Estimations optimales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel

Moulay Youssef BARKATOU et Christine LAURENT-THIÉBAUT

3 mars 2003

Prépublication de l'Institut Fourier n° 593 (2003)

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html`

Dans le cadre de l'étude de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur les variétés Cauchy-Riemann (CR), il est particulièrement intéressant d'obtenir des estimations optimales pour la résolution de l'équation $\overline{\partial}_b u = f$ ainsi que des théorèmes de régularité.

Dans cet article nous considérons le cas d'une variété CR générique q-concave M de codimension réelle k, plongée dans $\mathbb{C}^n$ et nous construisons un noyau R_M sur M, qui possède des propriétés analogues au noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n$. Le résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soient M une variété CR générique q-concave, de codimension réelle k, de classe $\mathcal{C}^3$ plongée dans $\mathbb{C}^n$ et z_0 un point de M. Il existe un voisinage U_{z_0} de z_0 dans M et un noyau R_M tel que si Ω est un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M \cap U_{z_0}$ alors*

(i) Si f est une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, on a la formule suivante au sens des courants sur M

$$(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} f(z) = \overline{\partial}_z \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{\zeta\in\Omega} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{\zeta\in\partial\Omega} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).$$

Classification math. : 32F20, 32F10, 32F4.

Mots-clés : variétés CR, équation de Cauchy-Riemann tangentielle, représentation intégrale, q-convexité.

(ii) Si f est une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $0 \leq r \leq q-1$, on a la formule suivante au sens des courants sur M

$$(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} f(\zeta) = \overline{\partial}_\zeta \int_{z\in\Omega} f(z) \wedge R_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{z\in\Omega} \overline{\partial} f(z) \wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{z\in\partial\Omega} f(z) \wedge R_M(z,\zeta).$$

(iii) Les opérateurs intégraux définis par le noyau R_M sont continus de $\mathcal{C}^l_{n,r}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}_{n,r-1}(\Omega)$, si M est de classe $\mathcal{C}^{l+2}$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$ ou si M est de classe $\mathcal{C}^{l+3}$ et $1 \leq r \leq q-1$.

On en déduit un Lemme de Poincaré pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel avec régularité $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$ (cf. Théorème 5.9).

Le Théorème 0.1 a déjà été annoncé dans [6] mais malheureusement une erreur s'est glissée dans la construction des noyaux (ils ne possèdent pas les propriétés d'holomorphie exigées). Ici nous utilisons les noyaux introduits dans [14] pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann dans des domaines à coins q-convexes de $\mathbb{C}^n$. La démonstration reprend de nombreux arguments de [6]. Le Théorème 5.9 est prouvé dans [5] en s'appuyant sur les résultats de [6], nous en redonnons une démonstration utilisant les noyaux construits ici et dont les grandes lignes suivent celle de [5].

Un corollaire important est un résultat de régularité pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel dans un cas où l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle n'a pas de solution locale .

Corollaire 0.2 *Soient M une sous-variété CR générique 1-concave, de classe $\mathcal{C}^{l+3}$ d'une variété analytique complexe et T une distribution d'ordre l sur M. Si $\overline{\partial}_b T$ est une $(0,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^l$ sur M alors T est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$ sur M.*

Le corollaire 0.2 améliore un résultat de [3] (voir également [2], Théorème 1) où l'auteur prouve un théorème de régularité hölderienne d'ordre $\frac{1}{2} - \varepsilon$ si M est de classe $\mathcal{C}^3$ et d'ordre $\frac{1}{2^k} - \varepsilon$ si M est de classe $\mathcal{C}^2$. On ignore actuellement comment éviter la perte de régularité lorsque M est de classe $\mathcal{C}^2$, même dans le cas des hypersurfaces. Il est démontré par Fischer [8], lorsque M est une hypersurface. Nous ne répétons pas ici la démonstration, qui est identique à celle donnée dans [8] (voir aussi [3]).

Replaçons maintenant ces résultats dans leur contexte historique. Les premières solutions fondamentales pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel ont été définies vers 1975, dans le cas où M est le bord d'un domaine strictement strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, dans des travaux de Romanov [16], Henkin [11] et Skoda [18]. Les noyaux construits indépendamment par Henkin et Skoda ont été repris par Boggess dans son livre [7], où il prouve des estimations $\mathcal{C}^l$. Ensuite Harvey et Polking ont considéré dans [10] le cas des hypersurfaces faiblement pseudoconvexes possédant une fonction support biréguliѐre.

Lorsque M est une hypersurface dont la forme de Levi possède une signature mixte, la condition naturelle sur M pour obtenir des résultats de résolubilité locale pour l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle est la condition $Y(q)$ de Kohn. En 1992, Fischer et Leiterer [9] ont prouvé une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman pour les hypersurfaces de classe $\mathcal{C}^2$ dont la forme de Levi possède q paires de valeurs propres de signes opposés, ainsi que des estimations uniformes. Dans [4], le premier auteur a amélioré leurs résultats en prouvant des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, pour les mêmes noyaux. Finalement Fischer [8] a construit de nouveaux noyaux permettant d'obtenir les estimations optimales $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$ dans ce cadre. Notons également le travail [17] de Shaw qui étend les résultats de Henkin aux hypersurfaces satisfaisant la condition $Y(q)$ et construit une solution fondamentale pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M.

L'extension naturelle en codimension supérieure de la condition $Y(q)$ est la notion de variété CR q-concave. Dans sa thèse [3], le premier auteur a étendu les résultats de son article [4] au cas des variétés CR q-concaves, obtenant ainsi des noyaux de type Bochner-Martinelli avec des estimations $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ sur M. Ces noyaux sont construits en itérant la résolution du $\overline{\partial}$ dans des domaines à coins q-convexe attachés à la variété M.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 1, nous décrivons la situation géométrique et nous introduisons les principales notations. Dans la section 2, nous montrons que l'existence d'une famille de noyaux satisfaisant une équation aux dérivées partielles adéquate et de bonnes conditions d'intégrabilité permet de prouver une formule de type Bochner-Martinelli-Koppelman dans M. La section 3 est consacrée à montrer que les noyaux introduits dans [14] satisfont les propriétés exigées dans la section 2 et permettent la construction d'une première solution fondamentale B_M pour l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. Lorsque M est une hypersurface, ces noyaux coïncident avec les noyaux définis par B. Fischer dans [8] et satisfont donc des estimations $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$. En codimension $k > 1$, les noyaux utilisés ont une dépendance non linéaire par rapport à un paramètre λ et nous sommes amenés à utiliser des résultats prouvés dans [14], rappelés ici en appendice (section 6), pour montrer les conditions d'intégrabilité demandées.

Par ailleurs les noyaux B_M satisfont seulement des estimations $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Nous utilisons ensuite, dans la section 4, une idée de [6] pour construire de nouveaux noyaux moins singuliers qui permettront d'obtenir les estimations optimales. La section 5 est dévolue à l'étude de la continuité des opérateurs intégraux associés aux noyaux construits dans la section 4.

Cet article a été écrit pendant le séjour du second auteur à la Chalmers University à Göteborg puis à la Humboldt Universität à Berlin. Il souhaite remercier ses collègues Bo Berndtsson et Jürgen Leiterer pour leur accueil et les excellentes conditions de travail dont il a alors bénéficié.

1 Situation géométrique et notations

Soit M une sous-variété différentiable de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{C}^n$ de codimension réelle k, $1 \leq k \leq n$, définie par

$$M = \{z \in \omega | \widehat{\rho}_1(z) = \cdots = \widehat{\rho}_k(z) = 0\},$$

où ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widehat{\rho}_1, \ldots ,\widehat{\rho}_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur ω à valeurs réelles qui vérifient $d\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge d\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$ pour tout $z \in M$.

On note $T_z^{\mathbb{C}}M$ l'espace tangent complexe à M au point $z \in M$. On a

$$T_z^{\mathbb{C}}M = \{\xi \in \mathbb{C}^n | \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widehat{\rho}_\nu}{\partial z_j}(z)\xi_j = 0, \nu = 1, \ldots ,k\}.$$

On suppose que M est *Cauchy-Riemann (CR) générique*, c'est-à-dire que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}M = n - k$$

pour tout $z \in M$, ce qui équivaut à

$$\overline{\partial}\widehat{\rho}_1(z) \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\widehat{\rho}_k(z) \neq 0$$

pout tout $z \in M$.

On suppose également que M n'est pas totalement réelle, i.e. $k < n$, et que M est *q-concave*, $1 \leq q \leq \frac{n-k}{2}$, c'est-à-dire que pour tout $z \in M$ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ la forme hermitienne sur $T_z^{\mathbb{C}}M$, $\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \widehat{\rho}_x}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta$, où $\widehat{\rho}_x = x_1\widehat{\rho}_1 + \cdots + x_k\widehat{\rho}_k$, possède au moins q valeurs propres strictement négatives.

Fixons $z_0 \in M$ et $U \subset\subset \omega$ un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}^n$. Puisque M est q-concave, d'après le Lemme 3.1.1 de [1], il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $j = 1,\dots,k$, les fonctions

$$\rho_j = \widehat{\rho}_j + C\sum_{\nu=1}^{k}\widehat{\rho}_\nu^2$$

$$\rho_{-j} = -\widehat{\rho}_j + C\sum_{\nu=1}^{k}\widehat{\rho}_\nu^2.$$

possèdent la propriété suivante :

pour tout $I \in \mathcal{I}$ et tout $\lambda \in \Delta_I$ la forme de Levi de la fonction $\rho_\lambda = \lambda_{i_1}\rho_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_{|I|}}\rho_{i_{|I|}}$ admet au moins $q+k$ valeurs propres strictement positives sur U,

où $\mathcal{I}$ désigne l'ensemble des parties $I \subset \{\pm 1,\dots,\pm k\}$ telles que $|i| \neq |j|$ pour tous $i,j \in I$ tels que $i \neq j$, $|I|$ le nombre d'éléments de I et Δ_I le simplexe des suites $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ des nombres réels $\lambda_j \in [0,1]$ tels que $\lambda_j = 0$ si $j \notin I$ et $\sum \lambda_j = 1$.

On note $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble de tous les $I \in \mathcal{I}$ tels que $|I| = l$. On ordonne $I \in \mathcal{I}$ par le module de ses éléments et on note $\mathcal{I}'(l)$, $1 \leq l \leq k$, l'ensemble des multi-indices de longueur l tels que si $I = (i_1,\dots,i_l)$ alors $|i_\nu| = \nu$ pour $\nu = 1,\dots,l$. Si $I \in \mathcal{I}$ et $\nu \in \{1,\dots,|I|\}$, on pose $I(\widehat{\nu}) = I \setminus \{i_\nu\}$, où i_ν est le ν-ième élément de I après avoir ordonné I.

Finalement on pose

sgn$I = 1$ si le nombre d'éléments négatifs est pair

sgn$I = -1$ si le nombre d'éléments négatifs est impair.

Soient $I = (i_1,\dots,i_l)$ un multi-indice de $\mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, et D un domaine relativement compact dans U. On définit

$$\begin{aligned}
&D_I = \{\rho_{i_1} < 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} < 0\} \cap D\\
&D_I^* = \{\rho_{i_1} > 0\} \cap \cdots \cap \{\rho_{i_{|I|}} > 0\} \cap D\\
&S_I = \{\rho_{i_1} = 0 = \cdots = \rho_{i_{|I|}} = 0\} \cap D\\
&S_{\{j\}}^+ = \overline{D}_{\{j\}} \quad \text{pour} \quad j = \pm 1,\dots,\pm k\\
&S_I^+ = S_{I(\widehat{|I|})} \cap \overline{D}_{\{i_{|I|}\}} \quad \text{si} \quad I \in \mathcal{I} \quad \text{and} \quad |I| \geq 2\\
&\widetilde{S}_I = S_I \cap \{\rho_{|I|+1} > 0\} \cap \{\rho_{-(|I|+1)} > 0\} \quad \text{si} \quad 1 \leq |I| \leq k-1
\end{aligned}$$

Notons que

$$S_I = S^+_{I(|I|+1)} \cup S^+_{I(-(|I|+1))} \cup \widetilde{S}_I$$

et que $\widetilde{S}_I = \emptyset$ si $|I| = k-1$. Ces variétés sont orientées comme suit : D_I et D_I^* comme $\mathbb{C}^n$ pour tout $I \in \mathcal{I}$, $S_{\{j\}}^+$ comme $D_{\{j\}}$ pour $j = \pm 1, \dots, \pm\, k$, S_I comme ∂S_I^+ pour tout $I \in \mathcal{I}$, S_I^+ comme $S_{I(\widehat{|I|})}$ pour tout $I \in \mathcal{I}$ si $|I| \geq 2$ et $M \cap D$ comme S_I si $I = \{1, \dots, k\}$.

On étend les définitions précédentes au cas où $|I| = 0$, c'est-à-dire $I = \emptyset$, en posant $S_\emptyset = D$ et $\widetilde{S}_\emptyset = S_\emptyset \cap \{\rho_1 > 0\} \cap \{\rho_{-1} > 0\}$.

Si f est une fonction définie sur un ouvert Ω de M, on définit la norme hölderienne d'ordre α, $0 < \alpha < 1$ de f par

$$\|f\|_{\alpha,\Omega} = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| + \sup_{\substack{z,\zeta \in \Omega \\ z \neq \zeta}} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|z - \zeta|^\alpha}.$$

Si M est de classe $\mathcal{C}^l$, on note $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$ l'espace de Fréchet des fonctions de classe $\mathcal{C}^l$ sur Ω dont toutes les dérivées tangentielles d'ordre l sont localement hölderienne d'ordre α. Pour tout compact K de Ω, le maximum de la borne supérieure sur K des dérivées tangentielles d'ordre inférieur à l et de la norme hölderienne d'ordre α des dérivées tangentielles d'ordre l définit une semi-norme sur $\mathcal{C}^{l+\alpha}(\Omega)$.

Si f est une (n,r)-forme différentielle sur $\Omega \subset\subset M$, elle s'écrit $f = \sum_J f_J dz \wedge d\overline{z}_J$ avec $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_r}$, car M est plongée dans $\mathbb{C}^n$. La norme de f est alors donnée par le maximum des normes des f_J.

2 Formule de Bochner-Martinelli-Koppelman pour les variétés CR

L'objet de cette section est de montrer qu'une famille de noyaux satisfaisant une équation aux dérivées partielles adéquate et possédant de bonnes propriétés d'intégrabilité permet d'obtenir une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman dans les variétés CR de codimension quelconque.

Nous nous plaçons dans la situation géométrique de la section 1.

Pour $I \in \mathcal{I}$, $0I$ désigne le multi-indice $(0,i_1, \dots, i_{|I|})$, où $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ est ordonné en module croissant.

On pose $C_0(z,\zeta) = B(z,\zeta)$, où $B(z,\zeta)$ désigne le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$, ce qui correspond à un multi-indice I de longueur nulle.

On suppose que l'on sait associer à chaque multi-indice ordonné $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, des formes différentielles $C_{0I}(z,\zeta)$ de degré $2n - |I| - 1$ et $C_I(z,\zeta)$

de degré $2n - |I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\partial}_z C_{0I} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I} = C_{0\delta(I)} - C_I, \tag{2.1}$$

où $C_{0\delta(I)} = \sum_{\nu=1}^{|I|} (-1)^{\nu+1} C_{0I(\widehat{\nu})}$.

