

Déformations complètement intégrables de systèmes complètement intégrables

Nicolas Roy

Prépublication de l'Institut Fourier n°592 (2003)

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublication.html>

Résumé : Soit H un Hamiltonien complètement intégrable régulier, pour lequel on considère des petites perturbations εV . On donne les conditions au premier ordre en ε pour que le Hamiltonien perturbé $H + \varepsilon V$ reste complètement intégrable, en considérant le cas où le système reste régulier et le cas où il devient singulier.

Abstract : Let H be a regular completely integrable Hamiltonian for which we consider small perturbations εV . We give the conditions to first order in ε for the perturbed Hamiltonian $H + \varepsilon V$ to remain completely integrable, dealing with both cases when the system remains regular and when it becomes singular.

Keywords : completely integrable Hamiltonian systems, deformations, non-degeneracy conditions.

AMS classification : 53J35, 53J40, 70H06, 70H09.

Introduction

Déformations de systèmes complètement intégrables

Soit (\mathcal{M}, ω) une variété symplectique de dimension $2N$ et $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ un hamiltonien. En général, la dynamique donnée par le champ de vecteurs \mathcal{X}_H associé au hamiltonien est extrêmement compliquée et peut même avoir des trajectoires denses dans une couche d'énergie $H^{-1}(E)$. Il est alors très difficile de prédire quoi que ce soit sur les trajectoires. Dans certains cas, cependant, il se peut que les trajectoires soient confinées à l'intérieur de sous-variétés $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, de dimension inférieure à $2N - 1$. Lorsque ces sous-variétés sont lagrangiennes, cela implique des restrictions très fortes sur la dynamique, notamment, qu'elle est linéaire pour un système de coordonnées sur \mathcal{N} convenablement choisi. Un hamiltonien est complètement intégrable (CI en abrégé) quand \mathcal{M} est fibré par de telles sous-variétés lagrangiennes invariantes par la dynamique.

En général, l'ajout à H d'une petite perturbation εV détruit ce caractère CI. Beaucoup de travaux, reliés au fameux théorème KAM¹, sont consacrés cependant à l'étude des structures du système CI qui sont conservées après l'ajout de la perturbation ; ce sont les sous-variétés \mathcal{N} sur lesquelles la dynamique de \mathcal{X}_H vérifie une certaine condition diophantienne.

Les hamiltoniens complètement intégrables ne sont donc pas "génériques", mais on peut se demander quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable. C'est en fait une question à deux volets, puisque un système CI est soit régulier, soit singulier. Il est alors naturel, lorsque l'on se donne un système CI régulier, de se poser les deux questions suivantes :

- Quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable **régulier** ?
- Quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable, mais en le rendant **singulier** ?

Cette question est en général difficile, mais on s'intéresse dans ce papier à expliciter la condition formelle "au premier ordre en ε ", qui est une condition nécessaire pour le système réel ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).

Dans une première partie (section A), on rappellera les définitions d'un système complètement intégrable, et on énoncera certaines constructions et propriétés qui seront utilisées par la suite. On explicitera notamment la condition de non-dégénérescence nécessaire pour notre approche, et on donnera en appendice (section C) les relations d'implication entre notre condition de non-dégénérescence et celles présentes dans la littérature.

Enfin, dans une seconde partie (section B), on étudiera les déformations de systèmes CI réguliers et on explicitera les conditions sur la perturbation qui laisse le système CI régulier (théorème B.5) ou singulier (théorèmes B.9 et B.14), au premier ordre en ε .

¹pour Kolmogorov ([6]), Arnol'd ([1]) et Moser ([10]). Voir aussi le livre [8] et l'article [12].

Notations

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, on note $F^\circ \subset E^*$ l'**orthogonal** de F pour la dualité. De même, si $X \in E$ est un vecteur, on note $X^\circ \subset E^*$ l'espace des vecteurs duaux $\alpha \in E^*$ vérifiant $\alpha(X) = 0$, i.e $X^\circ = (X \otimes \mathbb{R})^\circ$.

Si \mathcal{M} est une variété, on note $\mathcal{T}_m^{p,q}(\mathcal{M})$ l'**espace des tenseurs** au point $m \in \mathcal{M}$ de type (p, q) . On note $\mathcal{T}^{p,q}(\mathcal{M}) = \bigcup_m \mathcal{T}_m^{p,q}(\mathcal{M})$ le **fibré tensoriel** de type (p, q) . En particulier, on a $T\mathcal{M} = \mathcal{T}^{1,0}(\mathcal{M})$ et $T^*\mathcal{M} = \mathcal{T}^{0,1}(\mathcal{M})$.

Si F est un fibré, on note $\Gamma(F)$ l'**espace des sections** de F . Pour les sections du fibré tensoriel (i.e l'espace des champs de tenseurs de type (p, q)), on simplifiera la notation en $\Gamma^{p,q}(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{T}^{p,q}(\mathcal{M}))$.

On notera $\mathcal{V}(\mathcal{M}) = \Gamma^{1,0}(\mathcal{M})$ l'**espace des champs de vecteurs**. Enfin, on notera $\Omega^q(\mathcal{M}) \subset \Gamma^{0,q}(\mathcal{M})$ l'**espace des champs de q -formes différentielles antisymétriques**. Dans la suite, on dira simplement " q -forme" au lieu de " q -forme antisymétrique".

Lorsque la variété est munie d'une connexion affine, de dérivée covariante ∇ , on indiquera en indice le signe ∇ pour noter les espaces de tenseurs constants par rapport à ∇ . Par exemple, on notera $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}) \subset \mathcal{V}(\mathcal{M})$ l'**espace des champs de vecteurs constants**, et $\Omega_\nabla^1(\mathcal{M}) \subset \Omega^1(\mathcal{M})$ l'**espace des 1-formes constantes**.

Dans diverses situations, on a besoin de travailler avec une variété \mathcal{M} et un ensemble de paramètres P , et de considérer des fonctions $f : \mathcal{M} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ dont la régularité par rapport à \mathcal{M} est uniforme par rapport à P .

Définition. On définit $C_P^\infty(\mathcal{M}) \subset C^\infty(\mathcal{M})$, l'**espace des fonctions C^∞ uniformément par rapport à P** , comme étant l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{M} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ bornées pour la famille de semi-normes $\|\cdot\|_{C^k(K)}$, pour tout compact $K \subset \mathcal{M}$. Précisément, ce sont les fonctions $f : \mathcal{M} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- Pour tout $p \in P$ alors $f_p \in C^\infty(\mathcal{M})$.
- Dans tout système de coordonnées locales $\{x_j\}$, pour tout compact K contenu dans le domaine de définition des coordonnées locales, pour tout point $m \in K$ et pour tout $p \in P$, on a $|\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f_p(m)| \leq C(i_1, \dots, i_l, K)$, où la constante $C(i_1, \dots, i_l, K)$ est positive et indépendante de p .

De la même manière, on parlera de l'**espace des champs de vecteurs C^∞ uniformément par rapport à P** et de l'**espace des difféomorphismes de \mathcal{M} dans \mathcal{M} uniformes par rapport à P** .

Enfin, on fixe les différentes conventions de signes de la géométrie symplectique de la manière suivante. En tout point $m \in \mathcal{M}$, la forme symplectique peut être vue comme un isomorphisme $\omega : T_m\mathcal{M} \rightarrow T_m^*\mathcal{M}$ défini par $\omega(\mathcal{X}) = \omega(\mathcal{X}, \cdot)$. Pour tout hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$, on définit son champ de vecteurs hamiltonien par $\mathcal{X}_H = -\omega^{-1}(dH)$. Le crochet de Poisson de deux fonctions F et G est $\{F, G\} = \omega(\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G)$, et on a $\mathcal{X}_H = \{H, \cdot\}$.

A Systèmes complètement intégrables réguliers non-dégénérés

A.1 Systèmes CI réguliers

A.1.1 Systèmes CI réguliers et singuliers

Soit (\mathcal{M}, ω) une variété symplectique de dimension $2N$ et soit $\{, \}$ le crochet de Poisson associé.

Définition. Une **application moment** $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ d'un hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est la donnée de N fonctions $A_j \in C^\infty(\mathcal{M})$ vérifiant

- $\{A_j, A_k\} = 0$, pour tous $j, k : 1 \dots N$. On dit que les A_j sont en **involution**.
- $\{A_j, H\} = 0$, pour tout $j : 1 \dots N$. On dit que les A_j sont des **constantes du mouvement**.
- Les différentielles dA_j sont linéairement indépendantes presque partout.

Pour une application moment donnée \mathbf{A} , on définit son **lieu singulier** $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{M}$ comme l'ensemble des **points singuliers**, i.e les points $m \in \mathcal{M}$ où les différentielles dA_j sont linéairement dépendantes. En tout point $m \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, on définit **corang** (m) , le **corang** de la différentielle en m , $d\mathbf{A}_m = (dA_1, \dots, dA_N)_m : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$

Définition. Un **hamiltonien** $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est dit **complètement intégrable (CI)** lorsqu'il admet une application moment.

En général, un hamiltonien CI admet plusieurs applications moments, et un point m peut être singulier ($\text{corang}(m) > 0$) pour une application moment et régulier ($\text{corang}(m) = 0$) pour une autre. Les singularités de l'application moment proviennent parfois de la topologie de \mathcal{M} (ou des surfaces de niveau $S_E = \{m; H(m) = E\}$) qui impose aux applications moments d'avoir au moins un certain nombre de points singuliers, mais sans imposer quels points doivent être singuliers. Il se peut aussi que la relation de commutation $\{A_j, H\} = 0$ impose à un point précis d'être singulier.

Définition. On dira que $m \in \mathcal{M}$ est un **point singulier du hamiltonien** s'il est singulier pour toutes les applications moments. Un hamiltonien H est dit **complètement intégrable régulier (CIreg)** s'il ne possède aucun point singulier, autrement dit si pour tout point m il existe une application moment de H régulière en m .

Lorsque l'on a une application moment régulière et propre, les images réciproques $\mathbf{A}^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}^N$, sont compactes, et le théorème de Mineur-Liouville² ([9],[7]) nous assure que les fibres $\mathbf{A}^{-1}(a)$ sont des tores lagrangiens (dits **tores de Liouville**) et qu'il existe localement autour de chacune d'elles un système de "coordonnées" dites angles-actions $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. Dans ce cas, une application moment régulière définit au

²que l'on appelle aussi parfois "théorème actions-angles" ou encore "théorème d'Arnold-Liouville" ([2]).

voisinage d'une fibre $\mathbf{A}^{-1}(a)$ une fibration localement triviale en tores lagrangiens \mathbb{T}^N . D'autre part, lorsque le hamiltonien est non-dégénéré, on peut montrer (voir appendice) que cette fibration est unique (indépendante de l'application moment). On a alors un objet global : une fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ dont les fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, sont des tores lagrangiens de dimension N . L'espace de base \mathcal{B} est l'espace des tores³ et une application moment donne un système de coordonnées locales sur \mathcal{B} .

A partir de maintenant, on adoptera la définition suivante pour un système complètement intégrable régulier, qui est celle de Duistermaat dans [4].

Définition A.1. Un **système complètement intégrable régulier (CIreg)** $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est la donnée d'une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ dont les fibres sont des tores, et d'un hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ constant sur les fibres. Un **hamiltonien** H est dit **CIreg** lorsqu'il existe une telle fibration lagrangienne le long des fibres de laquelle H est constant.

