > 0$,

– $\mathcal{V}_{D,K,\alpha}$ (et par conséquent $\widetilde{\mathcal{V}}_{D,K}$) ne contient qu'un nombre fini de structures différentiables.

– $\mathcal{V}_{D,K,\alpha}$ (et par conséquent $\widetilde{\mathcal{V}}_{D,K}$) admet une compactification dans l'ensemble des métrique riemanniennes de classe $C^{0,s}$ sur ces variétés. ∎

4.12. Proposition. — *Pour toute donnée des nombres réels positifs δ, K, D et α et d'un entier $n \geq 2$, considérons l'ensemble des variétés différentiables compactes M de dimension n, dont le groupe fondamental est δ-non abélien et de centre réduit à zéro.*

(i) Aucune de ces variétés n'admet de métrique g d'Einstein vérifiant

$$\mathrm{scal}(g)\,\mathrm{diam}(g)^2 \geq -\left(\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8+2\delta}\right)^2 ;$$

(ii) Seul un nombre fini de ces variétés M admettent une métrique g d'Einstein sans points conjugués vérifiant

$$\mathrm{diam}(M,g) \leq D \ \ et \ \ \mathrm{scal}(g) \geq -K^2 .$$

(iii) Sur chacune de ces variétés M, l'ensemble des métriques d'Einstein sans points conjugués, de diamètre majoré et de courbure scalaire minorée est compact pour la topologie C^k, pour tout k.
Les conclusions (ii) et (iii) valent encore lorsque l'hypothèse «g sans points conjugués » est remplacée par l'hypothèse (plus faible) «le rayon d'injectivité du revêtement universel $(\widetilde{M},\tilde{g})$ est minoré par α ».

Preuve. — Le rayon d'injectivité de $(\widetilde{M},\tilde{g})$ étant infini lorsque g est sans point conjugué, il suffit de faire la preuve lorsque le rayon d'injectivité de $(\widetilde{M},\tilde{g})$ est minoré par une constante $\alpha > 0$. La courbure de Ricci est égale à une constante notée $-(n-1)K'$ sur les vecteurs unitaires. Par l'inégalité de R.L. Bishop (voir la preuve de la proposition 4.9), on en déduit que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,g) \leq (n-1)\,\mathrm{Max}(0,K')^{1/2}$. Par ailleurs, le theorème 2.1 *(o)* et *(iv)* implique que $\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M,g) > 0$ (donc que $K' > 0$) et que $K'\,\mathrm{diam}(M,g)^2 \geq \left(\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{(n-1)(8+2\delta)}\right)^2$, ce qui prouve *(i)*. On déduit de ceci que

$$-\frac{K^2}{n} \leq \frac{\mathrm{Ricci}_g}{g} \leq -\left(\frac{\delta \operatorname{Log} 2}{8+2\delta}\right)^2 \frac{1}{(n-1)D^2} ,$$

pour toute métrique d'Einstein g vérifiant les hypothèses du *(ii)*.
Par ailleurs, puisque g est d'Einstein, on a $D^k\,\mathrm{Ricci}_g = 0$. La majoration ci-dessus de K' et de l'entropie et le corollaire 3.9 *(iii)* permettent d'en déduire que

$$\mathrm{inj}(M,g) \geq \mathrm{Min}\left(\alpha, \frac{\delta}{8+2\delta}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}K} e^{-\left(\frac{8+2\delta}{\delta}\right)\sqrt{\frac{n-1}{n}}KD}\right) .$$

Par ailleurs, le théorème de comparaison de R. L. Bishop (cf. la preuve de la proposition 4.9) permet de majorer le volume de (M,g) suivant l'inégalité :

$$\mathrm{vol}(M,g) \leq \int_0^D \Big(\frac{\mathrm{sh}\sqrt{K'}\,t}{\sqrt{K'}}\Big)^{n-1} dt \leq \frac{[n(n-1)]^{n/2}}{K^n} \int_0^{\frac{DK}{\sqrt{n(n-1)}}} (\mathrm{sh}\, t)^{n-1} dt\,.$$