On suppose également que les noyaux C_I satisfont les conditions d'annulation suivantes :

$$[C_I(z,\zeta)]_{p,r} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad n-k-q+1 \leq r \leq n-k \tag{2.2}$$

$$\overline{\partial}_z [C_I(z,\zeta)]_{p,n-k-q} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n, \tag{2.3}$$

où $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de C_I.

Pour alléger les écritures on pose $B_I = C_{0I}$ pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$. L'équation 2.1 s'écrit alors

$$\overline{\partial}_z B_I + \overline{\partial}_\zeta B_I = B_{\delta(I)} - C_I \tag{2.4}$$

On suppose finalement que pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, les noyaux B_I vérifient les conditions d'intégrabilité suivantes :

- pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I
- soit $j \in \{\pm 1, \ldots, \pm k\}$ tel que $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$, pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S^+_{I \cup \{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I,
- pour $I = J$ ou $I = \delta(K)$ et $J = K(\widehat{|K|})$ avec $K \in \mathcal{I}(l+1)$, $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ tend vers 0, quand ε tend vers 0, si f_ε est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans $D \cap \{|\rho_1| < \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{|\rho_k| < \varepsilon\}$ telle que $\|\overline{\partial} f_\varepsilon\| = O(\frac{1}{\varepsilon})$ et $\int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) = o(\varepsilon)$, si de plus $\overline{\partial} f_\varepsilon = 0$.

Définition 2.1 *On appellera* famille de noyaux adaptés *à la variété CR générique, q-concave M de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$, toute famille de noyaux B_I et C_I, $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, possédant les propriétés précédentes.*

Lemme 2.2 *Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D, $1 \leq r \leq n-k$. Pour tout multi-indice ordonné $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, et pour* *tout* $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, *on a au sens des courants sur* $\overline{D}_I$

$$\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in S_I^+} f(\zeta) \wedge B_{\delta(I)}(z,\zeta) + (-1)^{|I|} \int_{\zeta \in S_I^+} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_{\delta(I)}(z,\zeta)$$
$$= (-1)^{r+n} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) + (-1)^{|I|+1} \int_{\zeta \in S_I} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)) \tag{2.5}$$

Démonstration. Chacune des intégrales qui apparaissent dans la formule 2.5 étant continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I, il suffit de prouver 2.5 pour $z \in D_I$. On applique la relation 2.4, puis la formule de Stokes, et on remarque que les termes en C_I disparaissent car seuls interviennent les parties de bidegré (n,r) en z des différents éléments. □

Rappelons que si $|I|=0$, on a posé $B_I = C_0 = B$, où B désigne le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman dans $\mathbb{C}^n$.

Lemme 2.3 *Soit* f *une* (n,r)*-forme de classe* $\mathcal{C}^1$ *à support compact dans* D, $1 \leq r \leq n-k$. *Pour tout* $0 \leq l \leq k-1$,*si* r *vérifie* $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, *on a au sens des courants sur* M

$$\sum_{|I|=l} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) + (-1)^{|I|+1} \int_{\zeta \in S_I} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta))$$
$$= (-1)^{l+r+n} \sum_{|I|=l+1} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$$
$$+(-1)^{|I|+1} \int_{\zeta \in S_I} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)) + (*)_l(f)(z),$$

avec

$$(*)_l(f)(z) = \sum_{|I|=l} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in \widetilde{S}_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) + (-1)^{l+1} \int_{\zeta \in \widetilde{S}_I} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta))$$
$$+(-1)^l \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu+1} \sum_{J \in \mathcal{I}'(l+1,\widehat{\nu})} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} f(\zeta) \wedge B_J(z,\zeta)$$
$$+(-1)^{l+1} \int_{\zeta \in \widetilde{S}_J} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_J(z,\zeta))$$
$$+(-1)^l \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \sum_{J \in \mathcal{I}'(l+1,\widehat{\nu})} (-1)^{r+n+1} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in \widetilde{S}^{l+1}_{J(\widehat{|I|})}} f(\zeta) \wedge B_{\delta(J)}(z,\zeta)$$
$$+(-1)^{l+1} \int_{\zeta \in \widetilde{S}^{l+1}_{J(\widehat{|I|})}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_{\delta(J)}(z,\zeta)),$$

où $\widetilde{S}^{l+1}_{J(\widehat{|I|})} = \widetilde{S}_{J(\widehat{|I|})} \cap \{\rho_{i_{l+1}} < 0\}$ *avec* $J(\widehat{|I|}) = (i_1, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_l)$*, pour* $J = I(\widehat{\nu})$ *et* $I = (i_1, \ldots, i_{l+1}) \in \mathcal{I}'(l+1)$*, si* $l \geq 1$ *et*

$$(*)_0(f)(z) = \overline{\partial}_z \int_{\zeta \in \widetilde{S}_\emptyset} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) + (-1)^{l+1} \int_{\zeta \in \widetilde{S}_\emptyset} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta).$$

Démonstration. On applique le Lemme 2.2 et la formule de Stokes en utilisant les propriétés géométriques suivantes :

– Si $|I| = l$, on a $S_I = S^+_{I(l+1)} \cup S^+_{I(-(l+1))} \cup \widetilde{S}_I$

– $\partial \widetilde{S}_{J(\widehat{|I|})} \cap \{\rho_{i_{|I|}} < 0\} = S^+_{I\cup\{\nu\}} \cup S^+_{I\cup\{-\nu\}} \cup \widetilde{S}_I$, si $I \in \mathcal{I}'(l+1, \widehat{\nu})$.

□

Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans D. La formule de Bochner-Martinelli-Koppelman s'écrit

$$f(z) = (-1)^{r+n} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta) - \int_{\zeta \in D} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B(z,\zeta)).$$

Le second membre de la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman correspond au premier membre de la formule démontrée dans le Lemme 2.3 lorsque $l = 0$.

En posant $B_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I$, en remarquant que le choix des orientations identifie M avec $\operatorname{sgn}(I) S_I$ pour $I \in \mathcal{I}'(k)$ et en appliquant k fois le Lemme 2.3, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.4 *Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $D, n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$f(z) = (-1)^{(k+1)(r+n) + \frac{k(k-1)}{2}} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in M} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{\zeta \in M} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta)) + \sum_{l=0}^{k-1} (*)_l(f)(z).$$

Théorème 2.5 *Soit f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact dans $D \cap M, n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$f(z) = (-1)^{(k+1)(r+n) + \frac{k(k-1)}{2}} (\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in M} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{\zeta \in M} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge B_M(z,\zeta)).$$

Démonstration. Soit $\widetilde{f}$ une extension de classe $\mathcal{C}^1$ de f à un voisinage de M. On considère une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi = 1$ sur $(-\infty,\frac{1}{2}]$ et $\chi = 0$ sur $[1,+\infty)$. On pose $\chi_\varepsilon(z) = \Pi_{j=\pm1,\dots,\pm k}\chi(\frac{\rho_j(z)}{\varepsilon})$ pour $z \in U$ et $\varepsilon > 0$; il existe alors une constante $A > 0$ telle que $\|d\chi_\varepsilon(z)\| \leq \frac{A}{\varepsilon}$ pour $z \in U$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\widetilde{f}_\varepsilon = \chi f_\varepsilon$. Il résulte alors de la Proposition 2.4 et des propriétés d'intégrabilité des noyaux B_I que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{f}_\varepsilon(z) = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}(\overline{\partial}_z\int_{\zeta\in M}\widetilde{f}_\varepsilon(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)$$
$$+(-1)^{k+1}\int_{\zeta\in M}\overline{\partial}\widetilde{f}_\varepsilon(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)).$$

De plus, par définition de $\widetilde{f}_\varepsilon$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\widetilde{f}_\varepsilon|_M = f,$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Pour obtenir une formule de Bochner-Martinelli-Koppelman dans M, nous devons préciser quelques propriétés du noyau B_M.

Lemme 2.6 *Le noyau B_M est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(M\cap U)\times(M\cap U)\setminus\{(z,\zeta)\in(M\cap U)\times(M\cap U)|z=\zeta\}$, de degré $2n-k-1$, tel que pour $0\leq p\leq n$ et $n-k-q+1\leq r\leq n-k$*

$$\overline{\partial}_\zeta[B_M]_{p,r} = -\overline{\partial}_z[B_M]_{p,r-1},$$

où $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M (on pose $[B_M]_{p,n-k}=0$).

Démonstration. Rappelons que $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)B_I$. La formule 2.4 donne alors immédiatement

$$\overline{\partial}_z B_M + \overline{\partial}_\zeta B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)B_{\delta(I)} - \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)C_I.$$

On sait, grâce aux propriétés d'annulation des noyaux C_I que $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}=0$ si $0\leq p\leq n$ et $n-k-q+1\leq r\leq n-k$, par conséquent

$$\overline{\partial}_z[B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_\zeta[B_M]_{p,r} = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r}.$$

De plus par définition de $\mathrm{sgn}(I)$ et $\delta(I)$, on a $\sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)[B_{\delta(I)}]_{p,r}=0$. En effet pour un multi-indice donné $J\in\mathcal{I}(k-1)$, il existe deux multi-indices

I_1 et I_2 dans $\mathcal{I}(k)$ tels que $J = \delta(I_1) = \delta(I_2)$ qui vérifient $\mathrm{sgn}(I_1) = -\mathrm{sgn}(I_2)$ car, d'un point de vue ensembliste, si $I_1 = J \cup \{\nu\}$ alors $I_2 = J \cup \{-\nu\}$. $\square$

Théorème 2.7 *Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M \cap U$ et f une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M*

$$\begin{aligned}&(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k-1)}{2}} f(z) = \overline{\partial}_z \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta)\\ &+ (-1)^{k+1}\int_{\zeta\in\Omega} \overline{\partial} f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{\zeta\in\partial\Omega} f(\zeta)\wedge B_M(z,\zeta).\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ fixé et χ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact dans Ω telle que $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de z. D'après le Lemme 2.6, comme f est de bidegré (n,r) avec $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, on a

$$\begin{aligned}&d_\zeta((1-\chi(\zeta))f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta)) = \overline{\partial} f(\zeta)\wedge [B_M]_{n,r}(z,\zeta)\\ &\quad - \overline{\partial}(\chi(\zeta)f(\zeta))\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta) - \overline{\partial}_z((1-\chi(\zeta))f(\zeta))\wedge[B_M]_{n,r-1}(z,\zeta))\end{aligned}$$

Puisque la fonction χ est à support dans Ω, donc nulle sur $\partial\Omega$, on obtient par la formule de Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in\partial\Omega} f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta) &= \int_{\zeta\in\partial\Omega}(1-\chi(\zeta))f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta)\\ &= \int_{\zeta\in\Omega} d(1-\chi(\zeta))f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta))\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\zeta\in\partial\Omega} f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta) = &\int_{\zeta\in\Omega}\overline{\partial} f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta)\\ &+ (-1)^{k+1}(\overline{\partial}_z\int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r-1}(z,\zeta))\\ &- \int_{\zeta\in\Omega}\overline{\partial}(\chi(\zeta)f(\zeta))\wedge[B_M]_{n,r}(z,\zeta)\\ &+ (-1)^k(\overline{\partial}_z\int_{\zeta\in\Omega}\chi(\zeta)f(\zeta)\wedge[B_M]_{n,r-1}(z,\zeta))\end{aligned}$$

On applique alors le Théorème 2.5 à χf et la formule est démontrée. $\square$

3 Construction de noyaux adaptés à une variété CR

Etant donnée une sous-variété CR générique, q-concave M de classe $\mathcal{C}^3$, de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$ et un point z_0 de M, nous allons construire une famille de noyaux adaptés à M au sens de la Définition 2.1 au voisinage de z_0.

Nous reprenons les notations de la section 1.

Définition 3.1 *Une* section de Leray associée à M au voisinage de $\overline{D}$ *est une application ψ qui associe à chaque multi-indice $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, une application à valeurs dans $\mathbb{C}^n$*

$$\psi_I(z,\zeta,\lambda) = (\psi_I^1(z,\zeta,\lambda), \ldots ,\psi_I^n(z,\zeta,\lambda))$$

définie et de classe $\mathcal{C}^2$ pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_I$, telle que

$$\langle \psi_I(z,\zeta,\lambda), \zeta - z\rangle = 1,$$

et

$$\psi_I|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} = \psi_J|_{(\overline{D}_J \times \overline{D}_J^*)\setminus\{z=\zeta\}\times\Delta_I} \quad \text{si} \quad I \subset J.$$

On note $\overset{\circ}{\chi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans lui-même qui vérifie $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 0$ si $0 \leq \lambda \leq 1/4$ et $\overset{\circ}{\chi}(\lambda) = 1$ si $1/2 \leq \lambda \leq 1$.

Si $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, pour $\lambda \in \Delta_{0I}$ tel que $\lambda_0 \neq 1$, on note $\overset{\circ}{\lambda}$ le point de Δ_I défini par

$$\overset{\circ}{\lambda}_{i_\nu} = \frac{\lambda_{i_\nu}}{1-\lambda_0} \quad (\nu = 1, \ldots ,l).$$

Soit ψ une section de Leray associée à M au voisinage de $\overline{D}$, on pose

$$\psi_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2} + (1 - \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0))\psi_I(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) \tag{3.1}$$

pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$. Notons que ψ_{0I} est aussi de classe $\mathcal{C}^2$.

On peut alors définir les noyaux $K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$, par

$$\begin{aligned} K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} &\langle \psi_{0I}, d\zeta\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d\zeta\rangle^{n-1} \\ &\wedge d(\zeta_1 - z_1) \wedge \cdots \wedge d(\zeta_n - z_n), \end{aligned} \tag{3.2}$$

et les noyaux $K_I(z,\zeta,\lambda)$ par

$$\begin{aligned}K_I(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_I,d\zeta\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_I,d\zeta\rangle^{n-1} \\ \wedge\, d(\zeta_1 - z_1) \wedge \cdots \wedge d(\zeta_n - z_n).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Les noyaux K_{0I} et K_I sont des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ et de degré $2n-1$ et on a

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = 0 \tag{3.4}$$

d'après la Proposition 3.9 de [12].

Pour finir on pose, pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$,

$$\begin{aligned}C_{0I}(z,\zeta) &= \int_{\lambda\in\Delta_{0I}} K_{0I}(z,\zeta,\lambda)\\ C_I(z,\zeta) &= \int_{\lambda\in\Delta_I} K_I(z,\zeta,\lambda)\end{aligned}$$

Proposition 3.2 *Les noyaux $C_{0I}(z,\zeta)$ et $C_I(z,\zeta)$ sont des formes différentielles respectivement de degré $2n-|I|-1$ et de degré $2n-|I|$, de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in \overline{D}_I$ et $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\overline{\partial}_z C_{0I} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I} = C_{0\delta(I)} - C_I,$$

où $C_{0\delta(I)} = \sum_{\nu=1}^{|I|}(-1)^{\nu+1}C_{0I(\widehat{\nu})}$.