L'existence d'une telle fibration lagrangienne en tores implique la présence naturelle de structures affines plates et sans torsion à la fois sur chacun des tores \mathcal{M}_b (remarqué par Weinstein [13], voir aussi [14], p.74) et sur l'espace de base \mathcal{B} (remarqué par Duistermaat [4]).

A.1.2 Structure de tore affine sur les fibres

Weinstein a montré que lorsque l'on se donne un feuilletage lagrangien, alors toute feuille est munie d'une connexion affine ∇ plate et sans torsion. On montre d'autre part ([14], p.83) que lorsque le feuilletage est réductible, cette connexion est sans holonomie. Si de plus la feuille est complète, alors elle est difféomorphe au cylindre plat $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{N-p}$ ([5], p.211). Par exemple, si la feuille est compacte, alors c'est un tore plat.

Dans le cas d'une fibration lagrangienne en tores, chaque fibre a donc la structure d'un tore affine de dimension N . L'absence d'holonomie nous permet de définir, pour chaque fibre \mathcal{M}_b , l'**espace** $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \subset \mathcal{V}(\mathcal{M}_b)$ des **champs de vecteurs constants**, l'**espace** $\Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b) \subset \Omega^1(\mathcal{M}_b)$ des **1-formes constantes**, ainsi que l'**espace** $\Omega_\nabla^N(\mathcal{M}_b) \subset \Omega^N(\mathcal{M}_b)$ des **formes volumes constantes**. Un système de coordonnées (x_1, \dots, x_N) est dit plat lorsque les différentielles dx_i sont constantes, i.e $\nabla(dx_i) = 0$. Par exemples les coordonnées "angles" d'un système de coordonnées "angles-actions" sont plates sur chaque tore.

Définition A.2. On définit le **réseau des périodes** $\Lambda_b \subset \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ par

$$\Lambda_b = \{ \mathcal{X} \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b); \phi_{\mathcal{X}}^1 = \mathbb{I} \},$$

où $\phi_{\mathcal{X}}^1$ est le flot au temps 1 du champ de vecteurs \mathcal{X} .

³il peut être éventuellement compact.

Les fibres étant des tores, les champs de vecteurs entiers 1-périodiques forment effectivement un réseau de $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$. De même, on introduit son réseau dual.

Définition A.3. On définit ensuite le réseau $\Lambda_b^* \subset \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$, dual⁴ du précédent, par

$$\Lambda_b^* = \{\alpha \in \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b); \forall \mathcal{X} \in \Lambda_b \Rightarrow \alpha(\mathcal{X}) \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Le théorème de Mineur-Liouville permet de montrer que les réseaux Λ_b dépendent de b de manière C^∞ , et forment donc une fibration C^∞ au dessus de \mathcal{B} .

Définition A.4. On définit le **fibré des périodes**

$$\Lambda = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Lambda_b \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$$

et son dual (contenant le facteur 2π)

$$\Lambda^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Lambda_b^* \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b).$$

A.1.3 Structure affine et monodromie sur l'espace de base

Pour tout point $b \in \mathcal{B}$, la forme symplectique ω permet de définir l'application suivante

$$\begin{aligned} \iota_b : T_b\mathcal{B} &\rightarrow \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b) \\ \mathcal{X} &\rightarrow \omega(\tilde{\mathcal{X}})\Big|_{\mathcal{M}_b}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{X}} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un relevé de $\mathcal{X} \in T_b\mathcal{B}$ dans le fibré $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, i.e pour tout $m \in \mathcal{M}_b$ on a $\pi_*(\tilde{\mathcal{X}}_m) = \mathcal{X}_b$. Cette application ne dépend pas du choix du relevé puisque si $\tilde{\mathcal{X}}_1$ et $\tilde{\mathcal{X}}_2$ sont deux relevés de \mathcal{X} , alors $\tilde{\mathcal{X}}_1 - \tilde{\mathcal{X}}_2$ est tangent à \mathcal{M}_b . La fibre \mathcal{M}_b étant lagrangienne, cela implique que $\omega(\tilde{\mathcal{X}}_1 - \tilde{\mathcal{X}}_2)\Big|_{\mathcal{M}_b} = 0$. On montre aussi que l'image $\iota_b(\mathcal{X})$ est bien une forme constante pour la dérivée covariante ∇ . On définit ensuite l'application transposée $\iota_b^* : \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$. On vérifie qu'elle est donnée par

$$\begin{aligned} (\iota_b^*)^{-1} : T_b^*\mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \\ \beta &\rightarrow -\omega^{-1}(\pi^*\beta)\Big|_{\mathcal{M}_b}. \end{aligned}$$

On montre alors facilement que ces deux applications sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

On étend ensuite de manière naturelle ces deux applications en deux applications

$$\iota : T\mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$$

⁴Attention à l'introduction du facteur 2π dans la définition même de l'espace Λ_b^* .

et

$$\iota^* : \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b) \rightarrow T^*\mathcal{B},$$

que l'on montre être des difféomorphismes d'espaces fibrés au dessus de \mathcal{B} .

Définition A.5. On définit $E^* \subset T^*\mathcal{B}$ le **fibré des actions** sur \mathcal{B} par

$$E^* = \iota^*(\Lambda).$$

C'est un sous-fibré C^∞ de $T^*\mathcal{B}$, $E^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} E_b^*$, dont la fibre $E_b^* = \iota_b^*(\Lambda_b)$ est appelée **réseau des 1-formes entières en b** . La différentielle $d\xi_j$ d'une coordonnée action d'un système de coordonnées "angles actions" est une section C^∞ (donc constante) du fibré des actions E^* .

Définition A.6. On définit $E \subset T\mathcal{B}$, le fibré 2π -dual du précédent

$$E = \iota^{-1}(\Lambda^*).$$

C'est un sous-fibré C^∞ de $T\mathcal{B}$, $E = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} E_b$, dont la fibre $E_b = \iota_b^{-1}(\Lambda_b^*)$ est appelée **réseau des vecteurs entiers en b** .

L'existence de ce fibré en réseaux permet d'identifier les espaces tangents $T_b\mathcal{B}$ pour des b voisins, cela donne une structure de connexion affine entière sur \mathcal{B} . L'holonomie de cette connexion est appelée **monodromie**. C'est une obstruction à l'existence de sections globales du fibré E et donc à l'existence de variables actions globales ([4]).

A.1.4 Séries de Fourier

Les fibres \mathcal{M}_b étant compactes, on peut choisir la mesure constante $|d\mu_b|$, $d\mu_b \in \Omega_{\nabla}^N(\mathcal{M}_b)$, définie de manière unique par $\int_{\mathcal{M}_b} |d\mu_b| = 1$. Sur chaque tore affine \mathcal{M}_b on définit l'**espace des fonctions de carré sommable** à l'aide du produit scalaire suivant

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathcal{M}_b} \bar{f}g |d\mu_b|$$

pour tout couple (f, g) de fonctions de \mathcal{M}_b à valeurs complexes. On définit alors la norme L^2 associée par $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f | f \rangle$ et l'espace $L^2(\mathcal{M}_b)$ par $L^2(\mathcal{M}_b) = \{f; \|f\|_{L^2} < \infty\}$.

Soit un point de référence $x_0 \in \mathcal{M}_b$ fixé. Pour tout point $x \in \mathcal{M}_b$, il existe un champ de vecteurs constant $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ tel que $x = \phi_{\mathcal{X}}^1(x_0)$. On a en fait une classe d'équivalence, puisque deux vecteurs $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ ayant cette propriété vérifient que $\mathcal{X} - \mathcal{Y} \in \Lambda_b$. On notera $\mathcal{X} = x - x_0$ un représentant de cette classe.

Pour tout $k \in \Lambda_b^*$, on définit l'**onde plane** $e_k \in L^2(\mathcal{M}_b)$ par

$$e_k(x) = e^{ik(x-x_0)}$$

et on définit la **série de Fourier** $\tilde{f}(k)$, $k \in \Lambda^*$ de la fonction $f : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(k) = \langle e_k | f \rangle = \int_{\mathcal{M}_b} e^{-ik(x-x_0)} f(x) |d\mu_b|.$$

On peut ensuite reconstituer la fonction par la formule inverse

$$f(x) = \sum_{k \in \Lambda_b^*} \tilde{f}(k) e^{ik(x-x_0)}.$$

Cette série de Fourier a toutes les propriétés bien connues. Notamment, on voit facilement que pour tout champ de vecteurs constant $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ et toute fonction $f \in C^1(\mathcal{M}_b)$, on a

$$\widetilde{\mathcal{X}(f)}(k) = ik(\mathcal{X}) \tilde{f}(k).$$

Moyennant le choix d'un point origine $x_0 \in \mathcal{M}_b$ on peut donc définir, pour toute fonction $f_b : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$, sa série de Fourier $\tilde{f}_b : \Lambda_b^* \rightarrow \mathbb{C}$. Naturellement, pour toute fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, on souhaiterait définir globalement sa série de Fourier $\tilde{f} : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{C}$, ou encore $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$, en utilisant l'identification $\iota(E) = \Lambda^*$. Pour cela, il faut choisir un point origine $x_0(b)$ pour tout b , i.e une section du fibré $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$. Ainsi définie, la série de Fourier d'une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ aura des coefficients de Fourier dans $C^\infty(\mathcal{B})$ si et seulement si la section $x_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ est C^∞ , ce qui n'est en général possible que localement.

D'autre part, les sections du fibré E sont, par construction, constantes par rapport à la connexion sur \mathcal{B} , ce qui permet d'identifier localement chaque espace $E_b \subset T_b\mathcal{B}$ avec l'espace des sections $\Gamma(E)$, que l'on notera simplement Γ . On ne pourra cependant faire cette identification que localement à cause de la présence de monodromie.

Dans toute la suite, on se restreindra au cas où \mathcal{B} est "suffisamment petit" pour que d'une part la monodromie soit nulle, et que d'autre part il existe une section globale $x_0(b)$. Pour tout $k \in \Lambda_b^*$, on notera $\tilde{k} \in E_b$ son image $\tilde{k} = \iota_b^{-1}(k)$, et on utilisera implicitement l'identification entre E_b et l'espace Γ des sections du fibré E . Dans ce cas, pour toute fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, on pourra alors définir sa **série de Fourier** $\tilde{f} : \mathcal{B} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(b, \tilde{k}) = \tilde{f}_b(k),$$

où $k = \iota_b(\tilde{k})$ et \tilde{f}_b est la série de Fourier de la fonction restreinte à la fibre \mathcal{M}_b . Dans la suite, on utilisera implicitement cette égalité, et on notera simplement la série de Fourier $\tilde{f}(b, \tilde{k})$.

Proposition. Une fonction f de \mathcal{M} dans \mathbb{C} est C^∞ si et seulement si, dans un système de coordonnées locales $\{\xi_j\}$ sur \mathcal{B} , pour tout compact $K \subset \mathcal{B}$ sans monodromie, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, pour tout $b \in K$, pour tout $\tilde{k} \in \Gamma$ et pour tout entier $a > 0$, il existe une constante $C(\alpha, a, K)$ telle que

$$\left| \partial_\xi^\alpha \tilde{f}(b, \tilde{k}) \right| \leq \frac{C(\alpha, a, K)}{|\tilde{k}|^a},$$

où l'on s'est donné une norme $||$ sur Γ .