Les hypothèses du «main theorem» de [H-H] sont ainsi satisfaites (voir aussi le théorème 15 de [H-H]) : on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de toute suite de variétés d'Einstein satisfaisant les hypothèses de la proposition 4.12, on peut extraire une sous-suite (M_j, g_j) de structure différentiable $M_j = M$ fixée et lui associer une suite de difféomorphismes $\varphi_j : M \to M_j$ tels que les métriques $\varphi_j^* g_j$ convergent (au sens C^k) vers une métrique g de classe C^k. Comme k peut être choisi supérieur à 2, on en déduit que g est également d'Einstein, donc C^∞ (en effet, Ricci_g s'écrit en fonction des dérivées premières et secondes des $g\big(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\big)$). Par passage à la limite, on obtient également $\mathrm{diam}(M,g) \leq D$ et $\mathrm{scal}_g \geq -K^2$.

Montrons maintenant que, pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, $\mathrm{inj}_{\tilde{g}}(\tilde{x}) \geq \limsup_{j\to+\infty} \mathrm{inj}_{\tilde{g}_j}(\tilde{x})$. Quitte à remplacer g_j par $\varphi_j^* g_j$, on supposera désormais que $\varphi_j = \mathrm{id}$. Soit en effet $\tilde{c}$ une $\tilde{g}$-géodésique quelconque issue de $\tilde{x}$, qui est minimisante jusqu'à un point $\tilde{y}$ et qui cesse de minimiser après ce point. Soit $\tilde{c}_j$ n'importe quelle $\tilde{g}_j$-géodésique minimisante joignant $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, que l'on prolonge au delà de $\tilde{y}$, et soit t_j la valeur du paramètre à partir de laquelle $\tilde{c}_j$ cesse d'être minimisante. Il nous suffit de prouver que la suite t_j tend (dans tous les cas) vers $d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})$. Dans le cas contraire, il existe un $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(t_k)_k$ tels que $t_k \geq \beta + \varepsilon$ pour tout k (où on a posé $\beta = d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})$). Posons $\tilde{x}_k = \tilde{c}_k(\beta+\varepsilon)$, quitte à prendre encore une sous-suite, la suite $\tilde{x}_k$ converge vers un point $\tilde{x}'$ au sens de la métrique $d_{\tilde{g}}$. D'autre part, la C^0-convergence de g_k vers g implique la convergence uniforme sur tout compact des distances $d_{\tilde{g}_k}$ vers $d_{\tilde{g}}$. Comme $\tilde{c}_k$ est minimisante sur $[0, \beta+\varepsilon]$, on a

$$d_{\tilde{g}_k}(\tilde{x},\tilde{y}) + d_{\tilde{g}_k}(\tilde{y},\tilde{x}_k) = d_{\tilde{g}_k}(\tilde{x},\tilde{x}_k)\,.$$

En passant à la limite dans cette égalité, on obtient :

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y}) + d_{\tilde{g}}(\tilde{y},\tilde{x}') = d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{x}')\,.$$

Notons $\tilde{\gamma}$ une $\tilde{g}$-géodésique minimisante de $\tilde{y}$ à $\tilde{x}'$, l'égalité ci-dessus prouve que $\tilde{\gamma}$ prolonge $\tilde{c}$ en une courbe minimisante de $\tilde{x}$ à $\tilde{x}'$, qui est donc une $\tilde{g}$-géodésique : ceci contredit l'hypothèse. Donc $t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} d_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{y})$ et $\mathrm{inj}_{\tilde{g}}(\tilde{x}) \geq \limsup_{j\to+\infty} \mathrm{inj}_{\tilde{g}_j}(\tilde{x}) \geq \alpha$. On en déduit que la métrique-limite g satisfait les mêmes hypothèses que la suite des métriques $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$, à savoir que g est C^∞, d'Einstein, de diamètre majoré par D, de courbure scalaire minorée par $-K^2$, et que le rayon d'injectivité de son revêtement universel $(\widetilde{M},\tilde{g})$ est minoré par α. ∎

Remarque. — Nous démontrons ci-dessus une semi-continuité de la fonctionnelle $g \mapsto \mathrm{inj}_g(x)$ pour la topologie C^0_{loc} sur les métriques. Cette fonctionnelle n'est pas continue : un contre-exemple est donné par une suite de cônes bidimensionnels, dont l'angle au sommet (en développement) est $2\pi - 4\varepsilon_j$ ($\varepsilon_j \to 0_+$), que l'on lisse sur un ε_j^4-voisinage du sommet, obtenant ainsi une suite de métriques C^∞ de rayon d'injectivité arbitrairement petit qui tend vers la métrique euclidienne, de rayon d'injectivité infini.