Démonstration. En appliquant la formule de Stokes on a

$$\int_{\lambda\in\partial\Delta_{0I}} K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \int_{\lambda\in\Delta_{0I}} d_\lambda K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$$

Mais $\partial\Delta_{0I} = \sum_{\nu=1}^{|I|}(-1)^\nu \Delta_{0I(\widehat{\nu})} + \Delta_I$, on a donc par définition des noyaux C_{0I}, C_I et $C_{0\delta(I)}$

$$\int_{\lambda\in\partial\Delta_{0I}} K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = -C_{0\delta(I)} + C_I.$$

Comme $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)K_{0I} = 0$, on obtient

$$\int_{\lambda\in\Delta_{0I}} d_\lambda K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = -\int_{\lambda\in\Delta_{0I}} \overline{\partial}_{z,\zeta}K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = -(\overline{\partial}_z C_{0I} + \overline{\partial}_\zeta C_{0I}),$$

d'où le résultat. □

3.1 Conditions d'annulation

Les propriétés d'annulation des noyaux C_I sont liées à des propriétés d'holomorphie de la section de Leray ψ associée à M à partir de laquelle ils sont construits.

Définition 3.3 *Une application f définie sur une variété analytique complexe X à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est dite m-holomorphe, si pour tout point $\xi \in X$, il existe des coordonnées holomorphes $h_1,\dots,h_n$ dans un voisinage de ξ telles que f soit holomorphe par rapport à $h_1,\dots,h_m$.*

Nous dirons que la section de Leray ψ associée à M est m-holomrphe par rapport à la variable z, si pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, chacune des applications ψ_I est m-holomrphe par rapport à la variable z.

On prouve alors facilement le lemme suivant :

Lemme 3.4 *On suppose que la section de Leray ψ associée à M au voisinage du domaine $\overline{D}$ est $(q+k)$-holomorphe par rapport à la variable z. Soit $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$; si $[C_I(z,\zeta)]_{p,r}$ désigne la partie de bidegré (p,r) en z de C_I, alors pour tout $\zeta \in \overline{D}_I^*$ fixé*

$$\begin{aligned}
&[C_I(z,\zeta)]_{p,r} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \quad \text{et} \quad n-k-q+1 \leq r \leq n-k \\
&\overline{\partial}_z [C_I(z,\zeta)]_{p,n-k-q} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n,
\end{aligned}$$

sur $\overline{D}_I \setminus \{\zeta\}$

Dans la situation géométrique décrite dans la section 1, on peut choisir D assez petit pour que, pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, les domaines D_I possèdent des propriétés analogues aux domaines étudiés dans [14] et pour lesquels les auteurs ont construit des sections de Leray possédant de bonnes propriétés d'holomorphie. Si M est de classe $\mathcal{C}^3$, ces sections seront de classe $\mathcal{C}^2$. Rappelons les principales étapes de cette construction.

Pour $\lambda \in \Delta_I$, on note $F_\lambda(.,\zeta)$ le polynôme de Levi de ρ_λ au point $\zeta \in U$. Pour $\zeta \in U$, $z \in \mathbb{C}^n$,

$$F_\lambda(z,\zeta) = 2\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \rho_\lambda}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k)$$

Soit $G(n,q+k)$ la grassmannienne des sous espaces vectoriels de dimension $q+k$ de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $I \in \mathcal{I}(k)$, on considère une application

$$T_I \ : \ \Delta_I \to G(n,q+k)$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la forme de Levi au voisinage de $\overline{D}$ de la fonction ρ_λ soit définie positive sur T_λ pour tout $\lambda \in \Delta_I$.

On note P^λ la projection orthogonale de $\mathbb{C}^n$ sur $T_I(\lambda)$ et on pose $Q^\lambda = I_{\mathbb{C}^n} - P^\lambda$, où $I_{\mathbb{C}^n}$ désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$. La formule de Taylor implique que, si le domaine $D \subset\subset U$ est assez petit, il existe des constantes strictement positives α et A telles que

$$\text{Re } F_\lambda(z,\zeta) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \alpha|\zeta - z|^2 - A|Q^\lambda(\zeta - z)|^2 \tag{3.5}$$

pour ζ,z au voisinage de $\overline{D}$.

Puisque ρ_λ est de classe au moins $\mathcal{C}^2$ dans ω, on peut trouver des fonctions a_{jk}, $j,k = 1,\ldots,n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U telles que pour tout $\zeta \in U$

$$|a_{jk}(\zeta) - \frac{\partial^2 \rho_\lambda}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k}(\zeta)| < \frac{\alpha}{2n^2}. \tag{3.6}$$

Alors en posant

$$\widetilde{F}_\lambda(z,\zeta) = 2\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k),$$

on déduit de 3.5 et 3.6 que

$$\text{Re } \widetilde{F}_\lambda(z,\zeta) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 - A|Q^\lambda(\zeta - z)|^2 \tag{3.7}$$

pour ζ,z au voisinage de $\overline{D}$.

On note $(Q^\lambda_{jk})^n_{j,k=1}$ les coefficients de la matrice Q^λ, et, pour $(z,\zeta,\lambda) \in \mathbb{C}^n \times U \times \Delta_I$, on pose

$$\begin{aligned}
&w_j(z,\zeta,\lambda) = 2\frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \zeta_j}(\zeta) - \sum_{k=1}^n a_{jk}(\zeta)(\zeta_k - z_k) + A\sum_{k=1}^n \overline{Q^\lambda_{jk}(\zeta_k - z_k)}\\
&w(z,\zeta,\lambda) = (w_1(z,\zeta,\lambda),\ldots,w_n(z,\zeta,\lambda))\\
&\Phi(z,\zeta,\lambda) = \langle w(z,\zeta,\lambda),\zeta - z\rangle.
\end{aligned}$$

Comme Q^λ est une projection orthogonale, on a

$$\Phi(z,\zeta,\lambda) = \widetilde{F}_\lambda(z,\zeta) + A|Q^\lambda(\zeta - z)|^2$$

et on déduit de 3.7 que

$$\text{Re } \Phi(z,\zeta,\lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\alpha}{2}|\zeta - z|^2 \tag{3.8}$$

pour ζ,z au voisinage de $\overline{D}$ et $\lambda \in \Delta_I$.

Remarquons que, pour ζ fixé dans un voisinage de $\overline{D}$ et $\lambda \in \Delta_I$, on peut choisir de nouvelles coordonnées $h_1,\ldots,h_n$ dépendant linéairement des coordonnées complexes initiales telles que

$$\{z \in \mathbb{C}^n | Q^\lambda(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^n | h_{q+k+1}(z) = \cdots = h_n(z) = 0\}.$$

L'application $z \mapsto \overline{Q^\lambda(\zeta - z)}$ est alors indépendante de $h_1,\ldots,h_{q+k}$, ce qui implique que $w(.,\zeta,\lambda)$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire par rapport à $h_1,\ldots,h_{q+k}$ et que $\Phi(.,\zeta,\lambda)$ est un polynôme quadratique complexe en $h_1,\ldots,h_{q+k}$.

Par conséquent en posant

$$\psi_I(z,\zeta,\lambda) = \frac{w(z,\zeta,\lambda)}{\Phi(z,\zeta,\lambda)} \tag{3.9}$$

pour $(z,\zeta,\lambda) \in \overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_I$, $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, on obtient une section de Leray $\psi = (\psi_I)_{I \in \cup_{1 \leq l \leq k} \mathcal{I}(l)}$ associée à M au voisinage du domaine $\overline{D}$, qui est $(q+k)$-holomorphe par rapport à la variable z.

3.2 Conditions d'intégrabilité

Dans un premier temps nous allons prouver que les noyaux $B_I = C_{0I}$, $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, construits à l'aide de la section de Leray $\psi = (\psi_I)_{I \in \cup_{1 \leq l \leq k} \mathcal{I}(l)}$ associée à M au voisinage du domaine $\overline{D}$, définie dans le paragraphe précédent, vérifient les conditions d'intégrabilité :

- pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I
- soit $j \in \{\pm 1,\ldots,\pm k\}$ tel que $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$, pour toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, $\int_{\zeta \in S^+_{I \cup \{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ définit une forme différentielle continue sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I.

Nous devons donc considérer les formes différentielles

$$\begin{aligned} \int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) &= \int_{(\zeta,\lambda) \in S_I \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ \int_{\zeta \in S^+_{I \cup \{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) &= \int_{(\zeta,\lambda) \in S^+_{I \cup \{j\}} \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Remarquons que les formes ψ_I et (respectivement ψ_{0I}) sont définies pour pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_I$ (respectivement $\lambda \in \Delta_{0I}$) et de classe $\mathcal{C}^2$ en ζ et $\mathcal{C}^\infty$ en z sur leur domaine de définition. Par conséquent les noyaux B_I sont de classe $\mathcal{C}^1$ en ζ et $\mathcal{C}^\infty$ en z pour $(z,\zeta) \in D_I \times \overline{D}_I^*$. Les formes différentielles 3.10 sont donc définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I. Nous allons prouver qu'elles se prolongent en des formes différentielles continues sur $\overline{D}_I$.

On considère pour $I = (i_1, \ldots, i_l) \in \mathcal{I}(l)$ les sous-variétés $\Gamma_I = \{\zeta \in \overline{D}_I^* | \rho_{i_1} = \cdots = \rho_{i_l}\}$ et on les oriente de telle sorte que l'orientation de $\partial\Gamma_I$ coïncide avec celle de S_I.

Si f est une (n,r)-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, on a alors pour $z \in D_I$

$$\begin{aligned}\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) &= \int_{(\zeta,\lambda) \in S_I \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ &= \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ &\quad + (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\zeta \in S^+_{I\cup\{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) &= \int_{(\zeta,\lambda) \in S^+_{I\cup\{j\}} \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ &= \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \cap \{\rho_l \geq 0\} \times \Delta_{0I}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ &\quad + (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \cap \{\rho_l \geq 0\} \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda).\end{aligned}$$

Nous devons maintenant étudier avec plus de précision la singularité des noyaux K_{0I} et $\overline{\partial}_\zeta K_{0I}$ en $z = \zeta$. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Définition 3.5 *Soit $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, et s un entier.*

Une forme de type O_s (ou de type $O_s(z,\zeta,\lambda)$) sur $\overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_{0I}$ est, par définition, une forme différentielle continue $f(z,\zeta,\lambda)$ définie pour tout $(z,\zeta,\lambda) \in \overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_{0I}$ tel que $z \neq \zeta$ vérifiant les conditions suivantes :

1. *Les dérivées d'ordre nul en ζ, inférieur ou égal à 1 en z et arbitraire en λ des coefficients de f sont continues pour tout $(z,\zeta,\lambda) \in \overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_{0I}$ tel que $z \neq \zeta$.*
2. *Soit ∇_z^κ, $\kappa = 0,1$, un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre nul en ζ, inférieur ou égal à 1 en z et arbitraire en λ. Il existe*

une constante $C > 0$ telle que ,pour chaque coefficient $\varphi(z,\zeta,\lambda)$ de $f(z,\zeta,\lambda)$,

$$|\nabla_z^\kappa \varphi(z,\zeta,\lambda)| \leq C|\zeta - z|^{s-\kappa}$$

pour tout $(z,\zeta,\lambda) \in \overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_{0I}$ tel que $z \neq \zeta$.

3. *il existe des voisinages U_0 et U_I dans Δ_{0I} de Δ_0 et Δ_I, respectivement, tels que $f(z,\zeta,\lambda) = 0$ pour tout $(z,\zeta,\lambda) \in \overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times (U_0 \cup U_I)$.*

Les symboles O_s et $O_s(z,\zeta,\lambda)$ sont utilisés de la manière suivante :

$f = O_s$ signifie : f est une forme de type O_s.

$O_s \wedge f = O_k \wedge g + O_m$ signifie : pour toute forme h de type O_s il existe une forme u de type O_k et une forme v de type O_m telles que $h \wedge f = u \wedge g + v$.

L'équation

$$Ef(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in S_I \times \Delta_{0I}} O_s(z,\zeta,\lambda) \wedge f(z,\zeta,\lambda)$$

signifie : il existe une forme $\widehat{E}$ de type O_s telle que

$$Ef(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in S_I \times \Delta_{0I}} \widehat{E}(z,\zeta,\lambda) \wedge f(z,\zeta,\lambda)$$

pour toute f.

Rappelons que

$$\psi_{0I}(z,\zeta,\lambda) = \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0)\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2} = (1 - \overset{\circ}{\chi}(\lambda_0))\psi_I(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) \tag{3.11}$$

pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \leq l \leq k$, $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I}$.

On pose

$$W = W(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) = \langle w(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}), d\zeta\rangle$$

et

$$M = M(z,\zeta) = \frac{\langle \overline{\zeta} - \overline{z}, d\zeta\rangle}{|\zeta - z|^2}$$

pour $z \in \overline{D}_I$, $\zeta \in \overline{D}_I^*$ tels que $z \neq \zeta$ et $\lambda \in \Delta_{0I} \setminus \Delta_0$, où

$$\langle w(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}), d\zeta\rangle = \sum_{j=1}^n w_j(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda}) d\zeta_j$$

et

$$\langle \overline{\zeta} - \overline{z}, d\zeta\rangle = \sum_{j=1}^n (\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j) d\zeta_j.$$

Soit f une (n,r)-forme sur $\overline{D}$, on pose

$$f(\zeta) = \widetilde{f}(\zeta) d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n.$$

Par définition (3.2) des noyaux K_{0I} on a

$$\begin{aligned} f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) = &\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n} \widetilde{f}(\zeta) \wedge \langle \psi_{0I}, d\zeta\rangle \\ &\wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d\zeta\rangle^{n-1} \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n. \end{aligned}$$

Alors, d'après la relation 3.11, on a

$$\langle \psi_{0I}, d\zeta\rangle = \overset{\circ}{\chi} M + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{W}{\Phi}$$

$$\begin{aligned} \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d\zeta\rangle = &(\frac{W}{\Phi} - M) \wedge d\overset{\circ}{\chi} + \overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) W}{\Phi} \\ &+ (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{W}{\Phi^2} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\Phi. \end{aligned}$$

Comme on doit intégrer $f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$ sur Δ_{0I}, qui est de dimension réelle $|I|$, seule la composante de degré $|I|$ en λ du noyau K_{0I} donnera une contribution. Mais les formes différentielles $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\Phi$ et $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)W$ sont les images réciproques de formes différentielles sur $\overline{D}_I \times \overline{D}_I^* \times \Delta_I$ par l'application $(z,\zeta,\lambda) \mapsto (z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})$; par conséquent, puisque Δ_I est de dimension réelle $|I| - 1$, pour tout $s = 1,2,\ldots$, on a $[((\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)W)^s]_{\deg\lambda=|I|} = 0$ et $[((\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)W)^s \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\Phi]_{\deg\lambda=|I|} = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} &[\langle \psi_{0I}, d\zeta\rangle \wedge \langle (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I}, d\zeta\rangle^{n-1}]_{\deg\lambda=|I|} \\ &= (\overset{\circ}{\chi} M + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{W}{\Phi}) \wedge (n-1)(\frac{W}{\Phi} - M) \wedge d\overset{\circ}{\chi} \\ &\wedge [(\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)W}{\Phi} + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{W}{\Phi^2} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\Phi)^{n-2}]_{\deg\lambda=|I|-1}. \end{aligned}$$

En développant l'expression précédente et en remarquant que $W \wedge W = 0$ et $M \wedge M = 0$, car W et M sont des 1-formes, on obtient

$$\begin{aligned} [f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|I|} = &\, a\widetilde{f}(\zeta) \frac{M \wedge W}{\Phi} \wedge d\overset{\circ}{\chi} \\ &\wedge (\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_{z,\zeta} W}{\Phi})^{n-1-|I|} \wedge ((1 - \overset{\circ}{\chi}) \frac{d_\lambda W}{\Phi})^{|I|-1}, \end{aligned}$$

où a désigne une constante.