La série de Fourier hérite naturellement des propriétés des séries de Fourier sur chaque fibre. Par exemple,

Proposition. Soit une fonction $f \in C^1(\mathcal{M})$. Soit $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ un hamiltonien de la forme $H = F \circ \pi$ et $\mathcal{X}_H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ son champ de vecteurs associé. La série de Fourier $\widetilde{f} : \mathcal{B} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie alors

$$\widetilde{\mathcal{X}_H(f)}(b, \tilde{k}) = idF(\tilde{k})_b \widetilde{f}(b, \tilde{k}).$$

A.2 Systèmes non-dégénérés

Considérons un système complètement intégrable régulier $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$. Par définition, le hamiltonien est constant sur les fibres qui sont, par convention, connexes. Il s'écrit donc $H = F \circ \pi$, avec $F \in C^\infty(\mathcal{B})$. Pour les résultats de la section suivante, on a besoin de demander une condition de non-dégénérescence sur la fonction F . On montre en appendice que la condition de non-dégénérescence utilisée est équivalente à certaines conditions présentes dans la littérature, et qu'elle est plus faible que la condition dite de Kolmogorov.

Définition A.7. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$ champ de vecteurs constant, on définit la fonction $\Omega_{\mathcal{X}} \in C^\infty(\mathcal{B})$ par

$$\Omega_{\mathcal{X}} = dF(\mathcal{X})$$

et la "surface de résonance" $\Sigma_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{B}$ par

$$\Sigma_{\mathcal{X}} = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_{\mathcal{X}}(b) = 0\}.$$

On utilisera le terme surface de résonance bien qu'il ne soit approprié que lorsque \mathcal{X} est dans le réseau $\Gamma \subset \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$.

Condition A.8. On dit que le hamiltonien H (ou F) est **non-dégénéré** si, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$ et tout $b \in \Sigma_{\mathcal{X}}$, on a

$$d(\Omega_{\mathcal{X}})_b \neq 0.$$

Cela implique notamment que $\Sigma_{\mathcal{X}}$ est une sous-variété de codimension 1 de \mathcal{B} .

C'est cette notion de non-dégénérescence, appelée "non-dégénérescence au sens faible" dans l'appendice, que l'on va utiliser dans toute la suite (mis à part dans l'appendice) sans préciser "au sens faible".

Si H est un hamiltonien CI non-dégénéré, la proposition C.11 située en appendice nous apprend que toute fonction $C^\infty(\mathcal{M})$ qui Poisson-commute avec H est constante le long des fibres, ce qui a pour conséquence que les applications moments ont la forme spéciale indiquée dans la proposition suivante.

Proposition A.9. Si $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est un système CI régulier non-dégénéré et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ est une application moment de H , alors les A_j ont les propriétés suivantes :

- Les fonctions A_j sont de la forme $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$.
- Les différentielles da_j sont linéairement indépendantes presque partout sur \mathcal{B} .
- Pour tout $b \in \mathcal{B}$ et tout $m \in \mathcal{M}_b$ on a

$$\text{corang}(m) = \dim \bigcap_{j=1}^N \ker (da_j)_b.$$

On peut montrer qu'un hamiltonien non-dégénéré vérifie de plus la propriété que la différentielle $d\Omega_{\mathcal{X}}$ reste non nulle dans un certain voisinage de $\Sigma_{\mathcal{X}}$, et cela de manière uniforme par rapport à \mathcal{X} variant dans un espace P précisé ci-dessous.

Proposition A.10. *Soit une métrique riemannienne g sur \mathcal{B} , et $|\cdot|$ sa norme associée sur $T\mathcal{B}$. Soit l'espace de paramètres $P = \{\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B}) / |\mathcal{X}| \geq 1\}$, et soit la famille de fonctions $\Omega_{\mathcal{X}} \in C_P^\infty(\mathcal{B})$ définies précédemment. Si F est non-dégénérée alors $\Omega_{\mathcal{X}}$ vérifie la condition suivante : il existe deux constantes $T > 0$ et $C > 0$, telles que*

$$\forall \mathcal{X} \in P, \forall b \in \mathcal{B} / |\Omega_{\mathcal{X}}(b)| < T \implies |(d\Omega_{\mathcal{X}})_b| > C.$$

Cette propriété satisfaite par les hamiltoniens non-dégénérés nous permet d'énoncer le lemme technique suivant, dit "**lemme de division**".

Lemme A.11. *Soit \mathcal{N} une variété de dimension n , P un espace de "paramètres", et g une métrique sur \mathcal{N} . Soit $\Omega_p(m) \in C_P^\infty(\mathcal{N})$ une famille de fonctions vérifiant l'hypothèse suivante :*

- Il existe deux constantes $T > 0$ et $C > 0$, telles que pour tout $p \in P$ et pour tout $m \in \mathcal{N}$ tels que $|\Omega_p(m)| < T$, on a $|(d\Omega_p)_m| > C$.

Soit $G_p(m) \in C_P^\infty(\mathcal{N})$, alors l'équation

$$\Omega_p F_p = G_p$$

admet des solutions $F_p(m) \in C_P^\infty(\mathcal{N})$ ssi la fonction G_p satisfait à

$$\forall p \in P, \forall m \in \mathcal{N} / \Omega_p(m) = 0 \implies G_p(m) = 0.$$

Dans ce cas, on a de plus les estimations suivantes. Pour tout compact $K \subset \mathcal{N}$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $p \in P$ et pour tout $m \in K$, on a

$$|\partial_x^\alpha F_p(m)| \leq C_\alpha(K) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^n \\ |\beta| \leq |\alpha|}} |\partial_x^\beta G_p(m)|,$$

où la constante $C_\alpha(K)$ dépend de Ω_p mais pas de G_p .

Démonstration. Pour résoudre l'équation $\Omega_p F_p = G_p$, il est clairement nécessaire que, pour tout p , la fonction G_p soit nulle là où Ω_p l'est. Lorsque la fonction Ω_p est non dégénérée, cela signifie qu'elle s'annule sur Σ_p "au premier ordre". On va montrer que la condition nécessaire pour G_p est aussi suffisante. Pour cela on sépare le problème en deux parties en considérant successivement ce qui se passe près puis loin de Σ_p . Pour la démonstration, on munit la variété M d'une métrique g , mais le résultat ne dépend pas de cette métrique.

- Pour tout $p \in P$, considérons l'ouvert $\mathcal{O}_p^T = \{m \in \mathcal{B} / |\Omega_p(m)| < T\}$, de l'hypothèse de non-dégénérescence, ainsi que l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}}_p^T = \{m \in \mathcal{B} / |\Omega_p(m)| > \frac{T}{2}\}$. Dans ce dernier, la minoration de $|\Omega_p(m)| > \frac{T}{2}$ permet d'effectuer la division $F_p = \frac{G_p}{\Omega_p}$ et d'obtenir une fonction $F_p \in C_P^\infty(\tilde{\mathcal{O}}_p^T)$.
- Considérons ensuite la situation à l'intérieur de \mathcal{O}_p^T . On va montrer qu'il existe $X_p \in \mathcal{V}(\mathcal{O}_p^T)$ un champ de vecteurs C^∞ , uniformément par rapport au paramètre p , non nul dans \mathcal{O}_p^T , transverse à Σ_p et vérifiant

$$\forall m \in \mathcal{O}_p^T, \forall p \in P \implies d\Omega_p(X_p)_m = 1.$$

En effet, soit $\nabla\Omega_p$ le gradient de Ω_p défini à partir de la métrique g . L'hypothèse de non-dégénérescence de Ω_p implique que pour tout $m \in \mathcal{O}_p^T$, on a $|d\Omega_p| > C$ si bien que le champ de vecteurs $X_p = \frac{\nabla\Omega_p}{|\nabla\Omega_p|^2}$ est C^∞ uniformément par rapport au paramètre p et non nul dans \mathcal{O}_p^T . Il est aussi orthogonal et donc transverse aux lignes de niveau de Ω_p , donc en particulier à Σ_p , et vérifie

$$\begin{aligned} d\Omega_p(X_p) &= \frac{d\Omega_p(\nabla\Omega_p)}{|\nabla\Omega_p|^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Soit ϕ_p^t le flot de X_p au temps t . La relation $d\Omega_p(X_p) = 1$ implique que

$$\Omega_p \circ \phi_p^t(m) = t + \Omega_p(m)$$

et donc que $\phi_p^t(m)$ est bien défini pour tout $t \in [-T - \Omega_p(m), +T - \Omega_p(m)]$. On effectue alors un développement de Taylor au premier ordre avec reste intégral, pour la fonction $G_p(m)$:

$$G_p(m) = G_p \circ \phi_p^{-\Omega_p(m)}(m) + \int_0^{\Omega_p(m)} dt X_p(G_p) \circ \phi_p^{t-\Omega_p(m)}(m).$$

Par hypothèse, on a $G_p \circ \phi_p^{-\Omega_p(m)}(m) = 0$. De plus, dans l'intégrale, le changement de variable $t = u\Omega_p(m)$ donne

$$G_p(m) = \Omega_p(m) \int_0^1 du X_p(G_p) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m).$$

On résout alors l'équation $\Omega_p F_p = G_p$ en posant

$$F_p(m) = \int_0^1 du X_p(G_p) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m).$$

- Par construction, le champs X_p est C^∞ uniformément par rapport au paramètre p , ce qui fait que la fonction $X_p(G) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m)$ est $C_P^\infty(\mathcal{O}_p^T \times [0, 1])$, où $[0, 1]$ est l'intervale de la variable d'intégration u . On a donc $F_p \in C_P^\infty(\mathcal{O}_p^T)$.
- On peut donc résoudre $\Omega_p F_p = G_p$ globalement dans \mathcal{N} , et la solution $F_p = \frac{G_p}{\Omega_p}$ est dans $F_p \in C_P^\infty(\mathcal{N})$. Dans tout compact $K \subset M$, dans un système de coordonnées locales $\{x_j\}$,
- pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, pour tout $p \in P$ et pour tout $m \in K$, on a

$$|\partial_x^\alpha F_p(m)| \leq C_\alpha(K) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^n \\ |\beta| \leq |\alpha|}} |\partial_x^\beta G_p(m)|,$$

où la constante $C_\alpha(K)$ dépend de Ω_p mais pas de G_p .

□

B Déformations de systèmes CI réguliers

Dans la suite, on considère un système complètement intégrable défini par une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ et un hamiltonien H_0 constant sur ses fibres et non-dégénéré au sens de la condition rA.8, et on s'intéresse aux déformations⁵ H_ε de ce hamiltonien. On sait, depuis Poincaré, qu'en général le hamiltonien H_ε perd son caractère CI dès que $\varepsilon \neq 0$. Le fait de rester CI impose des conditions très fortes sur la perturbation. Le fait d'autoriser l'apparition de singularités, tout en restant CI, permet de relaxer un peu ces conditions. Dans la suite, on va exhiber les conditions nécessaires et suffisantes sur la perturbation pour que le système reste CI (avec ou sans singularités) *au premier ordre en* ε . Cela donnera donc des conditions nécessaires pour la déformation à ε quelconque.

On considère à partir de maintenant un hamiltonien perturbé de la forme $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, avec $V \in C^\infty(\mathcal{M})$. Le hamiltonien non perturbé étant constant sur les fibres, il s'écrit $H_0 = F_0 \circ \pi$, avec $F_0 \in C^\infty(\mathcal{B})$. On notera $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_{H_0}$ le champ de vecteurs associé au hamiltonien H_0 . On utilisera aussi abondamment les surfaces de résonance $\Sigma_{\mathcal{X}}$ de la définition A.7.