Nous appellerons «structure d'Einstein» une classe d'équivalence de variétés d'Einstein pour la relation d'équivalence : $(M, g) \sim (N, h)$ si et seulement s'il existe une homothétie de (M, g) sur (N, h) (*i.e.* un difféomorphisme $\varphi : M \to N$ tel que le rapport $\frac{\varphi^* h}{g}$ soit constant sur $(TM \setminus \{0\})^2$). Sur une variété compacte M^n fixée ($n \geq 3$), rappelons que les métriques d'Einstein sont les métriques critiques pour la fonctionnelle

$$S : g \longmapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(M, g)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M \mathrm{scal}_g \, dv_g \, .$$

Remarquons que S est insensible aux homothéties. Comme les métriques d'Einstein coïncident avec les métriques de courbure sectionnelle constante en dimensions 2 et 3, leur classification ne revêt un intérêt propre qu'à partir de la dimension 4 (voir [Be] pour plus d'informations sur les variétés d'Einstein). Il est naturel de se demander si, sur une variété donnée, la fonctionnelle S a beaucoup de valeurs critiques ou de points critiques. Il existe des exemples où l'ensemble des valeurs critiques est infini et possède un point d'accumulation en zéro (cf. [Be], pp. 471–472, Add. 3), d'où les questions ouvertes suivantes posées par A.L. Besse ([Be], pp. 354–355) :

(1) pour certaines variétés M^n, est-il possible de déterminer une constante $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$ telle que S n'ait aucune valeur critique dans l'intervalle $] - \varepsilon(M), \varepsilon(M)[$? ([Be], question 12.63) ;

(2) pour certaines variétés, est-il possible de montrer (en courbure négative par exemple) que l'ensemble des valeurs critiques de S (*i.e.* l'ensemble des valeurs $S(g)$, pour toutes les métriques d'Einstein g) est un fermé discret ? ([Be], question 12.63) ;

(3) pour quelles variétés cet ensemble est-il fini ? ([Be], question 12.62).

Certaines réponses ont déjà été données à la question **(1)** ; en particulier M. Gromov ([Gr 3]) prouve que, lorsque le volume simplicial de M^n est non nul, il existe une constante C_n telle que toute métrique g d'Einstein vérifie :

$$S(g) \leq -C_n \text{ (Volume simplicial de } M)^{2/n} \, .$$

Nous allons optimiser cette inégalité et l'étendre à des variétés de volume simplicial nul. Nous répondrons par l'affirmative à la question **(2)** (en toute dimension et en courbure négative) et à la question **(3)** (en dimension 4). De plus nous montrerons qu'à chaque valeur critique de S ne correspondent qu'un nombre fini de points critiques.

4.13. Corollaire. — *Soit M une variété différentiable compacte quelconque de dimension $n \geq 4$, alors :*

(i) L'ensemble des valeurs de $S(g)$, quand g parcourt l'ensemble des métriques d'Einstein de courbure sectionnelle strictement négative, est un fermé discret de $\mathbb{R}^+$;

(ii) Pour tout $K \in \mathbb{R}$, l'ensemble des structures d'Einstein $[g]$ (de courbure sectionnelle négative) sur M, qui vérifient $S([g]) \geq -K^2$, est un ensemble fini.