Par définition des formes différentielles de type O_s, on a $d\overset{\circ}{\chi} = O_0$, $O_0 \wedge M = O_{-1}$, $O_0 \wedge \overline{\partial}_{z,\zeta} M = O_{-2}$ et $O_0 \wedge \overline{\partial}_{z,\zeta} W = O_0$, d'où

$$[f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|} = \frac{O_{-1} \wedge W}{\Phi^{|I|}} \wedge (O_{-2} + \frac{O_0}{\Phi})^{n-1-|I|} \wedge (d_\lambda W)^{|I|-1}.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} O_0 \wedge W &= \sum_{j\in I} O_0 \wedge \partial\rho_j(\zeta) + O_1 \\ O_0 \wedge d_\lambda W &= \sum_{j\in I} O_0 \wedge \partial\rho_j(\zeta) + O_1 \\ O_0 \wedge W \wedge (d_\lambda W)^{|I|-1} &= \sum_{\substack{0\le m\le |I| \\ i_1,\dots,i_m\in I}} O_{|I|-m} \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m}(\zeta) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$[f(\zeta) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|} = \sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I| \\ 0\le m\le |I|}} \frac{O_{|I|-2n+2(|I|+s-m)+m+1}}{\Phi^{(|I|+s-m)+m}} \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m}(\zeta)$$

En différentiant K_{0I} par rapport à $\overline{\zeta}$, on obtient

$$\begin{aligned} &[f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|} \\ &= a\widetilde{f}(\zeta)(\frac{\overline{\partial}_\zeta M \wedge W}{\Phi^{|I|}} - \frac{M \wedge \overline{\partial}_\zeta W}{\Phi^{|I|}} + \frac{M \wedge W}{\Phi^{|I|+1}} \wedge \overline{\partial}_\zeta \Phi) \wedge d\overset{\circ}{\chi} \\ &\wedge (\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1-\overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_{z,\zeta} W}{\Phi})^{n-1-|I|} \wedge ((1-\overset{\circ}{\chi})(d_\lambda W)^{|I|-1} \\ &+ (n-1-|I|) a\widetilde{f}(\zeta) \frac{M \wedge W}{\Phi^{|I|}} \wedge d\overset{\circ}{\chi} \\ &\wedge (\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_\zeta \overline{\partial}_z M + (1-\overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_\zeta \overline{\partial}_z W}{\Phi} + (1-\overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_{z,\zeta} W \wedge \overline{\partial}_\zeta \Phi}{\Phi^2}) \\ &\wedge (\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1-\overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_{z,\zeta} W}{\Phi})^{n-2-|I|} \wedge ((1-\overset{\circ}{\chi})(d_\lambda W)^{|I|-1} \\ &+ (|I|-1) a\widetilde{f}(\zeta) \frac{M \wedge W}{\Phi^{|I|}} \wedge d\overset{\circ}{\chi} \\ &\wedge (\overset{\circ}{\chi}\, \overline{\partial}_{z,\zeta} M + (1-\overset{\circ}{\chi}) \frac{\overline{\partial}_{z,\zeta} W}{\Phi})^{n-1-|I|} \wedge ((1-\overset{\circ}{\chi})^{|I|-1} \overline{\partial}_\zeta d_\lambda W \wedge (d_\lambda W)^{|I|-2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$[f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|}=A+B+C+D+E+F+G$$

avec

$$\begin{aligned}
A&=\frac{O_{-2}}{\Phi^{|I|}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-1-|I|}\wedge W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\\
B&=\frac{O_{-1}}{\Phi^{|I|}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-1-|I|}\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\\
C&=\frac{O_{-1}}{\Phi^{|I|+1}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-1-|I|}\wedge W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\wedge\overline{\partial}_\zeta\Phi\\
D&=\frac{O_{-4}}{\Phi^{|I|}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-2-|I|}\wedge W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\\
E&=\frac{O_{-1}}{\Phi^{|I|+1}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-2-|I|}\wedge W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\\
F&=\frac{O_{-1}}{\Phi^{|I|+2}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-2-|I|}\wedge W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-1}\wedge\overline{\partial}_\zeta\Phi\\
G&=\frac{O_{-1}}{\Phi^{|I|}}\wedge(O_{-2}+\frac{O_0}{\Phi})^{n-1-|I|}\wedge W\wedge\overline{\partial}_\zeta d_\lambda W\wedge(d_\lambda W)^{|I|-2}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
A&=\sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I|\\0\le m\le|I|}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+s-m)+m}}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)\\
B&=\sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I|\\0\le m\le|I|-1}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+s-m)+m}}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)\\
C&=\sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I|\\0\le m\le|I|}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+1+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+1+s-m)+m}}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)\\
&+\sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I|\\0\le m\le|I|+1}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+1+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+1+s-m)+m}}\wedge\overline{\partial}\rho_{i_1}\wedge\partial\rho_{i_2}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)\\
D&=\sum_{\substack{0\le s\le n-2-|I|\\0\le m\le|I|}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+s-m)+m}}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)\\
E&=\sum_{\substack{0\le s\le n-2-|I|\\0\le m\le|I|}}\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+1+s-m)+m+1}}{\Phi^{(|I|+1+s-m)+m}}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)
\end{aligned}$$

$$F = \sum_{\substack{0\le s\le n-2-|I|\\ 0\le m\le |I|}} \frac{O_{|I|-2n+2(|I|+2+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+2+s-m)+m}} \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)$$
$$+ \sum_{\substack{0\le s\le n-2-|I|\\ 0\le m\le |I|+1}} \frac{O_{|I|-2n+2(|I|+2+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+2+s-m)+m}} \wedge \overline{\partial}\rho_{i_1}\wedge\partial\rho_{i_2}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)$$
$$G = \sum_{\substack{0\le s\le n-1-|I|\\ 0\le m\le |I|-1}} \frac{O_{|I|-2n+2(|I|+s-m)+m}}{\Phi^{(|I|+s-m)+m}} \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)$$

Définition 3.6 *Soient $m\in\mathbb{N}$, un entier, et $I\in\mathcal{I}(l)$, $1\le l\le k$, un multi-indice . Un* opérateur de type m *est, par définition, une application*

$$E\ :\ \mathcal{C}_{n,*}(D)\to\mathcal{C}^\infty_{n,*}(D_I)$$

telle qu'il existe

- *un entier $\kappa\ge 0$,*
- *une forme différentielle $\widehat{E}(z,\zeta,\lambda)$ de type $O_{|I|-2n+2\kappa+m}$ sur $D_I\times\Gamma_I\times\Delta_{0I}$ telle que pour toute forme différentielle $f\in\mathcal{C}_{n,*}(D)$*

$$Ef(z)=\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_I\times\Delta_{0I}}\widetilde{f}(\zeta)\wedge\frac{\widehat{E}(z,\zeta,\lambda)\wedge\Theta(\zeta)}{\Phi^{\kappa+m}(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})},$$

  où $\widetilde{f}\in\mathcal{C}_{0,*}(D)$ est la forme différentielle définie par

$$f(\zeta)=\widetilde{f}(\zeta)d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n,$$

  $\Theta=1$, si $m=1$, et $\Theta=\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)$ ou $\Theta=\overline{\partial}\rho_{i_1}\wedge\partial\rho_{i_2}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)$, si $m\ge 1$, avec $i_1,\dots,i_m\in I$.

Les calculs précédents montrent alors immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.7 *Les opérateurs intégraux*

$$f\mapsto\int_{\zeta\in S_I} f(\zeta)\wedge B_I(z,\zeta)$$
$$f\mapsto\int_{\zeta\in S^+_{I\cup\{j\}}} f(\zeta)\wedge B_I(z,\zeta)$$

sont des sommes finies d'opérateurs de type m.

Il résulte alors de l'étude faite dans [14] que pour tout $I \in \mathcal{I}(l)$, $1 \le l \le k$, tout $j \in \{\pm 1, \dots, \pm k\}$ tel que $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ et toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, les formes différentielles $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ et $\int_{\zeta \in S^+_{I \cup \{j\}}} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ sont de classe $\mathcal{C}^{1/2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc continues sur $\overline{D}_I$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_I.

Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans [0,1] telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \le \frac{1}{2}$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \ge 1$. On pose $\chi_\varepsilon(z,\zeta) = \chi(\frac{|\zeta - z|}{\varepsilon})$.

Lemme 3.8 *Pour tout $z \in S_I$ et toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D, on a*

$$\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\zeta \in S_I} (1 - \chi_\varepsilon(z,\zeta)) f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$$

Démonstration. Soit $z \in S_I$, comme $1 - \chi_\varepsilon(z,\zeta) = 0$ au voisinage de z, il résulte de la formule de Stokes que

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta \in S_I} (1 - \chi_\varepsilon(z,\zeta)) f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) \\
&\qquad = \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \overline{\partial}_\zeta ((1 - \chi_\varepsilon(z,\zeta)) f(\zeta)) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\qquad + (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} (1 - \chi_\varepsilon(z,\zeta)) f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\qquad = \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\qquad + (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\qquad - \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \overline{\partial}_\zeta (\chi_\varepsilon(z,\zeta) f(\zeta)) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\qquad - (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \chi_\varepsilon(z,\zeta) f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)
\end{aligned}$$

Mais d'après l'étude précédente, $\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta)$ est continue sur S_I et

$$\begin{aligned}
\int_{\zeta \in S_I} f(\zeta) \wedge B_I(z,\zeta) &= \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)) \wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\
&\quad + (-1)^{n+r} \int_{(\zeta,\lambda) \in \Gamma_I \times \Delta_{0I}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)
\end{aligned}$$

Nous devons donc prouver que, pour tout $z \in S_I$ et toute forme différentielle f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à support dans D,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_I\times\Delta_{0I}} \overline{\partial}_\zeta(\chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta))\wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda)$$
$$+(-1)^{n+r}\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_I\times\Delta_{0I}}\chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda)=0$$

Grâce aux estimations des noyaux K_{0I} et $\overline{\partial}_\zeta K_{0I}$, et par définition de χ_ε, il suffit d'évaluer des intégrales du type suivant :

$$A_{I,\varepsilon}(f)=\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_I\times\Delta_{0I}}\overline{\partial}_\zeta(\chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta))\wedge\frac{O_{|I|-2n+2\kappa+m+1}(z,\zeta,\lambda)\wedge\Theta(\zeta)}{\Phi^{\kappa+m}(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})},$$
$$C_{I,\varepsilon}(f)=\int_{(\zeta,\lambda)\in\Gamma_I\times\Delta_{0I}}\chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta)\wedge\frac{O_{|I|-2n+2\kappa+m}(z,\zeta,\lambda)\wedge\Theta(\zeta)}{\Phi^{\kappa+m}(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})}$$

On déduit des résultats des paragraphes 6 et 7 de [14] et de l'inégalité 3.8 qu'après intégration partielle en λ, les intégrales précédentes sont contrôlées par des sommes finies d'intégrales de la forme :

$$N_{I,\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\zeta,\in\Gamma_I\cap B(z,\varepsilon)}\frac{|\sigma\wedge d\rho_I|}{(|\rho_I|+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|I|-2}},$$
$$M_{I,\varepsilon}=\int_{\zeta\in\Gamma_I\cap B(z,\varepsilon)}\frac{|\sigma\wedge d\rho_I|}{(|\rho_I|+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|I|-1}}$$

et, pour $1\leq s\leq |I|$,

$$N_{I,\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\zeta\in\Gamma_I\cap B(z,\varepsilon)}\frac{|\sigma\wedge d\rho_I\wedge_{\nu=1}^s dt_\nu|}{(|\rho_I|+|\zeta-z|^2)\Pi_{\nu=1}^s(|t_\nu|+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|I|-s-2}},$$
$$M_{I,\varepsilon}=\int_{\zeta\in\Gamma_I\cap B(z,\varepsilon)}\frac{|\sigma\wedge d\rho_I\wedge_{\nu=1}^s dt_\nu|}{(|\rho_I|+|\zeta-z|^2)\Pi_{\nu=1}^s(|t_\nu|+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|I|-s-1}}$$

où ρ_I est la fonction définie par $\rho_I(\zeta)=\rho_{i_1}(\zeta)=\cdots=\rho_{i_{|I|}}(\zeta)$ pour $\zeta\in\Gamma_I$, σ un monôme en $d\zeta_1,\ldots,d\zeta_n,d\overline{\zeta}_1,\ldots,d\overline{\zeta}_n$, $\lambda^1,\ldots,\lambda^{|I|}$ des points de Δ_I qui forment un système de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^{|I|}$, $t_\nu=\mathrm{Im}\;\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$ et $dt_\nu=d_\zeta\,\mathrm{Im}\;\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$.

La fonction ρ_I peut être utilisée comme coordonnée locale sur Γ_I ainsi que les fonctions t_ν, $1\leq\nu\leq s$, car M est générique, par conséquent

$$N_{I,\varepsilon}\lesssim\frac{1}{\varepsilon}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n_|I|+1}\\ X_1<0,|X|<\varepsilon}}\frac{dX}{\Pi_{i=1}^s(|X_i|+|X|^2)|X|^{2n-|I|-s-2}}$$
$$\lesssim\varepsilon(1+|ln\varepsilon|)^{s+1}$$

et

$$\begin{aligned} M_{I,\varepsilon} &\lesssim \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n|I|+1}\\ X_1<0,|X|<\varepsilon}} \frac{dX}{\Pi_{i=1}^s(|X_i|+|X|^2)|X|^{2n-|I|-s-1}} \\ &\lesssim \varepsilon(1+|ln\varepsilon|)^{s+1} \end{aligned}$$

et donc $\lim_{\varepsilon\to 0} N_{I,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} M_{I,\varepsilon} = 0$. □

Considérons à présent la dernière condition d'intégrabilité :

- pour $I = J$ ou $I = \delta(K)$ et $J = K(\widehat{|K|})$ avec $K \in \mathcal{I}(l+1)$, $\int_{\zeta\in\widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta)\wedge B_I(z,\zeta)$ tend vers 0, quand ε tend vers 0, si f_ε est une forme différentielle continue sur U à support dans $D\cap\{|\rho_1|<\varepsilon\}\cap\cdots\cap\{|\rho_k|<\varepsilon\}$ telle que $\|\overline{\partial} f_\varepsilon\| = O(\frac{1}{\varepsilon})$ et $\int_{\zeta\in\widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta)\wedge B_I(z,\zeta) = o(\varepsilon)$, si de plus $\overline{\partial} f_\varepsilon = 0$.