⁵On ne considèrera que des déformations C^∞ par rapport au paramètre ε .

Condition B.1. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition** $(*_b)$, avec $b \in \mathcal{B}$, si

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma \setminus 0, dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b = 0 \implies \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0,$$

Condition B.2. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition** $(*)$ si elle satisfait la condition $(*_b)$ pour tout $b \in \mathcal{B}$.

Proposition B.3. Une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la condition $(*)$ si et seulement si, pour tout tore périodique \mathcal{M}_b , la moyenne de V le long de la trajectoire périodique issue de $x \in \mathcal{M}_b$,

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T V \circ \phi_{\mathcal{X}_0}^t(x) dt,$$

est une fonction constante sur le tore \mathcal{M}_b .

Démonstration. Tout d'abord, la condition $(*)$ pour V est équivalente à

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_{\tilde{k}} \implies \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0.$$

En utilisant le fait (proposition C.11) que l'ensemble des b périodiques appartenant à l'hypersurface $\Sigma_{\tilde{k}}$ est dense dans $\Sigma_{\tilde{k}}$, on en déduit que la condition $(*)$ est satisfaite dès que

$$\forall b \text{ périodique}, \forall \tilde{k} \in \Gamma \setminus 0, dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b = 0 \implies \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0.$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier que la série de Fourier $\tilde{\tilde{V}} \left(b, \tilde{k} \right)$ de la moyenne de V est donnée, pour tout $\tilde{k} \in \Gamma$, par

$$\tilde{\tilde{V}} \left(b, \tilde{k} \right) = \begin{cases} \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) & \text{si } dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b = 0 \\ 0 & \text{si } dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b \neq 0 \end{cases},$$

ce qui fait que la condition $(*)$ revient bien à demander que la fonction moyennée \bar{V} soit constante sur le tore \mathcal{M}_b . \square

Une déformation régulière d'un hamiltonien CI régulier revient à déformer la fibration, ce qui peut être exprimé à l'aide d'un symplectomorphisme. On ne pourra cependant pas, par cette approche, étudier les déformations qui rendent le système singulier. Dans cette optique, on va travailler non pas en terme de déformation de la fibration, mais en terme de déformation d'application moment, ce qui permettra l'extension aux déformations singulières. Ainsi, étant donné un hamiltonien perturbé $H_0 + \varepsilon V$, on va chercher une application moment $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ et une déformation $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{C} = (A_1 + \varepsilon C_1, \dots, A_N + \varepsilon C_N)$ qui soit une "application moment à $O(\varepsilon^2)$ près". Selon le degré de régularité que l'on souhaite pour l'application moment \mathbf{A} , on devra imposer une condition plus ou moins forte sur la perturbation V .

Définition. Soient $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clrég non-dégénéré et $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. Une application moment (éventuellement singulière) $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ de H_0 est dite **V-déformable** s'il existe des fonctions $C_j \in C^\infty(\mathcal{M})$ telles que pour tout $i, j = 1..N$ on ait

$$\{A_j + \varepsilon C_j, H_0 + \varepsilon V\} = O(\varepsilon^2)$$

et

$$\{A_i + \varepsilon C_i, A_j + \varepsilon C_j\} = O(\varepsilon^2).$$

Lemme B.4. Soient $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clrég non-dégénéré et $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. Une application moment $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ est V-déformable si et seulement si pour tout $j = 1..N$ le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ vérifie la condition (*).

Remarque. Ce lemme va être ensuite utilisé pour prédire l'existence d'applications moments déformées $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{C}$, et la condition sur le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ donnera des conditions différentes sur la perturbation V selon si l'on souhaite que le système reste régulier ou si l'on autorise l'apparition de singularités.

Démonstration. Le hamiltonien étant constant le long des fibres, il s'écrit $H_0 = F_0 \circ \pi$, avec $F_0 \in C^\infty(\mathcal{B})$. On va résoudre d'abord la première équation et voir que la seconde sera automatiquement satisfaite.

1. Le crochet de poisson de la première équation s'écrit

$$\{A_j + \varepsilon C_j, H_0 + \varepsilon V\} = \{A_j, H_0\} + \varepsilon \{A_j, V\} + \varepsilon \{C_j, F_0 \circ \pi\} + O(\varepsilon^2).$$

Le premier terme est nul puisque les fonctions A_j commutent avec H_0 , si bien que l'on doit simplement résoudre

$$\{A_j, V\} = \{F_0 \circ \pi, C_j\},$$

pour tout $j \in 1..N$ et tout $m \in \mathcal{M}$. On écrit ensuite la série de Fourier de cette équation qui est, pour tout $j \in 1..N$, tout $\tilde{k} \in \Gamma$ et tout $b \in \mathcal{B}$:

$$\widetilde{\{A_j, V\}}(b, \tilde{k}) = id_{F_0}(\tilde{k})_b \tilde{C}_j(b, \tilde{k}). \quad (1)$$

- Lorsque $\tilde{k} = 0$, on utilise le fait (proposition C.13) que les A_j s'écrivent $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$. Il s'ensuit que la série de Fourier de $\{A_j, V\}$ s'écrit $\widetilde{\{A_j, V\}}(b, \tilde{k}) = id_{a_j}(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k})$, et donc que $\widetilde{\{A_j, V\}}(b, 0) = 0$. L'équation (1) est alors satisfaite et on peut choisir $\tilde{C}_j(b, 0)$ arbitrairement.
- Lorsque $\tilde{k} \neq 0$, on se trouve pour chaque j dans la situation du lemme A.11 de division, avec l'espace de paramètres $P = \Gamma \setminus 0$. Les hypothèses du lemme sont satisfaites grâce au fait que l'hamiltonien H est non-dégénéré et possède

donc la propriété décrite dans la proposition A.10. Le lemme A.11 nous assure alors que l'on peut diviser par $dF_0(\tilde{k})$ si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ satisfait à la condition (*). En utilisant ensuite le fait que V et A_j sont dans $C^\infty(\mathcal{M})$, le lemme A.11 nous permet de montrer que les solutions C_j sont $C^\infty(\mathcal{M})$, puisque leurs séries de Fourier $\tilde{C}_j(b, \tilde{k})$ sont $C^\infty(\mathcal{B})$ à décroissance rapide en \tilde{k} .

2. Considérons maintenant la deuxième équation

$$\{A_i + \varepsilon C_i, A_j + \varepsilon C_j\} = O(\varepsilon^2).$$

Par hypothèse, les fonctions A_j sont en involution, ce qui fait que l'équation est satisfaite à l'ordre ε^0 . Il faut alors simplement demander que le terme d'ordre ε^1 soit nul, i.e

$$\{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\} = 0.$$

En Fourier, cela s'écrit pour tous $i, j \in 1..N$, tout $\tilde{k} \in \Gamma$ et tout $b \in \mathcal{B}$

$$da_i(\tilde{k})_b \tilde{C}_j(b, \tilde{k}) = da_j(\tilde{k})_b \tilde{C}_i(b, \tilde{k}). \quad (2)$$

Cela est automatiquement satisfait lorsque $\tilde{k} = 0$, et aussi évidemment lorsque $i = j$. Pour $i \neq j$ et $\tilde{k} \neq 0$, on prend l'équation (1) satisfaite par C_j et on multiplie à droite et à gauche par $da_i(\tilde{k})_b$, ce qui donne

$$da_j(\tilde{k})_b da_i(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = dF_0(\tilde{k})_b da_i(\tilde{k})_b \tilde{C}_j(b, \tilde{k}).$$

En faisant de même avec C_i et $da_j(\tilde{k})_b$, on obtient

$$dF_0(\tilde{k})_b da_j(\tilde{k})_b \tilde{C}_i(b, \tilde{k}) = dF_0(\tilde{k})_b da_i(\tilde{k})_b \tilde{C}_j(b, \tilde{k}),$$

ce qui fait que l'équation (2) est satisfaite pour tout b n'appartenant pas à l'hyper-surface $\pi^{-1}(\Sigma_{\tilde{k}})$, où $\Sigma_{\tilde{k}} = \{b; dF_0(\tilde{k})_b = 0\}$. Enfin, cette hyper-surface étant de codimension 1, on montre par continuité que l'équation (2) est satisfaite pour tout $b \in \mathcal{B}$.

□

B.1 Déformations régulières

On peut maintenant déduire du lemme précédent les conditions nécessaires et suffisantes à imposer sur la perturbation V pour que le système reste CI régulier.

Théorème B.5. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CI rég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. Pour tout point $m \in \mathcal{M}$, il existe une application moment V -déformable régulière autour de m si et seulement si la perturbation V satisfait la condition (*).

Démonstration. Pour tout point $m \in \mathcal{M}$, il existe une application moment $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_N)$ régulière en m , puisque par définition le hamiltonien est régulier. En utilisant $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$, cela signifie qu'il existe un voisinage \mathcal{O} du point $b = \pi(m)$ dans lequel les différentielles da_j sont linéairement indépendantes. D'autre part, d'après le lemme B.4, \mathbf{A} est V -déformable si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ satisfait la condition (*) pour tout $j = 1..N$, ce qui s'écrit

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \mathcal{O}, dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

L'indépendance linéaire des différentielles da_j implique qu'il existe au moins un indice j tel que $da_j(\tilde{k}) \neq 0$, et donc que $\tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0$. On a donc

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \mathcal{O}, dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0,$$

ce qui signifie que V satisfait à la condition $(*_b)$ pour tout $b \in \mathcal{O}$. En faisant ce raisonnement pour tous les points $m \in \mathcal{M}$, on en déduit que V doit vérifier la condition (*). \square

Exemple. Considérons $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^N$ le cotangent du tore muni des coordonnées canoniques $(x_j, \xi_j) : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. La fibration lagrangienne est la fibration "horizontale". Toute fonction $H_0(\xi)$, indépendante des x_j et dont la hessienne vérifie $\det\left(\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) \neq 0$ est un hamiltonien CI non-dégénéré.

- Pour toute fonction $V(\xi)$ indépendante des x_j , le hamiltonien $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon V(\xi)$ est évidemment encore CI, et la perturbation V vérifie bien la condition (*) puisque sa série de Fourier $\tilde{V}(\xi, \tilde{k})$ par rapport à la variable x est nulle dès que $\tilde{k} \neq 0$.
- Considérons maintenant l'hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et une perturbation de la forme $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon V(x)$, où $V(x)$ est un "potentiel" indépendant des ξ_j . H_0 est bien non-dégénéré puisque $\det\left(\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = 1$. La condition (*) pour V s'écrit

$$\forall \tilde{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus 0, \forall \xi \text{ tq } \sum_j \xi_j \tilde{k}_j = 0 \implies \tilde{V}(\tilde{k}) = 0.$$

La condition $\sum_j \xi_j \tilde{k}_j = 0$ définit un hyperplan dans l'espace des ξ , ce qui implique que pour tout $\tilde{k} \neq 0$, on a $\tilde{V}(\tilde{k}) = 0$, ce qui signifie que $V(x)$ est une fonction constante.