Preuve. — Quitte à opérer une homothétie, on peut supposer qu'on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}_K$ des métriques d'Einstein g sur M qui vérifient $\mathrm{vol}(g) = 1$, $\mathrm{scal}_g \geq -K^2$ et $\sigma_g < 0$, où σ_g est la courbure sectionnelle de g. Si $\mathcal{E}_K \neq \emptyset$, fixons une métrique $g_0 \in \mathcal{E}_K$ et posons $\delta = \mathrm{inj}(g_0)\sqrt{|\,\mathrm{Max}\,\sigma_{g_0}|} > 0$.
D'après la remarque 1.2 (2), le groupe fondamental de M est δ-épais, donc δ-non abélien et de centre réduit à zéro. Par ailleurs, toute métrique $g \in \mathcal{E}_K$ vérifie $-K^2 < \sigma_g < 0$, le théorème principal de [Gr 1] (réénoncé en section 1.9 du présent article) permet alors de majorer le diamètre de (M, g) en fonction de $\mathrm{Vol}(g)$, donc par une constante $C(n)K^{nr-1}$. La métrique g étant sans points conjugués, M et g vérifient les hypothèses de la proposition 4.12 ci-dessus et toute suite d'éléments de $\mathcal{E}_K$ admet une sous-suite $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge (au sens C^k pour tout k) vers une métrique d'Einstein g^* qui vérifie $\mathrm{Vol}(g^*) = 1$, $\mathrm{scal}_{g^*} \geq -K^2$, $\sigma_{g^*} \leq 0$ et $\mathrm{diam}(g^*) \leq C(n)K^{nr-1}$.
Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les métriques d'Einstein de volume unitaire sur M ; un théorème de N. Koiso (voir par exemple [Be], p. 351, theorem 12.49) assure l'existence de voisinages U et U' de g^* dans l'espace des métriques riemanniennes, d'une sous-variété analytique réelle Z de dimension finie du même espace, tels que tout élément de $\mathcal{E} \cap U'$ soit isométrique à un élément de $\mathcal{E} \cap Z \cap U$, et tels que $\mathcal{E} \cap Z \cap U$ soit un sous-ensemble analytique réel connexe par arcs de $Z \cap U$ (cf. [Be], p. 352, Corollary 12.52). Il s'ensuit qu'il existe une suite de difféomorphismes $\varphi_j : M \to M$ tels que, pour j suffisamment grand, $\varphi_j^* g_j$ soit connecté à g^* par un chemin de métriques d'Einstein. Comme chacune des structures d'Einstein $\varphi_j^* g_j$ est isolée dans $Z \cap \mathcal{E}$ (d'après [Be], p. 357, corollary 12.73), ceci n'est possible que si $\varphi_j^* g_j$ est isométrique à g^*. Donc toute suite de structures d'Einstein de courbure sectionnelle strictement négative et de fonctionnelle $S(\ )$ minorée admet une sous-suite stationnaire, ce qui implique *(ii)*. Enfin, *(i)* découle immédiatement de *(ii)*. ■

En dimension 4, la théorie d'Allendœrfer-Chern-Weil (voir par exemple [Be], sections 6.31 et 6.34, p. 161) donne les formules suivantes pour la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ et la signature $\tau(M)$ d'une variété M :

$$8\pi^2\chi(M) = \int_M \left(\|W_g^+\|^2 + \|W_g^-\|^2 - \|Z_g\|^2 + \|U_g\|^2\right) dv_g$$
$$12\pi^2\tau(M) = \int_M \left(\|W_g^+\|^2 - \|W_g^-\|^2\right) dv_g\,,$$

où W_g^+, W_g^-, Z_g et U_g désignent les composantes du tenseur de courbure R_g irréductibles sous l'action de $SO(4)$ sur T_xM. Pour une métrique d'Einstein g, on a $Z_g = 0$ et $\|U_g\|^2 = \frac{(\mathrm{scal}_g)^2}{24}$, nous en déduisons donc que $S(g) \geq -4\sqrt{6}\pi\sqrt{2\chi(M) - 3|\tau(M)|}$. Comme $S(g)$ est minoré, on peut appliquer le corollaire 4.13, qui implique le

4.14. Corollaire. — *Soit M une variété différentiable compacte quelconque de dimension 4. L'ensemble des structures d'Einstein de courbure sectionnelle strictement négative sur M est un ensemble fini.*

En ce qui concerne la question **(1)** ci-dessus (trouver un voisinage de zéro dans lequel la fonctionnelle $g \mapsto S(g)$ ne peut avoir de valeurs critiques) nous obtenons la

4.15. Proposition. — *Soit M une variété compacte quelconque de dimension $n \geq 3$, pour toute métrique d'Einstein g sur M, on a :*

(i) $S(g) \leq S(g_0) < 0$ si M admet une métrique hyperbolique (notée g_0) ou, plus généralement, si M admet une application de degré non nul sur une variété hyperbolique réelle (X, g_0). L'égalité $S(g) = S(g_0)$ implique l'existence d'une homothétie de (M, g) sur (X, g_0) ;

(ii) Plus généralement :

$$S(g) \leq -n(n-1)|\deg f|^{2/n}|\,\mathrm{Max}(\sigma_{g_0})|\ \mathrm{vol}(g_0)^{2/n}$$

si M admet une application f de degré non nul sur une variété qui admet une métrique (encore notée g_0) de courbure sectionnelle strictement négative ; l'égalité n'a lieu que lorsque g et g_0 sont de courbure constante et lorsque f se déforme en un revêtement riemannien homothétique.