On note $\widetilde{\Gamma}_J$ la partie de Γ_J, qui vérifie $\partial\widetilde{\Gamma}_J\cap S_J = \widetilde{S}_J$. Par la formule de Stokes et les résultats de continuité précédents, on obtient pour $z\in\overline{D}_I$

$$\begin{aligned} \int_{\zeta\in\widetilde{S}_J} f_\varepsilon(\zeta)\wedge B_I(z,\zeta) = &\int_{(\zeta,\lambda)\in\widetilde{\Gamma}_J\times\Delta_{0J}} f_\varepsilon(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta K_{0I}(z,\zeta,\lambda) \\ &+(-1)^{n+r}\int_{(\zeta,\lambda)\in\widetilde{\Gamma}_J\times\Delta_{0J}} \overline{\partial} f_\varepsilon(\zeta)\wedge K_{0I}(z,\zeta,\lambda). \end{aligned}$$

Grâce aux estimations que nous venons d'effectuer, pour évaluer chaque terme du second membre de la relation précédente, nous sommes amenés à étudier des intégrales du type suivant :

$$A_{I,J}\varphi_\varepsilon(z) = \int_{(\zeta,\lambda)\in\widetilde{\Gamma}_{J,\varepsilon}\times\Delta_{0J}} \varphi_\varepsilon(\zeta)\frac{O_{|I|-2n+2\kappa+m}(z,\zeta,\lambda)\wedge\Theta(\zeta)}{\Phi^{\kappa+m}(z,\zeta,\overset{\circ}{\lambda})},$$

où $\widetilde{\Gamma}_{J,\varepsilon} = \widetilde{\Gamma}_J\cap\{|\rho_1|<\varepsilon\}\cap\cdots\cap\{|\rho_k|<\varepsilon\}$ et φ_ε désigne soit $\widetilde{f}_\varepsilon$, soit $\overline{\partial}\widetilde{f}_\varepsilon$.

Les résultats des paragraphes 6 et 7 de [14] nous disent qu'après intégration partielle en λ les intégrales $A_{I,J}\varphi_\varepsilon(z)$ sont contrôlées par des sommes finies d'intégrales du type suivant :

$$M_J\varphi_\varepsilon(z) = \int_{\zeta\in\widetilde{\Gamma}_{J,\varepsilon}} \frac{\|\varphi_\varepsilon\|(\zeta)\ |\sigma\wedge d\rho_J|}{(|\rho_J|+d+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|J|-1}}$$

et, pour $1\le s\le |J|$,

$$M_J\varphi_\varepsilon(z) = \int_{\zeta\in\widetilde{\Gamma}_{J,\varepsilon}} \frac{\|\varphi_\varepsilon\|(\zeta)\ |\sigma\wedge d\rho_J\wedge_{\nu=1}^s dt_\nu|}{(|\rho_J|+d+|\zeta-z|^2)\Pi_{\nu=1}^s(|t_\nu|+d+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-|J|-s-1}},$$

où ρ_J est la fonction définie par $\rho_J(\zeta) = \rho_{j_1}(\zeta) = \cdots = \rho_{j_{|J|}}(\zeta)$ pour $\zeta \in \Gamma_J$, d la distance de z à S_J, σ un monôme en $d\zeta_1,\ldots,d\zeta_n,d\overline{\zeta}_1,\ldots,d\overline{\zeta}_n$, $\lambda^1,\ldots,\lambda^s$ des points de Δ_J, $t_\nu = \text{Im } \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$ et $dt_\nu = d_\zeta \text{Im } \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$.

La fonction ρ_J peut être utilisée comme coordonnée locale sur Γ_J et $\widetilde{\Gamma}_{J,\varepsilon}$ peut être paramétré localement par $\{(X',\rho_J,X") \in \mathbb{R}^{2n-k}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k-|J|} \mid |X'| \leq C,\ 0 \leq \rho_J \leq \varepsilon,\ X" = (Y',Y), Y < |X"|^2\}$. On en déduit en passant en coordonnées cylindriques que

$$M_J\varphi_\varepsilon(z) \lesssim \|\varphi_\varepsilon\|\varepsilon^2(1 + |ln\varepsilon|)$$

et, pour $1 \leq s \leq |J|$,

$$M'_J\varphi_\varepsilon(z) \lesssim \|\varphi_\varepsilon\|\varepsilon^2(1 + |ln\varepsilon|)^{1+s}$$

Ce qui prouve la dernière condition d'intégrabilité.

4 Une deuxième solution fondamentale

On considère toujours une sous-variété CR générique, q-concave M de classe $\mathcal{C}^3$, de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$ et un point z_0 de M. Il résulte du Théorème 2.5 que le noyau $B_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} sgn(I)B_I$, obtenu à partir des noyaux B_I construits dans la section 3, est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur un voisinage U_{z_0} de z_0 pour certains bidegrés, plus précisément c'est une forme différentielle définie sur $U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, où $\Delta(U_{z_0}) = \{(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \mid z = \zeta\}$ désigne la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$, qui vérifie au sens des courants

$$\overline{\partial}_z[B_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_\zeta[B_M]_{p,r} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}[\Delta(U_{z_0})], \tag{4.1}$$

où $[B_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de B_M, $0 \leq p \leq n$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$ et $[\Delta(U_{z_0})]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $U_{z_0} \times U_{z_0}$. L'objet de cette section est de construire une nouvelle solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel au voisinage de z_0 dont la singularité sur la diagonale est d'ordre inférieur.

Pour tout $I \in \mathcal{I}'(k)$, on note $I*$ le multi-indice $(i_1,\ldots,i_k,*)$, où $I = (i_1,\ldots,i_k)$, et $\mathcal{I}'(k,*)$ l'ensemble des multi-indices $I*$, lorsque I décrit $\mathcal{I}'(k)$. On pose $\rho_* = \rho_1 + \cdots + \rho_k$ et $\rho_\lambda = \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_k\rho_k + \lambda_*\rho_*$ pour $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_*) \in \Delta_{I*}$.

Soit E_* le plus gros sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ sur lequel la forme de Levi de ρ_* sur U est définie positive. La q-concavité de M et le choix des fonctions définissantes $\rho_1,\ldots,\rho_k$ impliquent que $\dim E_* \geq q + k$.

Comme dans la section 3 on construit des fonctions w^* et Φ_* pour la fonction ρ_* en posant

$$w_j^*(z,\zeta) = 2\frac{\partial\rho_*}{\partial\zeta_j}(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^*(\zeta)(\zeta_k - z_k) + B\sum_{k=1}^{n}\overline{Q_{jk}^*(\zeta_k - z_k)}$$
$$w^*(z,\zeta) = (w_1^*(z,\zeta),\dots,w_n^*(z,\zeta))$$
$$\Phi_*(z,\zeta) = \langle w^*(z,\zeta),\zeta - z\rangle,$$

où la fonction a_{jk}^*, $j,k = 1,\dots,n$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et vérifie pour tout $\zeta \in U$

$$|a_{jk}^*(\zeta) - \frac{\partial^2\rho_*}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}(\zeta)| < \frac{\alpha^*}{2n^2}$$

et Q^* est la projection orthogonale sur le supplémentaire orthogonal du sous espace E_*.

On pose

$$\widetilde{F}_*(\zeta,z) = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\rho_*}{\partial\zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^*(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k),$$

alors

$$\Phi_*(z,\zeta) = \widetilde{F}_*(\zeta,z) + B|Q^*(\zeta - z)|^2$$

et par conséquent

$$\mathrm{Re}\ \Phi_*(z,\zeta) \geq \rho_*(\zeta) - \rho_*(z) + \frac{\alpha^*}{2}|\zeta - z|^2.$$

Si $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k,\lambda_*) \in \Delta_{I*}$, est tel que $\lambda_* \neq 1$, on note λ' le point de Δ_I défini par

$$\lambda'_{i_\nu} = \frac{\lambda_{i_\nu}}{1 - \lambda_*} \quad (\nu = 1,\dots,l).$$

On considère une fonction χ_ε de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans lui-même, identiquement nulle au voisinage de 0 et identiquement égale à 1 au voisinage de 1, qui vérifie de plus $|\chi_\varepsilon(t) - t| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

Notons w^I et Φ_I les fonctions construites dans la section 3 pour le multi-indice I. On pose alors pour $\lambda \in \Delta_{I*}$

$$w^{I*}(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda_*)(2\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_{\lambda'}}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k))$$
$$+ (1-\chi_\varepsilon(\lambda_*))A\sum_{k=1}^n \overline{Q_{jk}^{\lambda'}(\zeta_k - z_k)}$$
$$+ \lambda_*(2\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_*}{\partial \zeta_j}(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^n a^*_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k))$$
$$+ \chi_\varepsilon(\lambda_*)B\sum_{k=1}^n \overline{Q^*_{jk}(\zeta_k - z_k)}$$
$$\Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda) = \langle w^{I*}(z,\zeta,\lambda),\zeta - z\rangle.$$

Notons que $w^{I*} = w^I$ et $\Phi_{I*} = \Phi_I$, si $\lambda_* = 0$, et $w^{I*} = w^*$ et $\Phi_{I*} = \Phi_*$, si $\lambda_* = 1$.

La fonction Φ_{I*} s'écrit

$$\Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda) = \widetilde{F}_\lambda(\zeta,z) + \langle P^\lambda(\zeta - z),\overline{\zeta} - \overline{z}\rangle$$

où P^λ est l'opérateur défini par $(1-\chi_\varepsilon(\lambda_*))AQ^{\lambda'} + \chi_\varepsilon(\lambda_*)BQ^*$ et si ε est choisi assez petit, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\ \Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda) \geq \rho_\lambda(\zeta) - \rho_\lambda(z) + \frac{\gamma}{2}|\zeta - z|^2. \tag{4.2}$$

On définit des sections de Leray $(\psi_J)_{J\in\mathcal{I}'(k,*)}$ au voisinage de z_0 en posant pour $J = I*$

$$\psi_J(z,\zeta,\lambda) = \frac{w^{I*}(z,\zeta,\lambda)}{\Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda)}.$$

Remarquons que $\psi_J|_{U_{z_0}\times U_{z_0}\setminus\Delta(U_{z_0})\times\Delta_I} = \psi_I$. A ces sections de Leray on associe les noyaux $K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)$ et $K_{I*}(z,\zeta,\lambda)$, pour $(z,\zeta,\lambda) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0}) \times \Delta_{0I*}$, définis par

$$K_{0I*}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_{0I*},d\zeta\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{0I*},d\zeta\rangle^{n-1} \wedge d(\zeta_1 - z_1)\wedge\cdots\wedge d(\zeta_n - z_n), \tag{4.3}$$

et par

$$K_{I*}(z,\zeta,\lambda) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\langle\psi_{I*},d\zeta\rangle \wedge \langle(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\psi_{I*},d\zeta\rangle^{n-1} \wedge d(\zeta_1 - z_1)\wedge\cdots\wedge d(\zeta_n - z_n). \tag{4.4}$$

On pose également, pour $(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$,

$$B_{I*}(z,\zeta) = C_{0I*}(z,\zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{0I*}} K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)$$
$$C_{I*}(z,\zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{I*}} K_{I*}(z,\zeta,\lambda)$$

et comme précédemment on a

$$\overline{\partial}_{z,\zeta} B_{I*} = B_{\delta(I*)} - C_{I*} \tag{4.5}$$

Lemme 4.1 *Pour $(z,\zeta) \in U_{z_0} \times U_{z_0} \setminus \Delta(U_{z_0})$, on a la relation*

$$\overline{\partial}_{z,\zeta}\Big(\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_{I*}\Big) = (-1)^k \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I - \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) C_{I*}. \tag{4.6}$$

Démonstration. Grâce à la relation 4.5 on a

$$\overline{\partial}_{z,\zeta} B_{I*} = (-1)^k B_I - C_{I*} + \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu+1} B_{I(\widehat{\nu})*}$$

Comme on l'a déjà remarqué dans la démonstration du Lemme 2.6

$$\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu+1} B_{I(\widehat{\nu})*} = 0,$$

ce qui prouve la relation 4.6. □

Théorème 4.2 *Le noyau $R_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) C_{I*}$ est une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel au voisinage de z_0. Plus précisément, on a pour $0 \le p \le n$ et $n-k-q+1 \le r \le n-k$*

$$\overline{\partial}_z [R_M]_{p,r-1} + \overline{\partial}_\zeta [R_M]_{p,r} = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} [\Delta(U_{z_0})], \tag{4.7}$$

où $[R_M]_{p,r}$ désigne la composante de bidegré (p,r) en z de R_M.

Démonstration. Puisque $B_M = \sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_I$ satisfait la relation 4.1, il suffit de prouver que

$$\overline{\partial}_{z,\zeta}\Big(\sum_{I \in \mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) B_{I*}\Big) = (-1)^k B_M - R_M \tag{4.8}$$

au sens des courants sur $U_{z_0} \times U_{z_0}$.

Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans [0,1] telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On pose $\chi_\varepsilon(z,\zeta) = \chi(\frac{|\zeta-z|}{\varepsilon})$. Notons pour simplifier les écritures $E_M = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \mathrm{sgn}(I)B_{I*}$.

Puisque $1-\chi_\varepsilon$ est identiquement nulle au voisinage de la diagonale de $U_{z_0}\times U_{z_0}$, il résulte du Lemme 4.1 que

$$\overline{\partial}_{z,\zeta}((1-\chi_\varepsilon)E_M) = \overline{\partial}_{z,\zeta}(1-\chi_\varepsilon)\wedge E_M + (1-\chi_\varepsilon)((-1)^k B_M - R_M)$$

au sens des courants sur $U_{z_0}\times U_{z_0}$.

Le lemme 3.8 nous permet d'affirmer que $(1-\chi_\varepsilon)B_M$ converge vers B_M faiblement au sens des courants sur $U_{z_0}\times U_{z_0}$ quand ε tend vers 0. Il nous reste à montrer que $(1-\chi_\varepsilon)R_M$, $(1-\chi_\varepsilon)E_M$ et $\overline{\partial}_{z,\zeta}((1-\chi_\varepsilon)E_M)$ convergent respectivement vers R_M, E_M et $\overline{\partial}_{z,\zeta}E_M$ faiblement au sens des courants sur $U_{z_0}\times U_{z_0}$ quand ε tend vers 0 et que $\overline{\partial}_{z,\zeta}(1-\chi_\varepsilon)\wedge E_M$ converge faiblement vers 0.

Soit f une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U_{z_0}. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta\in M}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge E_M(z,\zeta)\\
&\qquad = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)\int_{\zeta\in M}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge B_{I*}(z,\zeta)\\
&\qquad = \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)}\mathrm{sgn}(I)\int_{(\zeta,\lambda)\in M\times\Delta_{0I*}}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)
\end{aligned}$$

Par définition des noyaux K_{0I*}, des estimations analogues à celles effectuées dans la section 3 pour le noyau K_{0I} nous donnent

$$\begin{aligned}
[f(\zeta)\wedge K_{0I*}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|I|+1} = \sum_{\substack{0\leq s\leq n-2-|I|\\ 0\leq m\leq|I|}} &\frac{O_{|I|-2n+2(|I|+1+s-m)+m+2}}{\Phi^{(|I|+1+s-m)+m}}\\
&\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta).
\end{aligned}$$

En bornant m par $|I| = k$, nous avons tenu compte du fait que si $I = (i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{I}'(k)$ on a $\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_k}(\zeta)\wedge\partial\rho_*(\zeta) = 0$ car ρ_* est une combinaison linéaire de $\rho_1,\ldots,\rho_k$.