B.2 Déformations singulières

On a vu dans le théorème B.5 que la condition (*) sur la perturbation V est nécessaire et suffisante pour déformer de manière régulière un hamiltonien CIreg . On peut se demander si en imposant une condition moins forte sur V , on peut rester complètement intégrable, mais avec singularité. Pour cela, il faut autoriser les dA_j à être linéairement dépendants, puisque si les dA_j sont linéairement indépendantes alors pour ε petit, les différentielles des fonctions perturbées $dA_j + \varepsilon dC_j$ seront aussi linéairement indépendantes. On va donc être amené à considérer des applications moments singulières \mathbf{A} de l'hamiltonien régulier H , et on va chercher celles ayant un lieu singulier et un corang les plus petits possible.

Lemme B.6. *S'il existe un tore \mathcal{M}_{b_0} pour lequel la condition $(*_{b_0})$ n'est pas satisfaite, alors il existe $\tilde{k}_1 \in \Gamma \setminus 0$ et $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ un voisinage de b_0 tels que pour tout $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1}$ la condition $(*_b)$ n'est pas satisfaite non plus.*

De plus, s'il existe une application moment V -déformable \mathbf{A} , alors son lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vérifie

$$\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{A})$$

et en tout point $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1}$, on a

$$\tilde{k}_1 \in \bigcap_{j=1}^N \ker (da_j)_b,$$

où les fonctions $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$ sont définies par $A_j = a_j \circ \pi$.

Démonstration. D'après le lemme B.4, \mathbf{A} est une application moment V -déformable si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ vérifie la condition (*) pour tout $j = 1..N$. En Fourier, cela s'écrit

$$\forall j = 1..N, \forall \tilde{k} \in \Gamma, \tilde{k} \neq 0, \forall b \in \Sigma_{\tilde{k}} \implies da_j \left(\tilde{k} \right)_b \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0, \quad (3)$$

où $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$, et $\Sigma_{\tilde{k}} = \left\{ b; dH \left(\tilde{k} \right)_b = 0 \right\}$.

D'autre part, s'il existe un tore \mathcal{M}_{b_0} pour lequel la perturbation V ne vérifie pas la condition $(*_{b_0})$, cela signifie qu'il existe $\tilde{k}_1 \neq 0$ tel que $dF_0 \left(\tilde{k} \right)_{b_0} = 0$ et $\tilde{V} \left(b_0, \tilde{k}_1 \right) \neq 0$. La fonction V étant C^∞ , sa série de Fourier $\tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right)$ reste non nulle pour les points b voisins de b_0 , notamment pour ceux appartenant à l'hypersurface $\Sigma_{\tilde{k}} = \left\{ b; dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b = 0 \right\}$, ce qui implique que la condition $(*_b)$ n'est pas satisfaite non plus pour ces tores.

Pour satisfaire l'équation (3) pour tout $j = 1..N$, il faut alors imposer

$$\forall b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1} \implies da_j \left(\tilde{k}_1 \right)_b = 0,$$

pour tout $j = 1..N$. Cela veut dire que les da_j sont linéairement dépendantes en tout point de $\mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1}$ et donc que les dA_j sont linéairement dépendantes en tout point de $\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \Sigma_{\tilde{k}_1})$. \square

Lorsque l'ensemble de tels \tilde{k}_1 se réduit à une droite, on dit que l'on a une seule résonance. On va montrer dans ce cas que l'on reste CI mais avec singularité, et on va construire une application moment V -déformable optimale dans le sens où son lieu singulier est minimal (c'est à dire celui donné par le lemme B.6) et où le corang des points singuliers est égal à 1.

Dans le cas où l'ensemble de tels \tilde{k}_1 se réduit à un ensemble de droites, on va aussi construire une application moment V -déformable. La construction proposée présente cependant un haut degré de singularité (grand corang) et on ne sait pas si le corang de cette construction est optimale.

B.2.1 Déformations singulières avec 1 résonance

Condition B.7. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition** $(*, \tilde{k}_1)$ s'il existe un élément $\tilde{k}_1 \in \Gamma$ primitif tel que pour tout $b \in \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\tilde{k}_1}$ la condition $(*_b)$ est satisfaite.

Proposition B.8. La condition $(*, \tilde{k}_1)$ est équivalente à la condition suivante.

$$\forall \tilde{k} \notin \{\mathbb{Z}\tilde{k}_1\}, \forall b \text{ tq } dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

Le théorème suivant montre que la condition $(*, \tilde{k}_1)$ est suffisante pour que le système déformé reste complètement intégrable (mais singulier) à $O(\varepsilon^2)$.

Théorème B.9. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CI rég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation vérifiant la condition $(*, \tilde{k}_1)$ pour un certain $\tilde{k}_1 \in \Gamma$. Alors, pour tout point $b \in \Sigma_{\tilde{k}_1}$, il existe un voisinage \mathcal{O} du tore \mathcal{M}_b et une application moment V -déformable \mathbf{A} dans \mathcal{O} vérifiant :

- $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{O} = \pi^{-1}(\Sigma_{\tilde{k}_1}) \cap \mathcal{O}$, où $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ est le lieu singulier de \mathbf{A} .
- Pour tout $m \in \mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{O}$, on a $\text{corang}(m) = 1$.

Démonstration. D'après le lemme B.4, \mathbf{A} est une application moment V -déformable si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ vérifie la condition $(*)$ pour tout $j : 1..N$, ce qui s'écrit

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma, \tilde{k} \neq 0, \forall b \in \mathcal{B}, dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0,$$

où $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$. D'autre part, soit $\tilde{k}_1 \in \Gamma$ tel que V vérifie la condition $(*, \tilde{k}_1)$. Soit alors $(\beta_2, \dots, \beta_N)$ des éléments de $\Gamma(E^*)$ formant une base de $(\tilde{k}_1)^\circ$, i.e linéairement indépendantes et satisfaisant $\beta_j(\tilde{k}_1) = 0$. Pour tout point $b_0 \in \Sigma_{\tilde{k}_1}$, on peut trouver un voisinage $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{B}$ de b_0 assez petit, et des fonctions $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$, pour $j = 2..N$, telles que $da_j = \beta_j$ dans $\tilde{\mathcal{O}}$, puisque appartenant à $\Gamma(E^*)$, les 1-formes β_j sont constantes et donc fermées. On définit ensuite simplement $a_1 = F_0$ et $A_j = a_j \circ \pi$, pour $j = 2..N$. Cette construction permet effectivement de satisfaire la condition $(*)$ pour $\{A_j, V\}$, puisque :

- Pour tout $\tilde{k} \in \{\mathbb{Z}\tilde{k}_1\}$ non nul, en tout point $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ tel que $dF_0(\tilde{k})_b = 0$, on a d'une part $da_1(\tilde{k})_b = dF_0(\tilde{k})_b = 0$ et donc

$$da_1(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

D'autre part, pour tout $j = 2..N$, en tout point $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ on a $da_j(\tilde{k})_b = 0$ et donc

$$da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

- Pour tout $\tilde{k} \notin \{\mathbb{Z}\tilde{k}_1\}$ non nul, en tout point $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ tel que $dF_0(\tilde{k})_b = 0$, on a $\tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0$ et donc pour tout $j = 1..N$ on a

$$da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

Considérons maintenant l'indépendance linéaire des différentielles da_1, \dots, da_N . Supposons qu'en un point $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ il existe $\mathcal{X} \in T_b\mathcal{B}$ tel que

$$\mathcal{X} \in \bigcap_{j=1}^N \ker(da_j).$$

Comme par construction

$$\bigcap_{j=2}^N \ker(\beta_j) = \mathbb{R} \otimes \tilde{k}_1,$$

alors \mathcal{X} est colinéaire à \tilde{k}_1 . D'autre part $\mathcal{X} \in \ker(dF_0)_b$ ce qui implique que $dF_0(\tilde{k}_1)_b = 0$ et donc que $b \in \Sigma_{\tilde{k}_1}$. En définissant $\mathcal{O} = \pi^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})$, cela prouve donc que l'on a $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{O} = \pi^{-1}(\Sigma_{\tilde{k}_1}) \cap \mathcal{O}$ et que les singularités sont de corang 1. \square

Exemple B.10. Considérons sur $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^N$ le hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et le hamiltonien perturbé de la forme $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon V(x_1)$, avec $V \in C^\infty(S^1)$. On vérifie facilement que la série de Fourier $\tilde{V}(\tilde{k})$ est nulle pour tout $\tilde{k} \notin \{(k, 0, \dots, 0); k \in \mathbb{Z}\}$ et non nulle pour $\tilde{k} \in \{(k, 0, \dots, 0); k \in \mathbb{Z}\}$, cela indépendamment de ξ . Cela implique que V ne satisfait pas la condition $(*_b)$ en tout point de la surface $\Sigma = \{(0, \xi_2, \dots, \xi_N); \xi_j \in \mathbb{R}\}$, mais satisfait la condition $(*_b)$, où $\tilde{k}_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

B.2.2 Déformations singulières avec n résonances

Dans le cas où il y a plusieurs surfaces $\Sigma_{\tilde{k}_j}$ sur lesquelles la condition $(*_b)$ n'est pas satisfaite, mais lorsqu'une condition plus faible est satisfaite par V , on peut quand même construire une application moment V -déformable. La construction proposée présente cependant un haut degré de singularité (grand corang) et on ne sait pas si le corang de cette construction est optimale.

Condition B.11. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition** $(*_b)$ $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ s'il existe n éléments $\tilde{k}_j \in \Gamma$ vérifiant les conditions suivantes

- Les $\tilde{k}_j \in \Gamma$ sont primitifs et linéairement indépendants.
- En tout point de $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$, la hessienne $\nabla \nabla F$ restreinte à l'espace $\bigoplus_i \mathbb{R}\tilde{k}_i$ est non dégénérée.
- Pour tout $b \in \mathcal{B} \setminus \bigcup_j \Sigma_{\tilde{k}_j}$ la condition $(*_b)$ est satisfaite.

Proposition B.12. La condition $(*_b)$ $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ implique que

$$\forall \tilde{k} \notin \bigcup_i \{\mathbb{Z}\tilde{k}_i\}, \forall b \text{ tq } dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

On donne maintenant l'équivalent du lemme B.6 pour le cas où l'on a plusieurs surfaces $\Sigma_{\tilde{k}_j}$ sur lesquelles la condition $(*_b)$ n'est pas satisfaite.

Lemme B.13. Supposons qu'il existe un tore \mathcal{M}_{b_0} , un voisinage $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{B}$ de b_0 et n éléments $\tilde{k}_j \in \Gamma$ tels que pour tout point $b \in \tilde{\mathcal{O}} \cap \bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ la condition $(*_b)$ n'est pas satisfaite. Alors, s'il existe une application moment V -déformable \mathbf{A} , son lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vérifie

$$\pi^{-1}\left(\tilde{\mathcal{O}} \cap \bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}\right) \subset \mathcal{S}(\mathbf{A})$$

et en tout point $b \in \left(\tilde{\mathcal{O}} \cap \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}\right)$, on a

$$\text{Vect}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) \subset \bigcap_{j=1}^N \ker(da_j)_b,$$

où $\text{Vect}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$ engendré par les vecteurs \tilde{k}_j .

Démonstration. Application directe du lemme B.6. □

Le théorème suivant montre que la condition $(*, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ est suffisante pour que le système déformé reste complètement intégrable (mais singulier) à $O(\varepsilon^2)$, mais avec un corang égal à n sur l'union des surfaces $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ alors que le lemme B.13 impose seulement que le corang soit égal à n sur l'intersection $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$.