Preuve. — Elle découle de la proposition 1.11, qui démontre :

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M, g)^n\,\mathrm{vol}(g) \geq |\deg f|(n-1)^n|\,\mathrm{Max}\,\sigma_{g_0}|^{n/2}\,\mathrm{vol}(g_0)\ ,$$

et que l'égalité n'a lieu que lorsque f est homotope à un revêtement riemannien homothétique de (M, g) sur (X, g_0). On termine en appliquant l'inégalité de R.L. Bishop qui donne :

$$\mathrm{Ent}_{\mathrm{vol}}(M, g)^2\,\mathrm{vol}(g)^{2/n} \leq -(n-1)\left(\frac{\mathrm{Ricci}_g}{g}\right)\mathrm{vol}(g)^{2/n} = -\left(\frac{n-1}{n}\right)S(g)\ .$$

Enfin l'inégalité *(i)* dans le cas $M = X$ se prouve en posant $f = \mathrm{id}_M$ et en appliquant l'inégalité *(ii)* et le cas d'égalité. ∎

4.16. Proposition. — *Pour tout $K \in \mathbb{R}^+$, et en toute dimension $n \geq 4$, il n'y a qu'un nombre fini de variétés de dimension n qui admettent une métrique d'Einstein, de courbure sectionnelle strictement négative, vérifiant $S(g) \geq -K^2$.*
En dimension 4, sur toutes les variétés qui vérifient $\chi(M) - \frac{3}{2}|\tau(M)| \leq K$ sauf un nombre fini, l'ensemble des métriques d'Einstein de courbure sectionnelle négative est vide.

Preuve. — Soit (M, g) une variété d'Einstein quelconque, de courbure sectionnelle $\sigma_g < 0$ et vérifiant $S(g) \geq -K^2$. On peut, quitte à opérer une homothétie, supposer que $\mathrm{Vol}(g) = 1$, ce qui implique que $\mathrm{scal}(g) \geq -K^2$. En procédant comme dans la preuve du corollaire 4.13, on en déduit que sa courbure sectionnelle vérifie $-K^2 \leq \sigma_g < 0$ et que $\mathrm{diam}(g)$ est majoré par une constante de la forme $C(n)K^{nr-1}$. Le théorème de comparaison de J. Cheeger ([Ch]) permet d'en déduire que

$$\mathrm{Vol}(g) \leq \int_0^{\mathrm{diam}(g)} \ell(c)\, \mathrm{ch}(Kt) \left(\frac{\mathrm{sh}\, Kt}{K} \right)^{n-2} dt$$

pour toute géodésique périodique c, donc que

$$\mathrm{inj}(g) = \operatorname*{Inf}_c \ell(c) \geq K^{n-1} \left(\int_0^{C(n)K^{nr}} \mathrm{ch}\, u (\mathrm{sh}\, u)^{n-2}\, du \right)^{-1} .$$

L'ensemble des variétés d'Einstein considérées admet donc des bornes universelles pour la courbure sectionnelle, le diamètre et le rayon d'injectivité. Le théorème de finitude de J. Cheeger permet d'en déduire qu'il n'y a qu'un nombre fini de structures différentiables possibles.

En dimension 4 nous avons vu, dans la preuve du corollaire 4.14, que

$$S(g) \geq -4\sqrt{6}\pi \sqrt{2\chi(M) - 3|\tau(M)|} \geq -8\sqrt{3}\pi\sqrt{K}$$

si $\chi(M) - \frac{3}{2}|\tau(M)| \leq K$; or, d'après ce qui précède, l'ensemble des variétés qui admettent une telle métrique d'Einstein est fini. ∎

4.17. Proposition. — *Pour tout $\delta > 0$, sur toute variété compacte connexe dont le groupe fondamental est δ-non abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété de courbure strictement négative, pour toute métrique d'Einstein g sur M, on a :*

$$S(g) \leq -C_n^{2/n}\, \mathrm{Min} \left[\mathrm{sgl}(\widetilde{M}, \tilde{g})^2 \,|\, \mathrm{scal}_g \,| , \left(\frac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4 + \delta} \right)^2 \right] ,$$

où C_n est la constante du corollaire 3.3 (ii).