Soient σ un monôme en $d\zeta_1,\ldots,d\zeta_n,d\overline{\zeta}_1,\ldots,d\overline{\zeta}_n$, $\lambda^1,\ldots,\lambda^{k+1}$ des points de Δ_{I*} qui forment un système de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^{k+1}$, $t_\nu = \mathrm{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$ et $dt_\nu = d_\zeta\,\mathrm{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$. Par définition de Φ, on a

$$dt_\nu(z,\zeta) = i(\overline{\partial}\rho_{\lambda^\nu}(\zeta) - \partial\rho_{\lambda^\nu}(\zeta)) + O_1,$$

et par conséquent

$$\partial\rho_{\lambda^\nu}(\zeta) = \frac{1}{2}d\rho_{\lambda^\nu}(\zeta) + \frac{i}{2}dt_\nu(z,\zeta) + O_1.$$

Comme $d\rho_{\lambda^\nu}|_M = 0$ pour tout $1 \leq \nu \leq k+1$, il existe une constante C et des monômes σ_L en $d\zeta_1,\dots,d\zeta_n,d\overline{\zeta}_1,\dots,d\overline{\zeta}_n$ tels que pour tout $i_1,\dots,i_m \in I*$

$$|(\sigma \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta) \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m})|_M| \leq C \sum_{|L|\leq m} |\sigma_L \wedge_{l\in L} dt_l|\ |\zeta - z|^{m-|L|}.$$

Il résulte alors du paragraphe 6 et du Lemme 7.4 de [14] et de l'inégalité 4.2 qu'après intégration partielle en λ, $|\int_{\zeta\in M} \chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta)\wedge E_M(z,\zeta)|$ est contrôlé par une somme finie d'intégrales de la forme :

$$M_{s,\varepsilon} = \int_{\zeta\in M\cap B(z,\varepsilon)} \frac{|\sigma_s \wedge_{\nu=1}^s dt_\nu|}{\Pi_{\nu=1}^s(|t_\nu| + |\zeta - z|^2)|\zeta - z|^{2n-k-s-2}},$$

où $1 \leq s \leq k$.

Il nous reste à prouver que les fonctions de toute famille à k éléments extraite de la famille $(t_\nu)_{1\leq\nu\leq k+1}$ peuvent être utilisée comme coordonnées locales. Pour tout ν, $1 \leq \nu \leq k+1$, on a $\partial\rho_{\lambda^\nu} = \frac{i}{2}dt_\nu + O_1$ sur M, il suffit donc de montrer que $\partial\rho_{\lambda^{\nu_1}} \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{\lambda^{\nu_k}} \neq 0$, pour tout k-uplet $(\nu_1,\dots,\nu_k)$ extrait de $(1,\dots,k+1)$.

Puisque ρ_λ dépend linéairement de λ, l'indépendance linéaire des vecteurs $\lambda^1,\dots,\lambda^{k+1}$ implique l'existence d'une matrice A inversible d'ordre $k+1$ telle que $\partial\rho_{\lambda^\bullet} = A\partial\rho_{I*}$, où $\partial\rho_{\lambda^\bullet}$ est le vecteur colonne dont les coordonnées sont les $\partial\rho_{\lambda^\nu}$, $\nu = 1,\dots,k+1$, et $\partial\rho_{I*}$le vecteur colonne de coordonnées $\partial\rho_{i_1},\dots,\partial\rho_{i_k},\partial\rho_*$, si $I = (i_1,\dots,i_k)$.

Si $\rho_* = \rho_1 + \cdots + \rho_k$, on a, par définition des ρ_{i_j}, $|i_j| = j$, $\partial\rho_* = \varepsilon_1\partial\rho_{i_1} + \cdots + \varepsilon_k\partial\rho_{i_k}$, où $\varepsilon_j = \frac{i_j}{|i_j|}$. On note L_k la matrice carrée d'ordre $k+1$ dont les k premières lignes sont identiquement nulles et la $k+1$-ième ligne vaut $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k\ -1)$ et B la matrice rectangulaire $k+1\times k$, qui coïncide avec la matrice $A + AL_k$ privée de sa $(k+1)$-ième colonne identiquement nulle. On a $\partial\rho_{\lambda^\bullet} = B\partial\rho_I$. De plus toute matrice carrée B_k d'ordre k extraite de B est inversible et donc

$$\partial\rho_{\lambda^{\nu_1}} \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{\lambda^{\nu_k}} = det(B_k)\partial\rho_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_k} \neq 0,$$

car M est générique.

On peut maintenant intégrer en utilisant les coordonnées t_ν et on obtient

$$|\int_{\zeta\in M} \chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta) \wedge E_M(z,\zeta)| \lesssim \varepsilon^2(1 + |ln\varepsilon|)^k.$$

Les mêmes estimations, associées au fait que $|\overline{\partial}_{z,\zeta}(1-\chi_\varepsilon)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon}$, impliquent que

$$|\int_{\zeta\in M} \overline{\partial}_{z,\zeta}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge E_M(z,\zeta)| \lesssim \varepsilon(1+|ln\varepsilon|)^k.$$

Nous avons donc prouvé que $(1-\chi_\varepsilon)E_M$ converge faiblement vers E_M et que $\overline{\partial}_{z,\zeta}(1-\chi_\varepsilon)\wedge E_M$ converge faiblement vers 0 quand ε tend vers 0. De plus l'opérateur $\overline{\partial}_{z,\zeta}$ étant faiblement continu, $\overline{\partial}_{z,\zeta}((1-\chi_\varepsilon)E_M)$ converge faiblement vers $\overline{\partial}_{z,\zeta}E_M$.

Etudions maintenant la convergence de $(1-\chi_\varepsilon)R_M$. Soit f une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U_{z_0}. On a

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta\in M}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge R_M(z,\zeta)\\
&\qquad= \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)\int_{\zeta\in M}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge C_{I*}(z,\zeta)\\
&\qquad= \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I)\int_{(\zeta,\lambda)\in M\times\Delta_{I*}}(1-\chi_\varepsilon(z,\zeta))f(\zeta)\wedge K_{I*}(z,\zeta,\lambda)
\end{aligned}$$

Par définition (4.4) des noyaux K_{I*}, on a

$$\begin{aligned}
f(\zeta)\wedge K_{I*}(z,\zeta,\lambda) =& \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{(2i\pi)^n}\widetilde{f}(\zeta)\wedge\langle\psi_{I*},d\zeta\rangle\\
&\wedge\langle(\overline{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\psi_{I*},d\zeta\rangle^{n-1}\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n.
\end{aligned}$$

Comme on doit intégrer $f(\zeta)\wedge K_{I*}(z,\zeta,\lambda)$ sur Δ_{I*}, qui est de dimension réelle $|I|$, seule la composante de degré $|I|$ en λ du noyau K_{I*} donnera une contribution. Par des calculs analogues à ceux de la section 3, on obtient

$$\begin{aligned}
[f(\zeta)\wedge K_{I*}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|} &= \frac{O_0\wedge W}{\Phi^n}\wedge(d_\lambda W)^{|I|}\\
&= \sum_{\substack{0\leq m\leq|I|\\ i_1,\dots,i_m\in I*}} \frac{O_{|I|+1-m}}{\Phi^n}\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta).
\end{aligned}$$

Notons que comme dans le cas précédent $m\leq|I|=k$ et remarquons que, puisque la variété M n'est pas totalement réelle, on a $n>k$. Avec les notations ci-dessus, après intégration partielle en λ, $|\int_{\zeta\in M}\chi_\varepsilon(z,\zeta)f(\zeta)\wedge R_M(z,\zeta)|$ est contrôlé, grâce à 4.2, par une somme finie d'intégrales de la forme :

$$N_{s,\varepsilon} = \int_{\zeta\in M\cap B(z,\varepsilon)} \frac{|\sigma_s\wedge_{\nu=1}^s dt_\nu|}{\Pi_{\nu=1}^s(|t_\nu|+|\zeta-z|^2)|\zeta-z|^{2n-k-s-1}},$$

où $1 \leq s \leq k$.

En utilisant de nouveau les t_ν comme coordonnées locales, on obtient donc que

$$|\int_{\zeta\in M} \chi_\varepsilon(z,\zeta) f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta)| \lesssim \varepsilon(1+|ln\varepsilon|)^k.$$

Nous avons donc prouvé que $(1-\chi_\varepsilon)R_M$ converge faiblement vers R_M. $\square$

Corollaire 4.3 *Soit Ω un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans $M \cap U_{z_0}$.*

Si f est une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M

$$(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} f(z) = \overline{\partial}_z \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{\zeta\in\Omega} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{\zeta\in\partial\Omega} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta).$$

Si f est une (n,r)-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{\Omega}$, $0 \leq r \leq q-1$, alors on a la formule suivante au sens des courants sur M

$$(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} f(\zeta) = \overline{\partial}_\zeta \int_{z\in\Omega} f(z) \wedge R_M(z,\zeta)$$
$$+ (-1)^{k+1} \int_{z\in\Omega} \overline{\partial} f(z) \wedge R_M(z,\zeta) + (-1)^k \int_{z\in\partial\Omega} f(z) \wedge R_M(z,\zeta).$$

5 Estimations

On désigne toujours par M une sous-variété CR générique, q-concave, $q \geq 1$, de codimension réelle k dans $\mathbb{C}^n$ et par z_0 un point de M. Dans la section 4 nous avons défini une solution fondamentale R_M de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel sur M dans un voisinage U_{z_0} de z_0. Soit Ω un domaine relativement compact dans $M \cap U_{z_0}$. Pour toute (n,r)-forme f à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\widetilde{R}_M f(z) = \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta) \wedge R_M(z,\zeta) \quad \text{si} \quad n-k-q+1 \leq r \leq n-k \tag{5.1}$$

et

$$\widetilde{R}_M f(\zeta) = \int_{z\in\Omega} f(z) \wedge R_M(z,\zeta) \quad \text{si} \quad 0 \leq r \leq q-1 \tag{5.2}$$

Nous allons étudier les propriétés de régularité de l'opérateur $\widetilde{R}_M$ en fonction de la régularité de la variété M.

5.1 Estimations hölderiennes

On note $W^{0,\infty}_{n,r}(\Omega)$ l'espace des (n,r)-formes différentielles à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}_{n,r}(\Omega)$ l'espace des (n,r)-formes différentielles à coefficients hölderiens d'ordre $\frac{1}{2}$.

Théorème 5.1 *Si M est de classe $\mathcal{C}^2$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, l'opérateur $\widetilde{R}_M$ est continu de $W^{0,\infty}_{n,r}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}_{n,r-1}(\Omega)$.*

Démonstration. Soient z_1 et z_2 des points de Ω. On a

$$\widetilde{R}_M f(z_1) - \widetilde{R}_M f(z_2) = \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta) \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta)).$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}|\widetilde{R}_M f(z_1) - \widetilde{R}_M f(z_2)| \leq & \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1 \leq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |f(\zeta) \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))| \\ & + \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1 \geq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |f(\zeta) \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))|.\end{aligned}$$

L'opérateur R_M étant linéaire, on peut supposer sans perte de généralité que F est de la forme $f = \widetilde{f}\sigma$, où $\widetilde{f}$ est une fonction dans $L^\infty(\Omega)$ et σ un monôme en $d\zeta_1, \ldots, d\zeta_n, d\overline{\zeta}_1, \ldots, d\overline{\zeta}_n$. On obtient alors

$$\begin{aligned}|\widetilde{R}_M f(z_1) - \widetilde{R}_M f(z_2)| \leq \|f\|_\infty & \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1| \leq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))| \\ + \|f\|_\infty & \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1| \geq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))|.\end{aligned}$$

Nous devons donc estimer les intégrales

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1| \leq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))| \\ J_2 &= \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1| \geq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge (R_M(z_1,\zeta) - R_M(z_2,\zeta))|.\end{aligned}$$

Nous supposerons que $|z_1 - z_2| \leq 1$. Remarquons que

$$J_1 \leq \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_1| \leq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge R_M(z_1,\zeta)| + \int_{\substack{\zeta\in\Omega \\ |\zeta - z_2| \leq 3|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma \wedge R_M(z_2,\zeta)|.$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que

$$\begin{aligned}\sigma \wedge R_M(z,\zeta) &= \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) \int_{\lambda\in\Delta_{I*}} [\sigma \wedge K_{I*}(z,\zeta,\lambda)]_{\deg\lambda=|\mathrm{I}|} \\ &= \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \sum_{\substack{0\le m\le k\\ i_1,\dots,i_m\in I*}} \int_{\lambda\in\Delta_{I*}} \frac{O_{|I|+1-m}}{\Phi^n} \wedge \partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta).\end{aligned} \tag{5.3}$$

La variété M est supposée q-concave avec $q \ge 1$ et par conséquent $n > k+1$. L'intégration partielle par rapport à λ permet de contrôler $\int_{\substack{\zeta\in\Omega\\ |\zeta-z_j|\le c_j|z_1-z_2|^{1/2}}} |\sigma\wedge R_M(z_j,\zeta)|$, $j = 1{,}2$, par une somme finie d'intégrales de la forme :

$$A(z_1,z_2) = \int_{\substack{\zeta\in\Omega\\ |\zeta-z_j|\le c_j|z_1-z_2|^{1/2}}} \frac{|\sigma\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)|}{\Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)||\zeta-z|^{2n-3k+m-3}},$$

où $\lambda^1,\dots,\lambda^{k+1}$ sont des points de Δ_{I*}, $I\in\mathcal{I}'(k)$, qui forment un système de vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^{k+1}$.

On pose toujours $t_\nu = \operatorname{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$ et $dt_\nu = d_\zeta \operatorname{Im}\ \Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)$. Il résulte de la définition de ρ_* et de l'étude faite dans la section 4 que pour tout multi-indice $(\nu_1,\dots,\nu_k)$ extrait de $(1,\dots,k+1)$, on a

$$|\sigma\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}| \lesssim \sum_{0\le|L|\le m} |\sigma_L \wedge_{l\in L} dt_l|\ |\zeta-z|^{m-|L|}.$$

où $L = (l_1,\dots,l_{|L|})$ est un multi-indice de longueur $|L|\le k$ extrait de $(\nu_1,\dots,\nu_k)$.