Théorème B.14. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIrég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation vérifiant la condition $(*, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ pour certains $\tilde{k}_i \in \Gamma$. Alors, pour tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$, il existe un voisinage \mathcal{O} du tore \mathcal{M}_b et une application moment V -déformable \mathbf{A} dans \mathcal{O} vérifiant :

- $\text{sing}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{O} = \pi^{-1}(\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}) \cap \mathcal{O}$
- Pour tout $m \in \text{sing}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{O}$, on a $\text{corang}(m) = n$.

Démonstration. D'après le lemme B.4, \mathbf{A} est une application moment V -déformable si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ vérifie la condition $(*)$ pour tout $j = 1..N$, ce qui s'écrit

$$\forall \tilde{k} \in \Gamma, \tilde{k} \neq 0, \forall b \in \mathcal{B}, dF_0(\tilde{k})_b = 0 \implies da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0,$$

où $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$. D'autre part, soit des $\tilde{k}_i \in \Gamma$ tel que V vérifie la condition $(*, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$. Soit alors $(\beta_{N-n+1}, \dots, \beta_N)$ des éléments de $\Gamma(E^*)$ formant une base de $(\tilde{k}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{k}_n)^\circ$, i.e linéairement indépendantes et satisfaisant $\beta_j(\tilde{k}_i) = 0$ pour tout $i = 1..n$ et $j = N - n + 1..N$. Pour tout point $b_0 \in \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$, on peut trouver un voisinage $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{B}$ assez petit de b_0 , et $N - n$ fonctions $A_j = a_j \circ \pi$, telles que $da_j = \beta_j$ dans $\tilde{\mathcal{O}}$, puisque appartenant à $\Gamma(E^*)$, les 1-formes β_j sont constantes et donc fermées. On définit ensuite

$$a_i = \Omega_1^2 \dots \Omega_n^2 \cdot \Omega_i,$$

où l'on a noté $\Omega_i = \Omega_{\tilde{k}_i}$ pour simplifier les notations. Cette construction permet effectivement de satisfaire la condition $(*)$ pour $\{A_j, V\}$ puisque :

- D'après la proposition B.12, la condition $(*, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ implique que pour tout $\tilde{k} \notin \bigcup_i \{\mathbb{Z}\tilde{k}_i\}$ et tout $b \in \Sigma_{\tilde{k}}$, on a $\tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0$. Il en résulte alors que pour tout $j = 1..N$, on a

$$da_j(\tilde{k})_b \tilde{V}(b, \tilde{k}) = 0.$$

- Pour tout $i : 1..n$, la différentielle de da_i possède au moins $\Omega_1^2 \dots \Omega_n^2$ en facteur, qui est nul en tout point de $\bigcup_i \{\Sigma_{\tilde{k}_i}\}$, ce qui fait que pour tout $\tilde{k} \in \bigcup_i \{\mathbb{Z}\tilde{k}_i\}$ et pour tout $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ tel que $dF_0 \left(\tilde{k} \right)_b = 0$, on a $da_i = 0$, et donc

$$da_1 \left(\tilde{k} \right)_b \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0.$$

D'autre part, pour tout $j : N - n + 1..N$, pour tout $\tilde{k} \in \bigcup_i \{\mathbb{Z}\tilde{k}_i\}$ et en tout point $b \in \tilde{\mathcal{O}}$ on a $da_j \left(\tilde{k} \right)_b = \beta_j \left(\tilde{k} \right)_b = 0$ et donc

$$da_j \left(\tilde{k} \right)_b \tilde{V} \left(b, \tilde{k} \right) = 0.$$

Considérons maintenant l'indépendance linéaire des différentielles da_1, \dots, da_N en dehors du lieu $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$. Tout d'abord, les β_j , pour $j = N - n + 1$ sont linéairement indépendants par définitions. On va montrer ensuite que les da_j , pour $j = 1..n$, sont linéairement indépendants entre eux, et qu'ils sont linéairement indépendant des β_j en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$. Pour alléger les notations, on va noter $\Omega = \Omega_1 \dots \Omega_n$. Les fonctions a_j s'écrivent $a_j = \Omega^2 \Omega_j$, et on a donc $da_j = 2\Omega \Omega_j d\Omega + \Omega^2 d\Omega_j$.

- Les différentielles da_j , pour $j = 1..n$, sont linéairement indépendantes dans $\tilde{\mathcal{O}}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} da_1 \wedge \dots \wedge da_n &= \sum_{j=1}^n (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j-1}) \wedge (2\Omega \Omega_j d\Omega) \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j+1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &\quad + (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_n), \end{aligned}$$

puisque le terme $d\Omega$ peut apparaitre au plus une fois dans le produit extérieur. D'autre part, on a

$$d\Omega = \sum_{k=1}^n \Omega_1 \dots \Omega_{k-1} \Omega_{k+1} \dots \Omega_n d\Omega_k,$$

et par antisymétrie du produit extérieur

$$d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_{j-1} \wedge d\Omega \wedge d\Omega_{j+1} \wedge d\Omega_n = d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_{j-1} \wedge (\Omega_1 \dots \Omega_{j-1} \Omega_{j+1} \dots \Omega_n d\Omega_j) \wedge d\Omega_{j+1} \wedge d\Omega_n,$$

ce qui fait que dans la double somme sur j et k , seuls les termes pour lesquels $j = k$ sont non nuls. Cela donne alors

$$\begin{aligned} da_1 \wedge \dots \wedge da_n &= 2 \sum_{j=1}^n (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j-1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_j) \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j+1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &\quad + (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &= (2n + 1) \Omega^{2n} d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_n, \end{aligned}$$

ce qui est effectivement non-nul en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ puisque que les \tilde{k}_i étant linéairement indépendants, le lemme C.8 de l'appendice nous assure que les différentielles $d\Omega_j$ le sont aussi dans tout un voisinage de $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$.

- Les da_j , pour $j : 1..n$, sont linéairement indépendants des β_j . Pour montrer cela, on va montrer que $(da_1 \wedge \dots \wedge da_n) (\tilde{k}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{k}_n)$ est non nul en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
(da_1 \wedge \dots \wedge da_n) (\tilde{k}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{k}_n) &= (da_1 \wedge \dots \wedge da_n) (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) \\
&= (2n + 1) \Omega^{2n} (d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_n) (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n) \\
&= (2n + 1) \Omega^{2n} \sum_{\pi \in \text{perm}} (-1)^\pi d\Omega_{\pi(1)} (\tilde{k}_1) \dots d\Omega_{\pi(n)} (\tilde{k}_n) \\
&= (2n + 1) \Omega^{2n} \sum_{\pi \in \text{perm}} (-1)^\pi \left(\nabla_{\tilde{k}_{\pi(1)}} \nabla_{\tilde{k}_1} H \right) \dots \left(\nabla_{\tilde{k}_{\pi(n)}} \nabla_{\tilde{k}_n} H \right),
\end{aligned}$$

où l'on a noté $(-1)^\pi$ le signe de la permutation π . Si on note $H_{ij} = \nabla_{\tilde{k}_i} \nabla_{\tilde{k}_j} H$ la matrice de la hessienne de $\nabla \nabla$ restreinte à l'espace $\bigoplus_i \mathbb{R}\tilde{k}_i$, on a simplement

$$(da_1 \wedge \dots \wedge da_n) (\tilde{k}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{k}_n) = (2n + 1) \Omega^{2n} \det (H_{ij}).$$

Par hypothèse, le déterminant de H_{ij} est non nul en tout point de $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ et donc dans tout un voisinage que l'on suppose contenir \tilde{O} (sinon, on restreint \tilde{O} à un ouvert plus petit). Cela assure qu'en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$, $(da_1 \wedge \dots \wedge da_n) (\tilde{k}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{k}_n)$ est non nul.

□

Exemple B.15. Considérons sur $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^N$ le hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et le hamiltonien perturbé de la forme $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon f(x_1) + \varepsilon g(x_2)$, avec $f, g \in C^\infty(S^1)$. On vérifie facilement que la série du potentiel $V = f(x_1) + g(x_2)$ est

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\tilde{k}) &= \tilde{f}(m) + \tilde{g}(n) \quad \text{pour } k = (m, n, 0, \dots, 0), \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z} \\
\tilde{V}(\tilde{k}) &= 0 \quad \text{pour } k \neq (m, n, 0, \dots, 0),
\end{aligned}$$

cela indépendamment de ξ . Cela implique que V ne satisfait pas la condition $(*_b)$ en tout point de l'union des deux surfaces $\Sigma_{\tilde{k}_1} = \{(0, \xi_2, \dots, \xi_N) ; \xi_j \in \mathbb{R}\}$ et $\Sigma_{\tilde{k}_2} = \{(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_N) ; \xi_j \in \mathbb{R}\}$, mais satisfait la condition $(*, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$, où $\tilde{k}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $\tilde{k}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$.

C Appendices : conditions de non-dégénérescence

Les conditions de non-dégénérescence pour un hamiltonien complètement intégrable $H = F \circ \pi$, avec $F \in C^\infty(\mathcal{B})$, sont des conditions locales, en un point $b \in \mathcal{B}$, qui font intervenir $F''_b = (\nabla \nabla F)_b$, le tenseur de type $(2, 0)$ appelé **hessienne** de F , qui est représenté en coordonnées plates⁶ $\{\xi_j\}$ par la matrice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right)$. Ce tenseur est symétrique, grâce au fait que ∇ est sans torsion. Il peut être vu comme une application linéaire de $T_b \mathcal{B}$ dans $T_b^* \mathcal{B}$. On notera $\mathcal{K} = \bigcup_b \mathcal{K}_b$ la distribution d'hyperplans $\mathcal{K}_b \subset T_b \mathcal{B}$ tangents aux surfaces $F = cst$, i.e.

$$\mathcal{K}_b = \ker dF|_b.$$

On utilisera aussi la fonction $\Omega_{\mathcal{X}} = dF(\mathcal{X})$ et le sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{X}} = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_{\mathcal{X}}(b) = 0\}$ précédemment définis. Dans la suite, on utilisera la notation $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ pour dire que les vecteurs \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont colinéaires.

C.1 Différentes conditions possibles

Voici une liste non exhaustive de conditions possibles, qui apparaissent dans la littérature, dont on donne une formulation géométrique tensorielle ainsi que la formulation équivalente dans un système de coordonnées $\{\xi_j\}$ plates.

Condition de Kolmogorov : il s'agit simplement de demander qu'en tout point b , la hessienne $F''_b : T_b \mathcal{B} \rightarrow T_b^* \mathcal{B}$, vue comme application linéaire de $T_b \mathcal{B}$ dans $T_b^* \mathcal{B}$, soit inversible.

$$\mathcal{X} \in T_b \mathcal{B} \text{ tq } \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F = 0 \implies \mathcal{X} = 0,$$

où la 1-forme $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F$ est la contraction de la hessienne $\nabla \nabla F$ par le champ de vecteurs \mathcal{X} . En coordonnées plates, cette condition s'écrit :

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) \neq 0.$$

Cela signifie aussi que l'application "fréquence"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ \xi_j & \rightarrow & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \end{array}$$

est un difféomorphisme local.