En particulier, si g est sans points conjugués, on a :

$$S(g) \leq -C_n^{2/n} \left(\frac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{4 + \delta} \right)^2 .$$

Preuve. — Elle découle de la première inégalité du corollaire 3.3 *(ii)* qui donne :

$$\mathrm{Vol}(g)^{1/n} \geq C_n^{1/n}\, \mathrm{Min} \left[\mathrm{sgl}(\widetilde{M}, \tilde{g}), \frac{\delta \,\mathrm{Log}\, 2}{(4 + \delta)\, \mathrm{Ent_{vol}}(M, g)} \right] ,$$

et du fait que, par l'inégalité de R.L. Bishop,

$$\mathrm{Ent_{vol}}(M, g)^2 \leq -(n-1) \left(\frac{\mathrm{Ricci}_g}{g} \right) = -\frac{n-1}{n}\, \mathrm{scal}_g . \quad ∎$$

Remarquons que, parmi les variétés qui vérifient les hypothèses de la proposition 4.17, il y a des variétés de volume simplicial nul, comme par exemple les produits d'une variété simplement connexe avec une variété dont le groupe fondamental est δ-épais et les sommes connexes de ces produits avec une variété simplement connexe.

4.18. Proposition. — *Soit V un nombre réel et $n \geq 4$ un entier arbiraires. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(n, V) > 0$ tel que toute variété d'Einstein de courbure sectionnelle strictement négative (M^n, g) qui admet une application de degré non nul sur une variété hyperbolique arbitraire (X^n, g_0), de volume $\mathrm{Vol}(g_0) \leq V$, et dont la courbure scalaire totale vérifie $S(g) > S(g_0) - \varepsilon$, est telle que $(M^n, \lambda g)$ est isométrique à (X^n, g_0) pour au moins une valelur de λ.*

Remarque. — Ce théorème s'applique en particulier au cas où $M = X$ et peut être vu comme un «gap theorem».

Preuve. — D'après la proposition 4.16, il n'y a qu'un nombre fini de variétés (notées $M_1, \ldots, M_p$) telles que l'ensemble

$$\Sigma_{M_i} = \left\{ S(g) : g \text{ d'Einstein sur } M_i \text{ telle que } \sigma_g < 0 \text{ et } S(g) \geq -n(n-1)(V^{2/n} + 1) \right\}$$

soit non vide. Il est évident que les variétés hyperboliques X que nous considérons ici sont des éléments de l'ensemble $\{M_1, \ldots, M_p\}$. Posons $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{p} \Sigma_{M_i}$; d'après le corollaire 4.13, Σ est un ensemble fini et nous noterons $s_1, \ldots, s_N$ ses éléments. Posons

$$\varepsilon = \mathrm{Min} \left\{ \underset{1 \leq i \neq j \leq N}{\mathrm{Min}} (|s_i - s_j|) \, , \, n(n-1) \right\} ,$$

ε ne dépend que de n et de V. Soit (X^n, g_0) n'importe quelle variété hyperbolique de volume inférieur ou égal à V, soit M^n n'importe quelle variété qui admet une application de degré non nul sur X^n et soit g n'importe quelle métrique d'Einstein sur M^n, de courbure sectionnelle négative, vérifiant $S(g) > S(g_0) - \varepsilon$. La proposition 4.15 *(i)* implique que $S(g_0) - \varepsilon < S(g) \leq S(g_0)$, donc que $|S(g) - S(g_0)| < \varepsilon$. De ce qui précède et du choix de ε, on déduit que $S(g)$ et $S(g_0)$ appartiennent à Σ, et donc que $S(g) = S(g_0)$. Le cas d'égalité de la proposition 4.15 *(i)* permet alors de conclure que (M, g) et (X, g_0) sont homothétiques.

Bibliographie

[A-C] ANDERSON M.T., CHEEGER J. — *C^α-compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 265–281.

[Ba] BABENKO I. — *Asymptotic invariants of smooth manifolds*, Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41-1** (1993), 1–38.