Comme $|L|\le k$, il existe $\nu_L \in \{1,\dots,k+1\}\setminus L$ et d'après 4.2

$$\begin{aligned}&\Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)||\zeta-z|^{2n-3k+|L|-3} \ge \\ &\qquad\qquad \Pi_{l\in L}|\Phi(z,\zeta,\lambda^l)||\Phi(z,\zeta,\lambda^{\nu_L})||\zeta-z|^{2n-k-|L|-3}.\end{aligned}$$

Le terme de $A(z_1,z_2)$ correspondant à un multi-indice $L=\emptyset$ est majoré par

$$\begin{aligned}A_0(z_1,z_2) &\lesssim \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k}\\ |X|\le c_j|z_1-z_2|^{1/2}}} \frac{dX}{|X|^{2n-k-1}} \\ &\lesssim |z_1-z_2|^{\frac12}\end{aligned}$$

Si $0<|L|<k$, les fonctions $t_{l_1},,\dots,t_{l_{|L|}},t_{\nu_L}$ peuvent être utilisées comme coordonnées locales ainsi que nous l'avons remarqué dans la section 4. Les

termes de $A(z_1,z_2)$ correspondant à un multi-indice L de longueur strictement inférieure à k sont donc contrôlés par :

$$\begin{aligned} A_L(z_1,z_2) &\lesssim \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k}\\ |X|\leq c_j|z_1-z_2|^{1/2}}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{|L|+1}(|X_\nu|+|X|^2)\ |X|^{2n-k-|L|-3}} \\ &\lesssim |z_1-z_2|(1+|ln|z_1-z_2||)^{|L|+1}. \end{aligned}$$

Si $|L| = k$, on a $\Pi_{l\in L}|\Phi(z,\zeta,\lambda^l)||\Phi(z,\zeta,\lambda^{\nu_L})| = \Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)|$. Au voisinage de chaque point ζ de Ω, on peut supposer, quitte à renuméroter les λ^ν, que $0 \leq |\Phi(z,\zeta,\lambda^1)|,\dots,|\Phi(z,\zeta,\lambda^k)| \leq |\Phi(z,\zeta,\lambda^{k+1})|$. On a alors $\Pi_{\nu=1}^{k+1}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)| \geq \Pi_{\nu=1}^{k}|\Phi(z,\zeta,\lambda^\nu)|^{1+\frac{1}{k}}$. En prenant $\nu_1 = 1,\dots,\nu_k = k$, on a $L = (1,\dots,k)$ et $t_1,\dots,t_k$ peuvent être choisies comme coordonnées locales. Le terme de $A(z_1,z_2)$ correspondant à L de longueur k est majoré de la manière suivante après localisation de l'intégration :

$$\begin{aligned} A_L(z_1,z_2) &\lesssim \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k}\\ |X|\leq c_j|z_1-z_2|^{1/2}}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{k}(|X_\nu|+|X|^2)^{1+\frac{1}{k}}\ |X|^{2n-2k-3}} \\ &\lesssim |z_1-z_2|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $J_1 \lesssim |z_1-z_2|^{\frac{1}{2}}$. Nous allons maintenant étudier J_2.

Il résulte de la définition de J_2 et de 5.3 que

$$J_2 = \int_{\substack{(\zeta,\lambda)\in\Omega\times\Delta_{I*}\\ |\zeta-z_1|\geq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\frac{N(z_1,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} - \frac{N(z_2,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_2,\zeta,\lambda)}||\sigma\wedge\partial\rho_{i_1}(\zeta)\wedge\cdots\wedge\partial\rho_{i_m}(\zeta)|,$$

où $N(z,\zeta,\lambda)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z qui est un O_{k+1-m}.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{N(z_1,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} - \frac{N(z_2,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_2,\zeta,\lambda)} &= \frac{N(z_1,\zeta,\lambda)-N(z_2,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} \\ &\quad + N(z_2,\zeta,\lambda)[\frac{1}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} - \frac{1}{\Phi^n(z_2,\zeta,\lambda)}]. \end{aligned}$$

Alors par des méthodes analogues à celles utilisées dans l'étude de J_1, on peut montrer que

$$\begin{aligned} J_2' &= \int_{\substack{(\zeta,\lambda)\in\Omega\times\Delta_{I*}\\ |\zeta-z_1|\geq 2|z_1-z_2|^{1/2}}} |\frac{N(z_1,\zeta,\lambda)-N(z_2,\zeta,\lambda)}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)}| \\ &\lesssim |z_1-z_2|\sum_{0\leq s\leq k}\int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k}\\ 2|z_1-z_2|^{1/2}\leq|X|\leq C}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^{s+1}(|X_\nu|+|X|^2)\ |X|^{2n-k-s-2}} \\ &\lesssim |z_1-z_2|(1+|ln|z_1-z_2||)^{k+1}. \end{aligned}$$

car $|N(z_1,\zeta,\lambda) - N(z_2,\zeta,\lambda)| \leq |z_1 - z_2| O_{k-m}$.

La fonction $\Phi(z,\zeta,\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z et par conséquent

$$\frac{1}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} - \frac{1}{\Phi^n(z_2,\zeta,\lambda)} \lesssim \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|z_1 - z_2|}{\Phi^{n-p}(z_1,\zeta,\lambda)\Phi^{p+1}(z_2,\zeta,\lambda)}.$$

En remarquant que si $|\zeta - z_1| \geq 2|z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{|\zeta - z_1|}{|\zeta - z_2|} \leq 2$, après intégration partielle en λ nous obtenons

$$\begin{aligned}
J"_2 &= \int_{\substack{(\zeta,\lambda)\in\Omega\times\Delta_{I^*} \\ |\zeta - z| \geq 2|z_1 - z_2|^{1/2}}} N(z_2,\zeta,\lambda) \left| \frac{1}{\Phi^n(z_1,\zeta,\lambda)} - \frac{1}{\Phi^n(z_2,\zeta,\lambda)} \right| \\
&\lesssim |z_1 - z_2| \sum_{1\leq s\leq k} \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k} \\ 2|z_1 - z_2|^{1/2} \leq |X| \leq C}} \frac{dX}{\Pi_{\nu=1}^s (|X_\nu| + |X|^2)^{1+\frac{1}{s}} \; |X|^{2n-k-s-1}} \\
&+ |z_1 - z_2| \int_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n-k} \\ 2|z_1 - z_2|^{1/2} \leq |X| \leq C}} \frac{dX}{(|X_1| + |X|^2) \; |X|^{2n-k-1}} \\
&\lesssim |z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et par conséquent $J_2 \lesssim |z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}}$.

On en déduit donc qu'il existe une constante C telle que si $z_1,z_2 \in \Omega$

$$|\widetilde{R}_M f(z_1) - \widetilde{R}_M f(z_2)| \leq C\|f\|_\infty |z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

□

Remarquons que si on se restreint à une courbe complexe tangente joignant z_1 à z_2 la différentielle $d_z\Phi$ s'annule à l'ordre 1 en $z = \zeta$. Par des estimations analogues, on en déduit que $\widetilde{R}_M f$ est de classe $\mathcal{C}^{1-\varepsilon}$ sur toute courbe complexe tangente de M.

Dans le cas des petits degrés, les rôles de z et ζ sont inversés; pour appliquer les estimations ci-dessus nous avons donc besoin d'un noyau de classe $\mathcal{C}^1$ en ζ. Comme R_M fait intervenir des dérivées d'ordre 2 en ζ des fonctions définissantes de M, nous devons supposer que M est de classe $\mathcal{C}^3$.

Théorème 5.2 *Si M est de classe $\mathcal{C}^3$ et $0 \leq r \leq q-1$, l'opérateur $\widetilde{R}_M$ est continu de $W^{0,\infty}_{n,r}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}_{n,r-1}(\Omega)$.*

5.2 Estimations d'ordre supérieur

Nous allons utiliser des idées développées dans [15] et reprises par [8].

On note $\Phi_j(z,\zeta)$ la fonction Φ_J pour $J=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda_*)\in\mathcal{I}'(k*)$ avec $\lambda_j=1$

Lemme 5.3 *Il existe des champs de vecteurs $Y_1^\zeta,\ldots,Y_k^\zeta$ tangents à M tels que pour tout $\zeta\in U(z_0)$ et $1\le i,j\le k$*

$$Y_i^\zeta\Phi_j(\zeta,\zeta)=\delta_{ij},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Démonstration. Puisque M est générique, $\partial\rho_1\wedge\cdots\wedge\partial\rho_k\neq 0$ sur $U(z_0)$ et par conséquent la matrice

$$A=\begin{pmatrix}\langle\partial\rho_1(\zeta),\partial\rho_1(\zeta)\rangle & \ldots & \langle\partial\rho_k(\zeta),\partial\rho_1(\zeta)\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\partial\rho_1(\zeta),\partial\rho_k(\zeta)\rangle & \ldots & \langle\partial\rho_k(\zeta),\partial\rho_k(\zeta)\rangle\end{pmatrix},$$

où $\langle\partial\rho_i(\zeta),\partial\rho_j(\zeta)\rangle=\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial\rho_j}{\partial\overline{\zeta}_\nu}(\zeta)\frac{\partial\rho_i}{\partial\zeta_\nu}(\zeta)$, est inversible pour tout $\zeta\in U(z_0)$ et il existe $\nu_1,\ldots,\nu_k\in\{1,\ldots,n\}$ tels que la matrice

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\partial\rho_1}{\partial\zeta_{\nu_1}}(\zeta) & \ldots & \frac{\partial\rho_k}{\partial\zeta_{\nu_1}}(\zeta)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\rho_k}{\partial\zeta_{\nu_1}}(\zeta) & \ldots & \frac{\partial\rho_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}(\zeta)\end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $\zeta\in U(z_0)$.

On pose

$$Y_i^\zeta=\frac12\sum_{j=1}^k\alpha_{ij}(\zeta)\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial\rho_j}{\partial\overline{\zeta}_\nu}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_\nu}-\frac12\sum_{j=1}^k\beta_{ij}(\zeta)\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_\nu}$$

où $[\alpha_{ij}]=A^{-1}$ et $[\beta_{ij}]=B^{-1}$.

On montre alors facilement que pour $1\le i,j\le k$

$$Y_i^\zeta\Phi_j(\zeta,\zeta)=\delta_{ij}\quad\text{et}\quad Y_i^\zeta\rho_j=0.$$

□

Puisque $\rho_*=\rho_1+\cdots+\rho_k$, on a par définition de Φ_{I*}

$$\Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda)=\sum_{j=1}^k(\lambda_J+\lambda_*)\Phi_j(z,\zeta)+O_2.$$

Pour $\lambda \in \Delta_{I*}$, on définit le champs de vecteurs Y_λ^ζ par

$$Y_\lambda^\zeta = \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j + \lambda_*}{\sum_{j=1}^k (\lambda_j + \lambda_*)^2} Y_j^\zeta,$$

Le champs de vecteur Y_λ^ζ est tangent à M et vérifie $Y_\lambda^\zeta \Phi_{I*}(\zeta,\zeta,\lambda) = 1$ pour $\zeta \in U(z_0)$ et $\lambda \in \Delta_{I*}$.

Définition 5.4 *Une forme différentielle définie sur $U(z_0) \times U(z_0) \times \Delta_{I*}$ appartient à la classe $\mathcal{E}_\delta$ si elle peut s'écrire*

$$\frac{E^{\alpha+k-m}}{(\Phi_{I*} + \delta)^\beta} \partial\rho_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial\rho_{i_m},$$

où $E^j = O_0(\zeta - z)^j$ et α et β sont des entiers tels que $2n - 1 - 2\beta + \alpha \geq 0$.

On dira qu'un noyau L_δ est dans la classe $\mathcal{L}_\delta$ si

$$L_\delta(z,\zeta) = \int_{\lambda \in \Delta_{I*}} E_\delta(z,\zeta,\lambda),$$

où E_δ appartient à $\mathcal{E}_\delta$.

Le noyau R_M est une somme finie d'éléments de la classe $\mathcal{L}_0$. Remarquons que si on remplace R_M par un noyau de la classe $\mathcal{L}_\delta$, $\delta > 0$, l'inégalité 5.4 reste vraie avec une constante C qui ne dépends pas de δ, car $|\Phi_{I*} + \delta| \geq \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, \Phi_{I*} + |\mathrm{Im}\, \Phi_{I*}|)$.

Si X^z est un champs de vecteur tangent à M en la variable z, on note X^ζ le champs correspondant en la variable ζ.

Lemme 5.5 *Fixons $\delta > 0$, pour tout noyau E_δ de classe $\mathcal{C}^l$ appartenant à $\mathcal{E}_\delta$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $(z,\zeta) \in U(z_0) \times U(z_0)$ vérifiant $|z - \zeta| < \varepsilon$ on a*

$$X^z E_\delta = -X^\zeta E_\delta + \frac{(X^z + X^\zeta)\Phi_{I*}}{Y_\lambda^\zeta \Phi_{I*}} Y_\lambda^\zeta L_\delta + G_\delta,$$

où G_δ est une somme finie de noyaux de classe $\mathcal{C}^{l-1}$ appartenant à $\mathcal{E}_\delta$.

Démonstration. On remarque que puisque $Y_\lambda^\zeta \Phi_{I*}(\zeta,\zeta,\lambda) = 1$ pour $\zeta \in U(z_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ et une constante C telle que $Y_\lambda^\zeta \Phi_{I*}(z,\zeta,\lambda) > C$ si $|z - \zeta| < \varepsilon$. Par ailleurs

$$(X^z + X^\zeta)E^j = E^j$$
$$(X^z + X^\zeta)\Phi_{I*} = E^1$$
$$Y_\lambda^\zeta E^j = E^{j-1}.$$

Le lemme résulte alors d'un calcul direct. $\square$

On note $W^{l,\infty}_{n,r}(\Omega)$ l'espace des (n,r)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^l$ dont les dérivées d'ordre l des coefficients appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}_{n,r}(\Omega)$ l'espace des (n,r)-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^l$ dont les dérivées d'ordre l des coefficients sont hölderiennes d'ordre $\frac{1}{2}$.

Théorème 5.6 *Si M est de classe $\mathcal{C}^{l+2}$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$, l'opérateur $\widetilde{R}_M$ est continu de $W^{l,\infty}_{n,r}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}_{n,r-1}(\Omega)$.*

Démonstration. Fixons un point z_1 dans Ω et choisissons une fonction χ à support compact dans Ω telle que $\chi(\zeta)=1$, si $|\zeta-z_1|\leq\frac{\varepsilon}{4}$, et $\chi(\zeta)=0$, si $|\zeta-z_1|\geq\frac{\varepsilon}{2}$, où ε est donné par le Lemme 5.5. On pose $D(z_1)=\{z\in\Omega \mid |z-z_1|\leq\frac{\varepsilon}{4}\}$. On écrit

$$\widetilde{R}_M f(z)=\int_{\zeta\in\Omega}\chi(\zeta)f(\zeta)\wedge R_M(z,\zeta)+\int_{\zeta\in\Omega}(1-\chi(\zeta))f(\zeta)\wedge R_M(z,\zeta).$$

On note $J_1(f)$ la première intégrale du second membre et $J_2(f)$ la seconde.

Puisque $R_M(z,\zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z pour $z\neq\zeta$, l'intégrale $J_2(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(z_1)$.