Condition iso-énergétique : on demande qu'en tout point b , la hessienne $F''|_{\mathcal{K}_b} : \mathcal{K}_b \rightarrow \mathcal{K}_b^*$, restreinte à \mathcal{K}_b (pour les deux entrées), soit inversible, i.e

$$\mathcal{X} \in \mathcal{K}_b \text{ et } \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \sim dF \implies \mathcal{X} = 0.$$

⁶Par exemple, les coordonnées actions d'un système de coordonnées angles-actions.

En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ \dots & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} & \dots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \neq 0.$$

Condition de Bruno : On demande qu'en tout point b , l'ensemble des vecteurs $\mathcal{X} \in T_b \mathcal{B}$ vérifiant $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \sim dF$ soit de dimension 1:

$$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in T_b \mathcal{B} \text{ tq } \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \sim dF \text{ et } \nabla_{\mathcal{Y}} \nabla F \sim dF \implies \mathcal{X} \sim \mathcal{Y}.$$

Cela est équivalent à demander que l'application \mathbf{U} , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : T_b \mathcal{B} \oplus \mathbb{R} &\rightarrow T_b^* \mathcal{B} \\ (\mathcal{X}, \alpha) &\rightarrow \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F + \alpha \nabla F, \end{aligned}$$

soit de rang N (ait un noyau de dimension 1). En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\text{rang} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ \dots & & \ddots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right) = n.$$

Condition de Nico : on demande qu'en tout point b , la hessienne $F''|_{K_b} : K_b \mathcal{B} \rightarrow T_b^* \mathcal{B}$, restreinte à K_b (pour la première entrée), soit injective :

$$\mathcal{X} \in K_b, \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F = 0 \implies \mathcal{X} = 0.$$

Cela est équivalent à demander que l'application \mathbf{V} , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{V} : T_b \mathcal{B} &\rightarrow T_b^* \mathcal{B} \oplus \mathbb{R} \\ \mathcal{X} &\rightarrow (\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F, \nabla_{\mathcal{X}} F), \end{aligned}$$

soit de rang N (ait un noyau de dimension 0). En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\text{rang} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ \dots & & \ddots \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} \dots & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} & \dots \end{array} \right] \end{array} \right) = n.$$

Condition de fréquences tournantes : On définit l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{B} &\rightarrow T_b^* \mathcal{B} \cong \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \\ b &\rightarrow dF_b\end{aligned}$$

et on note $\pi : \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. On demande alors que l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ soit une submersion. Dans un système de coordonnées plates $\{\xi_j\}$, cela revient à demander que l'application

$$\begin{aligned}\pi \circ \varphi : \mathbb{R}^N &\rightarrow P(\mathbb{R}^N) \\ \xi &\rightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial \xi^j}(\xi) \right]\end{aligned}$$

soit une submersion.

Condition de fréquences tournantes iso-énergétique : On considère l'application $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ de la définition précédente. On demande que l'application φ restreinte à toute couche d'énergie $S_E = \{b; F(b) = E\}$ soit un difféomorphisme local de S_E dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$.

Condition d'hypersurface régulière : on demande que pour tout champ de vecteurs constant non nul $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$ et tout point $b \in \Sigma_{\mathcal{X}}$, on ait

$$d(\Omega_{\mathcal{X}})_b \neq 0.$$

Cela implique notamment que le sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{X}}$ est une sous-variété de codimension 1.

Condition de Rüssmann : On demande que pour tout champ de vecteurs constant non nul $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$, le sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{X}}$ soit d'intérieur nul. En coordonnées plates, on considère l'application φ définie dans la condition "fréquence tournante". On demande que pour tout point ξ_0 , l'image de φ ne soit pas incluse dans un hyper plan passant par $\varphi(\xi_0)$.

C.2 Conditions plus fortes et plus faibles...

On va démontrer d'abord que l'on a les équivalence suivantes.

$$\text{Bruno} \iff \text{Fréquences tournantes} \iff \text{Nico} \iff \text{Hypersurface régulière}$$

Définition. En conséquence, on regroupera les quatre conditions équivalentes "Bruno", "Fréquences tournantes", "Nico" et "Hypersurface régulière", sous le nom de **condition de non-dégénérescence au sens faible**.

On va montrer ensuite que l'on a le diagramme suivant, pour les implications entre les différentes conditions de non-dégénérescence.

$$\begin{array}{c} \text{Kolmogorov} \implies \text{ND faible} \quad \longleftarrow \text{Iso-E} \iff \text{Fréq. T. iso-E} \\ \Downarrow \\ \text{Rüssmann} \end{array}$$

Lemme C.1. *La condition "Bruno" est équivalente à la condition "Nico".*

Démonstration. Soient les applications $\mathbf{U} : T_b\mathcal{B} \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$ et $\mathbf{V} : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$ définies dans les conditions "Bruno" et "Nico". Soit le tenseur $T_{ij} = \nabla_i \nabla_j F$ (on utilise la notation en "indices abstraits" de Penrose [11]). On va montrer que $\mathbf{U}^t = \mathbf{V}$. En effet, la transposée $\mathbf{U}^t : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$ vérifie, pour tout $\mathcal{X} \in T_b\mathcal{B}$ et tout $(\mathcal{Y}, \alpha) \in T_b\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^t(\mathcal{X})(\mathcal{Y}, \alpha) &= \mathbf{U}(\mathcal{Y}, \alpha)(\mathcal{X}) \\ &= \mathcal{X}^j \mathcal{Y}^i T_{ij} + \alpha \mathcal{X}^j \nabla_j F \\ &= \mathcal{Y}^j \mathcal{X}^i T_{ij} + \alpha \mathcal{X}^j \nabla_j F, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de symétrie de la hessienne. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^t(\mathcal{X})(\mathcal{Y}, \alpha) &= (\mathcal{X}^i T_{ij}, \mathcal{X}^j \nabla_j F)(\mathcal{Y}, \alpha) \\ &= \mathbf{V}(\mathcal{X})(\mathcal{Y}, \alpha). \end{aligned}$$

Cela implique que $\text{rang}(\mathbf{V}) = \text{rang}(\mathbf{U}^t) = \text{rang}(\mathbf{U})$, et donc que les deux conditions "Nico" et "Bruno" sont équivalentes. \square

Lemme C.2. *La condition "Bruno" est équivalente à la condition "Fréquences tournantes".*

Démonstration. Notons $dF_b^\nabla = \varphi(b)$. Par définition, c'est une forme constante qui coïncide avec dF au point b . La condition FT ("fréquence tournante") signifie que la dérivée $(\pi \circ \varphi)_*$ de l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$ est surjective. Etant donné que \mathcal{B} est de dimension N et $P(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$ de dimension $N - 1$, la condition signifie que $(\pi \circ \varphi)_*$ a un noyau de dimension 1. Or le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ est l'espace des vecteurs \mathcal{X} tels que $\varphi_*(\mathcal{X})$ soit dans le noyau de π_* , c'est à dire tangent aux fibres π^{-1} . En utilisant implicitement l'isomorphisme naturel entre l'espace vectoriel $\Omega_\nabla^1(\mathcal{B})$ et son tangent $T(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$, on voit que le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ est l'espace \mathcal{X} tels que pour tout point b , on ait $\varphi_* \mathcal{X}_b \sim \varphi(b)$. La condition FT est donc équivalente à demander que si \mathcal{X}_b et \mathcal{Y}_b sont deux vecteurs tels que $\varphi_* \mathcal{X}_b \sim \varphi(b)$ et $\varphi_* \mathcal{Y}_b \sim \varphi(b)$, alors $\mathcal{X}_b \sim \mathcal{Y}_b$.

D'autre part, on va montrer que $\varphi_* \mathcal{X}_b = \nabla_{\mathcal{X}_b} \nabla F$. Soit une géodésique $t \rightarrow b(t)$, passant par b à l'instant $t = 0$, et de vecteur tangent \mathcal{X}_b en b . Dans un voisinage de b , on peut étendre \mathcal{X}_b de manière unique en un champ de vecteurs constant \mathcal{X} , et on a notamment $\phi_{\mathcal{X}}^t(b) = b(t)$. Il nous faut calculer $\varphi_* \mathcal{X}_b = \frac{d}{dt}(\varphi(b(t)))_{t=0}$. Par définition, pour tout t , $\varphi(b(t))$ est une 1-forme constante, coïncidant en $b(t)$ avec $dH_{b(t)}$. Elle est invariante par le flot de tout champ de vecteur constant, notamment par celui de \mathcal{X} , i.e

$(\varphi(b(t)))_b = ((\phi_{\mathcal{X}}^t)^* dH)_b$. En utilisant la définition de la dérivée de Lie, on voit que l'on a $\varphi_* \mathcal{X}_b = (\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(dH))_b$. En utilisant la formule de Cartan, on obtient $\varphi_* \mathcal{X}_b = d(dH(\mathcal{X}))_b$. En utilisant enfin le fait que \mathcal{X} est constant, on trouve finalement $\varphi_* \mathcal{X}_b = (\nabla_{\mathcal{X}} \nabla H)_b$. En reprenant le résultat du paragraphe précédent, on a donc prouvé que si \mathcal{X}_b et \mathcal{Y}_b sont deux vecteurs tels que $(\nabla_{\mathcal{X}_b} \nabla H)_b \sim dH_b$ et $(\nabla_{\mathcal{Y}_b} \nabla H)_b \sim dH_b$ alors ils doivent être colinéaire, ce qui est la condition de non-dégénérescence de Bruno. \square

Lemme C.3. *La condition "Nico" est équivalente à la condition "Hypersurface régulière".*

Démonstration. En effet, pour tout champ $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$, on a $\Omega_{\mathcal{X}} = \nabla_{\mathcal{X}} F$ et donc $d(\Omega_{\mathcal{X}}) = \nabla \nabla_{\mathcal{X}} F = \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F$. La condition "hypersurface régulière" se réécrit donc

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B}), \forall b/\mathcal{X} \in \mathcal{K}_b \implies (\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F)_b \neq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall b, \forall \mathcal{X} \in \mathcal{K}_b \implies (\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F)_b \neq 0,$$

ce qui est justement la condition "Nico". \square

Lemme C.4. *La condition "Iso-énergétique" implique la condition "Nico".*

Démonstration. La condition "iso-énergétique" signifie que pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{K}_b$, la 1-forme $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F|_{\mathcal{K}_b}$ est non nulle. Cette propriété reste vraie lorsque l'on retire la restriction à \mathcal{K}_b , i.e

$$\mathcal{X} \in \mathcal{K}_b \implies \nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \neq 0.$$

\square

Lemme C.5. *La condition "Kolmogorov" implique la condition "Nico".*

Démonstration. La condition "Kolmogorov" signifie que pour tout $\mathcal{X} \in T_b \mathcal{B}$, on a $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \neq 0$. Par restriction, cela est aussi vrai pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{K}_b$, ce qui est la condition "Nico". \square

Lemme C.6. *La condition "Iso-énergétique" est équivalente à la condition "Fréquences tournantes iso-énergétique".*

Démonstration. La condition "Fréquence tournante iso-énergétique" revient à demander qu'en tout point b , l'application $(\pi \circ \varphi)_*$ restreinte à une surface d'énergie S_E soit bijective de $T_b S_E$ dans $T_{\pi(\varphi(b))} P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, i.e que le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ soit transverse à S_E . D'après ce qu'on a vu dans la démonstration du lemme C.2, cela revient à demander que si \mathcal{X}_b est tel que $(\nabla_{\mathcal{X}_b} \nabla H)_b \sim dH_b$, alors \mathcal{X}_b doit être transverse à S_E , i.e $dH(\mathcal{X}_b) \neq 0$, ce qui est la condition iso-énergétique. \square

Lemme C.7. *La condition "Faible" implique la condition "Rüssmann".*

Démonstration. En effet, la formulation "hypersurface régulière" de la condition "faible" implique que pour tout champ de vecteurs constant non nul $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$, le sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{X}}$ est une sous-variété de codimension 1, ce qui est bien d'intérieur nul. \square

C.3 Propriétés des hamiltoniens non-dégénérés

Lemme C.8. Soit $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ un hamiltonien non-dégénéré au sens faible. Si $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$ sont des champs de vecteurs constants linéairement indépendants, alors dans un voisinage de $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ les différentielles $d\Omega_{\mathcal{X}_j}$ sont linéairement indépendantes. Cela implique notamment que les sous-variétés $\Sigma_{\mathcal{X}_j}$ sont transverses.