[B-C-G 1] BESSON G., COURTOIS G., GALLOT S. — *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, G.A.F.A. **5** (1995), 731–799.

[B-C-G 2] BESSON G., COURTOIS G., GALLOT S. — *Lemme de Schwarz réel et applications géométriques*, Acta Math. **183** (1999), 145–169.

[B-C-G 3] BESSON G., COURTOIS G., GALLOT S. — *Preprint*,(représentations de groupes).

[Be] BESSE A.L. — *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Math., **3**, Springer-Verlag, 1987.

[B-G-S] BALLMANN W., GROMOV M., SCHROEDER V. — *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Math. **61**, Birkäuser, 1985.

[Bk] BELEGRADEK I. — *Lipschitz precompactness for closed negatively curved manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **127-4** (1999), 1201–1208.

[B-K] BUSER P., KARCHER H. — *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque **81** (1981), Soc. Math. Fr. Edit.

[Bn] BEARDON A. F. — *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Maths **91** , Springer-Verlag, 1983.

[Bu] BUSER P. — *Geometry and Spectra of compact Riemann Surfaces*, Progress in Maths **106**, Birkäuser, 1992.

[B-Z] BURAGO Y.D., ZALGALLER V.A. — *Geometric Inequalities*, Grundlehren der math. Wiss., **285**, Springer-Verlag, 1988.

[C-C 1] CHEEGER J., COLDING T.H. — *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. **144** (1996), 189–237.

[C-C 2] CHEEGER J., COLDING T.H. — *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Diff. Geom. **45** (1997), 406–480.

[C-G] CHAMPETIER C., GUIRARDEL V. — *Monoïdes libres dans les groupes hyperboliques*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **18** (2000), 157–170.

[Ch] CHEEGER J. — *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **92** (1970), 61–74.

[De] DELZANT T. — *Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques*, Duke Math. Journ. **83** (1996), 661–682.

[Fe] FERRY S.C. — *Topological Finiteness Theorems for Manifolds in Gromov-Hausdorff space*, Duke Math. J. **74** (1994), 95–106.

[Ga] GALLOT S. — *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque **157–158** (1988), Soc. Math. France Edit.

[G-P] GREENE R., PETERSEN P. — *Little Topology, Big Volume*, Duke Math. J. **67** (1992), 273–290.

[Gr 1] GROMOV M. — *Manifolds of negative curvature*, J. Differential Geom. **13** (1978), 223–230.

[Gr 2] GROMOV M. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes* (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu), Textes Mathématiques n° 1, Cedic/Nathan.

[Gr 3] Gromov M. — *Volume and Bounded Cohomology*, Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. **56** (1981), 213–307.

[Gr 4] Gromov M. — *Hyperbolic groups, in Essays in Group Theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **8,** Springer-Verlag, New-York (75) (1987), 263.

[Ha] De La Harpe P. — *Uniform Growth in groups of exponential growth*, Lecture presented at the Haifa Conference on Geometrical and Combinatorial Group Theory, (June 13–21, 2000).

[H-H] Hebey E., Herzlich M. — *Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds*, Rendiconti di Matematica, Roma, Série VII, **17** (1997), 569–605.

[Kn] Knieper G. — *Spherical means on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Diff. Geom. and its Appl. **4** (1994), 361–390.

[Ko] Koubi M. — *Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques*, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 1441–1453.

[Ma] Manning A. — *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. Math **110** (1979), 567–573.

[Pe] Peters S. — *Convergence of Riemannian manifolds*, Composition Math. **62** (1987), 3–16.

[Ro] Robert G. — *Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés*, Thèse de Doctorat, Institut Fourier Grenoble, 25 octobre 1994.

[Sa] Sabourau S. — *Global and local volume bounds and the shortest geodesic loop*, preprint.

[So] Soma T. — *Non zero degree maps to hyperbolic 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **49** (1998), 517–546.

[Th] Thurston W. P. — *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton Mathematical series 35, Princeton Univ. Press, 1997.

Gérard BESSON & Sylvestre GALLOT
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS-UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
besson@fourier.ujf-grenoble.fr
gallog@fourier.ujf-grenoble.fr

&

Gilles COURTOIS
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 PALAISEAU Cedex (France)
courtois@math.polytechnique.fr