Lemme 5.7 *Soient $\delta>0$, L_δ un noyau de classe $\mathcal{C}^l$ appartenant à $\mathcal{L}_\delta$ et f une (n,r)-forme dans $W^{l,\infty}_{n,r}(\Omega)$. Si*

$$\widetilde{L}_\delta f(z)=\int_{\zeta\in\Omega}\chi(\zeta)f(\zeta)\wedge L_\delta(z,\zeta)$$

et si $X^z_1,\dots,X^z_j$ sont des champs de vecteurs tangents à M, $j\leq l$, alors $X^z_1\dots X^z_j\widetilde{L}_\delta f$ appartient à $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}_{n,r}(\Omega)$ et il existe une constante C_j indépendante de δ et de f telle que

$$\|X^z_1\dots X^z_j\widetilde{L}_\delta f\|_{\frac{1}{2},D(z_1)}\leq C_j\|f\|_\infty.$$

Démonstration. Le Lemme 5.5 et une intégration par parties donnent

$$X^z\widetilde{L}_\delta f(z)=\int_{\zeta\in\Omega}\widetilde{X}^\zeta(\chi(\zeta)f(\zeta))\wedge L_\delta(z,\zeta)+\int_{\zeta\in\Omega}\chi(\zeta)f(\zeta)\wedge P_\delta(z,\zeta),$$

où $\widetilde{X}^\zeta$ est un champs de vecteurs tangent à M indépendant de δ et P_δ une somme finie de noyaux de classe $\mathcal{C}^{l-1}$ appartenant à $\mathcal{L}_\delta$. En appliquant successivement les champs de vecteurs $X^z_1,\dots,X^z_j$, on obtient donc

$$X^z_1\dots X^z_j\widetilde{L}_\delta f(z)=\sum_{\nu=0}^{j}\sum_{j_\nu\in\{1,\dots,j\}}\int_{\zeta\in\Omega}X^\zeta_{j_1}\dots X^\zeta_{j_\nu}\chi(\zeta)f(\zeta)\wedge Q_\delta(z,\zeta),$$

où Q_δ est une somme finie de noyaux de classe $\mathcal{C}^{l-1}$ appartenant à $\mathcal{L}_\delta$. On peut estimer les intégrales du membre de droite comme dans la section 5.1 avec des constantes indépendantes de δ ainsi que nous l'avons remarqué après la Définition 5.4. $\square$

Terminons la démonstration du Théorème 5.6. On note $L_{\delta,M}$ le noyau obtenu en remplaçant Φ_{I*} par $\Phi_{I*}+\delta$ dans R_M. On peut montrer en utilisant les mêmes arguments que dans le Lemme 2.11 de [8] que $\widetilde{L}_{\delta,M}f$ et $X_1^z\ldots X_j^z\widetilde{L}_{\delta,M}f$ converge uniformément vers $\widetilde{R}_Mf$ et $X_1^z\ldots X_j^z\widetilde{R}_Mf$ sur Ω lorsque δ tend vers 0. Les constantes C_j du Lemme 5.7 étant indépendantes de δ, le théorème est alors démontré. $\square$

Un travail similaire en inversant les rôles de z et ζ permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 5.8 *Si M est de classe $\mathcal{C}^{l+3}$ et $1\le r\le q-1$, l'opérateur $\widetilde{R}_M$ est continu de $W^{l,\infty}_{n,r}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}_{n,r-1}(\Omega)$.*

Nous terminons en prouvant un lemme de Poincaré pour le $\overline{\partial}_b$ avec régularité $\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}$.

Théorème 5.9 *Soient M une variété CR générique q-concave, de codimension réelle k, de classe $\mathcal{C}^3$ plongée dans $\mathbb{C}^n$ et z_0 un point de M. Pour tout voisinage ouvert U de z_0 dans M, il existe un voisinage ouvert $V\subset U$ de z_0 et pour tout r tel que $1\le r\le q-1$ ou $n-k-q+1\le r\le n-k$, un opérateur*

$$T_r\ :\ \mathcal{C}_{n,r}(U)\to\mathcal{C}_{n,r}(V)$$

possédant les propriétés suivantes :

1. *(i) $f|V=\overline{\partial}_bT_rf+T_{r+1}\overline{\partial}_bf$, pour $1\le r\le q-2$ et $n-k-q+1\le r\le n-k$,*
2. *(ii) $f|V=\overline{\partial}_bT_rf$, si $r=q-1$ et $\overline{\partial}_bf=0$,*
3. *(iii) si $f\in\mathcal{C}^l_{n,r}(U)$ alors $T_rf\in\mathcal{C}^{l+\frac{1}{2}}_{n,r}(V)$ si M est de classe $\mathcal{C}^{l+3}$ et $1\le r\le q-1$ ou si M est de classe $\mathcal{C}^{l+2}$ et $n-k-q+1\le r\le n-k$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que U est contenu dans $M\subset U(z_0)$. Soit B une petite boule centrée en z_0 telle que $\Omega=B\cap M$ soit un domaine à bord $\mathcal{C}^1$ relativement compact dans U. Si f est une (n,r)- forme continue sur U, on définit les opérateurs P_r par :

$$P_rf(\zeta)=(-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}}\int_{z\in b\Omega}f(z)\wedge[R_M]_{n,n-k-r-1}(z,\zeta)\qquad\text{si}\quad 1\le r\le q-1,$$

$$P_rf(z) = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} \int_{\zeta\in b\Omega} f(\zeta) \wedge [R_M]_{n,r}(z,\zeta)$$
$$\text{si} \quad n-k-q+1 \leq r \leq n-k.$$

Il résulte de la définition des noyaux R_M que les opérateurs P_r sont continus de $\mathcal{C}^l_{n,r}(U)$ dans $\mathcal{C}^l_{n,r}(\Omega)$ si M est de classe $\mathcal{C}^{l+3}$ et $1 \leq r \leq q-1$ ou si M est de classe $\mathcal{C}^{l+2}$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$. Soit B' une autre boule centrée en z_0 telle que $B' \cap M \subset\subset \Omega$. En utilisant le noyau de Henkin associé à la boule B', on obtient un opérateur linéaire continu L_r de $\mathcal{C}^l_{n,r}(B')$ dans $\mathcal{C}^{l+\varepsilon}_{n,r-1}(B')$, $0 < \varepsilon < 1$, tel que

$$P_rf|_{B'} = \overline{\partial} L_{r-1} P_r f + L_r \overline{\partial} P_r f.$$

On pose alors

$$T_rf = (-1)^{(k+1)(r+n)+\frac{k(k+1)}{2}} \widetilde{R}_M f + (-1)^k L_{r-1} P_r f.$$

La formule d'homotopie du *(i)* résulte alors du Corollaire 4.3 et du fait que, grâce à 4.7, $\overline{\partial} P_r = P_{r+1} \overline{\partial}_b$, si $0 \leq s \leq q-2$ et $n-k-q+1 \leq r \leq n-k$.

Le point *(ii)* se déduit aussi du Corollaire 4.3 en remarquant que $\overline{\partial} P_r f = 0$, si $\overline{\partial}_b f = 0$ et $r = q-1$. En appliquant la Proposition 3.2 et le Lemme 4.1 on obtient

$$\overline{\partial}_{z,\zeta} R_M = (-1)^{k+1} \sum_{I\in\mathcal{I}'(k)} \operatorname{sgn}(I) C_I.$$

Mais, d'après le Lemme 3.4, $\overline{\partial}_z [C_I]_{n,n-k-q} = 0$ et par des arguments analogues à ceux développés dans [13] (Lemme 5.4 et 5.5), pour tout $I \in \mathcal{I}'(k)$, on peut approcher uniformément au voisinage de $b\Omega$ les $[C_I]_{n,n-k-q}$ par des formes $\overline{\partial}_z$-fermées au voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors la formule de Stokes permet de prouver que $\overline{\partial} P_{q-1} f = 0$, si $\overline{\partial}_b f = 0$.

Finalement *(iii)* est une conséquence des Théorèmes 5.6 et 5.8 et de la régularité des opérateurs L_r. □

6 Appendice

Cet appendice reprend des résultats démontrés dans [14], utilisés pour estimer l'intégration en λ pour les différents noyaux.

Soient $h \geq 2$, un entier et $K = (k_1, \dots, k_s) \in P'(h)$, on pose $d\lambda_K = d\lambda_{k_2} \wedge \dots \wedge d\lambda_{k_s}$. Soient de plus C_*, δ et ε des constantes positives, $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ des nombres complexes tels que

$$\operatorname{Re} \varphi_j \geq \delta + \varepsilon \tag{6.1}$$

Si $i,j \in \{1,\ldots,h\}$ avec $i \neq j$, ∇_j^i représente la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$ en considérant λ_j dans le système de coordonnées $(\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_i},\ldots,\lambda_h)$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ et on note

$$\nabla_{j_1\ldots j_t}^{i_1\ldots i_t} = \nabla_{j_1}^{i_1}\ldots\nabla_{j_t}^{i_t}$$

pour $t \geq 2$, et $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,t)$.
Soient γ et Γ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Delta_{(1,\ldots,h)}$ telles que

$$|\gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.2}$$

$$|\nabla_{j_1\ldots j_t}^{i_1\ldots i_t}\gamma(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.3}$$

$$|\Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{6.4}$$

$$|\nabla_{j_1\ldots j_t}^{i_1\ldots i_t}\Gamma(\lambda)| \leq C_* \tag{6.5}$$

pour tout $\lambda \in \Delta_{(1,\ldots,h)}$, $1 \leq t \leq h+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq h$, avec $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,t)$.

Rappelons les estimations prouvées dans le Théorème 6.1 de [14] :

Théorème 6.1 *Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $C_p = (3p)!2^{7p}$, alors*

1. *pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{(\delta+\varepsilon)^p}$$

2. *pour tout $K \in P'(h)$ et tout $p \geq |K|+1$*

$$\left| \int_{\Delta_{(1,\ldots,h)}} \frac{\Gamma(\lambda) d\lambda_{(1,\ldots,h)}}{\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j \varphi_j + \gamma(\lambda)\right)^p} \right| \leq \frac{C_p C_*}{\prod_{j\in K} |\varphi_j| (\delta+\varepsilon)^{p-|K|}}$$

On définit maintenant la notion de famille de sommets admissibles correspondant ý la Définition 7.3 dans [14] :

Définition 6.2 *Soit α la constante donnée par la relation 3.5. Une* famille de sommets admissibles *est une famille ordonnée $(\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$ de points de $\Delta_{(1,\ldots,N+1)}$ telle que :*

(i) il existe $K = (k_1,\ldots,k_l) \in P'(N+1)$ tel que $\lambda^j \in \Delta_K$, pour $j = 1,\ldots,l$;

(ii) $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^l$;

(iii) pour tout $(\zeta,z,\tau) \in \mathbb{C}^n \times U_{\overline{D}} \times \Delta_{(1,\ldots,l)}$ *la fonction* γ *définie par*

$$\gamma(\zeta,z,\tau) = \varphi(\zeta,z,\sum_{j=1}^{l} \tau_j \lambda^j) - \sum_{j=1}^{l} \tau_j \varphi(\zeta,z,\lambda^j)$$

vérifie les relations suivantes :

$$|\gamma(\zeta,z,\tau)| \leq \frac{\alpha}{8}|\zeta - z|^2 \tag{6.6}$$

$$|\nabla^{i_1\ldots i_t}_{j_1\ldots j_t}\gamma(\zeta,z,\tau)| \leq \frac{\alpha}{8}|\zeta - z|^2 \tag{6.7}$$

pour tout $1 \leq t \leq l+2$, $1 \leq i_\nu, j_\nu \leq l$, *avec* $i_\nu \neq j_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,t)$.

Si $(\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$ est une famille de sommets admissibles, alors, on note

$$\Delta(\lambda^1,\ldots,\lambda^l) = \left\{ \sum_{j=1}^{l} \tau_j \lambda^j, \tau \in \Delta_{1,\ldots,l} \right\}$$

On dit alors qu'un simplexe Δ est *admissible* s'il existe une famille de sommets admissibles, $(\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$, telle que $\Delta = \Delta_{\lambda^1,\ldots,\lambda^l}$.

On peut maintenant énoncer le lemme suivant, qui est démontré dans [14] :

Lemme 6.3 *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, si* $K = (k_1,\ldots,k_l) \in P'(N+1)$ *et* $\lambda^1,\ldots,\lambda^l \in \Delta_K$ *sont des vecteurs linéairement indépendants avec*

$$|\lambda^i - \lambda^j| < \varepsilon, \ (1 \leq i,j \leq l)$$

alors $(\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$ *est une famille de sommets admissibles.*

D'après le Lemme 6.3, on peut diviser Δ_I en un nombre fini de simplexes admissibles.

Si $\lambda^1,\ldots,\lambda^l$ est une famille de sommets admissible fixée, on pose

$$\widetilde{\Delta}(\lambda^1,\ldots,\lambda^l) = \{\lambda \in \overset{\circ}{\Delta}_{0I} | \overset{\circ}{\lambda} \in \Delta(\lambda^1,\ldots,\lambda^l).$$

Les intégrales sur Δ_{0I} sont donc des sommes finies d'intégrales associées ý des simplexes admissibles.

Pour majorer l'intégration en λ, on remarque alors que

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,\frac{1}{2}] \times \Delta_I & \longrightarrow & \widetilde{\Delta} \\ (\tau,\vartheta) & \longmapsto & \left(\tau,(1-\tau)\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \lambda^j_1,\ldots,(1-\tau)\sum_{j=1}^{l} \vartheta_j \lambda^j_l\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme et on peut alors utiliser le Théorème 6.1.

Références

[1] R. A. Airaptjan, G. M. Henkin, *Integral representation of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR function*, Russian Math.Survey **39** (1984), 41–118.

[2] ———, *Integral representation of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR function II*, Math.USSR Sbornik **55** (1986), 91–111.

[3] M. Y. Barkatou, *Formules locales de type Bochner-Martinelli-Koppelman sur des variétés CR, applications*, Thèse, Grenoble, 1994.

[4] ———, *Régularité hölderienne du $\overline{\partial}_b$ sur les hypersurfaces* 1*-convexes-concaves*, Math. Zeit. **221** (1996), 549–572.

[5] ———, *Some applications of a new integral formula for $\overline{\partial}_b$*, Ann. Pol. Math. **70** (1998), 1–24.

[6] ———, *Optimal regularity for $\overline{\partial}_b$ on CR manifolds*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 1–23.

[7] A. Boggess, *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991.

[8] B. Fischer, *Kernels of Martinelli-Bochner type on hypersurfaces*, Math. Zeit. **223** (1996), 155–183.

[9] B. Fischer, J.Leiterer, *A local Martinelli-Bochner formula on hypersurfaces*, Math. Zeit. **214** (1993), 659–681.

[10] R. Harvey, J. Polking, *Fundamental solutions in complex analysis, Part I and II*, Duke Math. J. **46** (1979), 253–300 and 301–340.

[11] G. M. Henkin, *The Hans Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Math. USSR Sbornik **31** (1977), 59–130.

[12] G. M. Henkin, J. Leiterer, *Andreotti-Grauert theory by integral formulas*, Progress in Math., vol. 74, Birkhaüser, 1988.

[13] C. Laurent-Thiébaut, J. Leiterer, *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-concave wedges*, Colloque d'analyse complexe and géométrie, Marseille, janvier 1992, Astérisque, vol. 217, 1993, pp. 151–182.

[14] ———, *Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 383–436.

[15] L. Ma, J. Michel, *Local regularity for the tangential Cauchy-Riemann*, Journal für die reine und angewandte Math. **442** (1993), 63–90.

[16] A. V. Romanov, *A formula and estimates for the solution of the tangential Cauchy-Riemann equation*, Math. USSR Sbornik **28** (1976), 49–71.

[17] M.-C. Shaw, *Integral representations for $\overline{\partial}_b$ in CR manifolds*, Geometric Complex Analysis, edited by Junjiro Noguchi and al., World Scientific Publishing Co., 1996, pp. 535–549.

[18] H. Skoda, *Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna*, Bul. SMF **104** (1976), 225–299.

Université de Poitiers SP2MI
UMR 6086 Groupes de Lie et Géométrie
Bd Marie et Pierre Curie
BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex
France
barkatou@mathlabo.univ-poitiers.fr

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 CNRS/UJF
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France
Christine.Laurent@ujf-grenoble.fr