Démonstration. Tout d'abord, la formulation "hypersurface régulière" de la condition de non-dégénérescence faible implique que les sous-ensembles $\Sigma_{\mathcal{X}_j}$, définis par $\Sigma_{\mathcal{X}_j} = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_{\mathcal{X}_j}(b) = 0\}$, sont des sous-variétés de codimension 1. D'autre part, pour tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$ et pour tout $j = 1..n$, on a $dF(\mathcal{X}_j)_b = 0$. Pour tous n -uplet $\alpha \in \mathbb{R}^n$, on a donc $dF\left(\sum_j \alpha_j \mathcal{X}_j\right)_b = 0$ et la formulation "Nico" de la condition de non-dégénérescence implique que

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\sum_j \alpha_j \mathcal{X}_j} \nabla F\right)_b &\neq 0 \\ \sum_{j=1}^n (\alpha_j \nabla_{\mathcal{X}_j} \nabla F)_b &\neq 0. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de symétrie de la hessienne $\nabla \nabla F$ et le fait que les \mathcal{X}_j sont constants, on a donc en tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\alpha_j \nabla \nabla_{\mathcal{X}_j} F)_b &\neq 0 \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j (d\Omega_{\mathcal{X}_j})_b &\neq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que les différentielles des fonctions $\Omega_{\mathcal{X}_j}$ sont indépendantes en tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$, et donc que les surfaces $\Sigma_{\mathcal{X}_j}$ sont transverses. De plus, l'indépendance linéaire de $d\Omega_{\mathcal{X}_j}$ étant une condition ouverte, cela reste vrai dans tout un voisinage de $\bigcap_i \Sigma_{\tilde{k}_i}$. \square

Lemme C.9. Si $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénéré au sens de Rüssmann, alors l'ensemble des tores, sur lesquels la dynamique est ergodique, est dense dans \mathcal{B} .

Démonstration. Si b est un tore ergodique, cela signifie que dF_b n'a aucune relation de résonance, i.e b n'appartient à aucun des sous-ensembles $\Sigma_k = \{b; dF_b(k) = 0\}$, et donc que b appartient à $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{k \in E} \Sigma_k$. On va montrer que $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est dense dans \mathcal{B} , en montrant que $\bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est un ensemble d'intérieur vide. En effet, lorsque la fonction $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénérée au sens de Rüssmann, pour tout $k \neq 0$, le sous-ensemble Σ_k est d'intérieur nul. C'est de plus un ensemble fermé puisque que c'est l'image réciproque de $0 \in \mathbb{R}$ par l'application continue $dF(k) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Baire (voir par exemple [3]) qui nous assure que $\bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est un ensemble d'intérieur vide. \square

Lemme C.10. Si $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénéré au sens faible, alors :

1. L'ensemble des tores, sur lesquels la dynamique est périodique, est dense dans \mathcal{B} .
2. Pour tout $k \in E$, l'ensemble des tores appartenant à Σ_k et sur lesquels la dynamique est périodique, est dense dans Σ_k .

Démonstration.

1. Utilisons la formulation "fréquences tournantes" de la condition de non-dégénérescence faible. Si on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B} &\rightarrow T_b^* \mathcal{B} \cong \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \\ b &\rightarrow dF_b \end{aligned}$$

et si l'on note $\pi : \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, alors la condition de "fréquence tournante" signifie que l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ est une submersion. Une submersion étant toujours une application ouverte, l'image de \mathcal{B} par $\pi \circ \varphi$ est un ouvert de $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. Notons $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$ cet ouvert. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{P}_{er} \subset \mathcal{B}$ des tores périodiques est par définition $\mathcal{P}_{er} = \{b \in \mathcal{B}; \varphi(b) \in \mathbb{R}E^*\}$, où $E^* \subset \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ est le réseau des 1-formes constantes entières. Considérons $\pi(E^*) \subset P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ l'image par π du réseau E^* . Dans un système de coordonnées plates entières, on a $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cong \mathbb{R}P^{N-1}$ et $\pi(E^*) \cong \mathbb{Z}P^{N-1}$. On voit que les tores périodiques sont donnés par $\mathcal{P}_{er} = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(\pi(E^*)))$. Par ailleurs, on vérifie facilement (par exemple en coordonnées plates entières) que $\pi(E^*)$ est dense dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. Cela reste vrai par restriction à l'ouvert \mathcal{O} , i.e $\pi(E^*) \cap \mathcal{O}$ est dense dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{O}$. Enfin, l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}$ étant une submersion, on peut montrer que cela implique que l'image réciproque d'un sous-ensemble dense dans \mathcal{O} est dense dans \mathcal{B} . On a donc que $(\pi \circ \varphi)^{-1}(\pi(E^*) \cap \mathcal{O})$ est dense dans $(\pi \circ \varphi)^{-1}(P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{O})$, i.e \mathcal{P}_{er} est dense dans \mathcal{B} .

2. Notons comme précédemment $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$ et $\mathcal{P}_{er} \subset \mathcal{B}$ l'ensemble des tores périodiques. Par définition, pour tout $k \in E$, Σ_k est donné par $\Sigma_k = \varphi^{-1}(k^\perp \cap \mathcal{O})$, où $k^\perp \subset \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ est l'hyperplan formé par les $\alpha \in \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ tels que $\alpha(k) = 0$. De plus, k appartient au réseau E ce qui implique que $k^\perp \cap E^*$ est un sous-réseau de dimension $N - 1$ de $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$, c'est à dire que $k^\perp \cap E^*$ est un réseau de k^\perp . Si on note $\pi' : k^\perp \rightarrow P(k^\perp)$ la projection dans le projectif, on a que $\pi'(k^\perp \cap E^*)$ est dense dans $P(k^\perp)$. D'autre part, $P(k^\perp)$ est naturellement isomorphe à $\pi(k^\perp) \subset P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, où π est la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. De même $\pi'(k^\perp \cap E^*)$ est naturellement isomorphe à $\pi(k^\perp \cap E^*)$, ce qui fait que $\pi(k^\perp \cap E^*)$ est dense dans $\pi(k^\perp)$. Cela reste vrai par restriction à l'ouvert $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$, i.e $\pi(k^\perp \cap E^*) \cap \mathcal{O}$ est dense dans $\pi(k^\perp) \cap \mathcal{O}$. Enfin, par définition l'ensemble des tores périodiques appartenant à Σ_k est donné par $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(\pi(E^*)) \cap (k^\perp \cap \mathcal{O}))$, c'est à dire $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k = (\pi \circ \varphi)^{-1}(\pi(k^\perp \cap E^*) \cap \mathcal{O})$.

On voit de même que $\Sigma_k = (\pi \circ \varphi)^{-1} (\pi (k^\perp) \cap \mathcal{O})$. Le fait que $\pi \circ \varphi$ est une submersion implique alors que $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k$ est dense dans Σ_k .

□

Proposition C.11. *Soit $H \in C(\mathcal{M})$ un hamiltonien C.I régulier non-dégénéré au sens "faible". Alors l'espace des fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$ constantes le long des fibres est égal à l'espace des fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$ qui Poisson-commutent avec H .*

Démonstration. En effet, soit F une fonction telle que $\{H, F\} = 0$. Pour tout point $b \in \mathcal{B}$ et tout $k \in \Lambda_b^*$, la série de Fourier de F vérifie $k(\mathcal{X}_H) \tilde{F}_b(k) = 0$ puisque $\widetilde{\{H, F\}} = 0$. Pour chaque tore \mathcal{M}_b sur lequel la dynamique de \mathcal{X}_H est ergodique, pour tout $k \neq 0$ on a $k(\mathcal{X}_H) \neq 0$ et donc $\tilde{F}_b(k) = 0$, ce qui veut dire que F est constante sur la fibre \mathcal{M}_b . D'autre part, lemme C.10 nous assure que lorsque H est non-dégénéré au sens faible, alors la propriété $\tilde{F}_b(k) \neq 0$ est vrai sur un sous-ensemble dense de \mathcal{B} . Par continuité par rapport à b des séries de Fourier, cela est vrai pour tout $b \in \mathcal{B}$, ce qui prouve que F est constant le long des fibres. Réciproquement, si F est constant le long des fibres, il est trivial de voir que $\{H, F\} = 0$. □

Proposition C.12. *Soit $H \in C(\mathcal{M})$ un hamiltonien C.I régulier non dégénéré au sens "faible". Alors si A et B sont deux fonctions, on a*

$$\{A, H\} = \{B, H\} = 0 \Rightarrow \{A, B\} = 0.$$

Démonstration. En effet, si A et B commutent avec H , la proposition C.11 implique que A et B sont constante le long des fibres, et elle commutent donc. □

Proposition C.13. *Si $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est un système C.I régulier non dégénéré au sens "faible" alors $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est l'une unique fibration lagrangienne le long des fibres de laquelle H est constant.*

Démonstration. En effet, si $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}'$ est une deuxième fibration telle que $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}')$ est CI régulier alors, en appliquant deux fois la proposition C.11, on voit que toute fonction F constante sur les fibres π^{-1} est aussi constante sur les fibres $(\pi')^{-1}$, et vice versa, ce qui prouve que les deux fibrations sont les mêmes. □

C.4 Exemples

Exemple 1: Kolmogorov et iso-énergétique. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^N \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2$, où l'on a noté $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^N (\xi_j)^2$. La différentielle est $dF = \sum_{j=1}^N \xi_j d\xi_j$ et la hessienne $F_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ est la matrice identité en tout point ξ . On a alors $\det(F_{ij}) = 1$ ce qui signifie que F satisfait à la condition de "Kolmogorov".

Par ailleurs, on peut montrer que

$$\det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ \dots & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} & \dots \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right) = -|\xi|^2,$$

ce qui est non nul en lorsque que $\xi \neq 0$, ce qui signifie que F satisfait à la condition "iso-énergétique".

Exemple 2: Iso-énergétique mais pas Kolmogorov. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^N \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = |\xi|$. La différentielle est $dF = \frac{\sum_{j=1}^N \xi_j d\xi_j}{|\xi|}$ et la hessienne est $F_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{|\xi|} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^3}$. On va voir que la condition "Kolmogorov" n'est pas satisfaite puisque, en tout point ξ , le vecteur $\mathcal{X}_j = \xi_j$ vérifie $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F = 0$. En effet, en coordonnées on a pour tout i

$$\sum_j F_{ij} \mathcal{X}_j = \frac{\xi_i}{|\xi|} - \frac{\xi_i |\xi|^2}{|\xi|^3} = 0.$$

Par contre, la condition "iso-énergétique" est satisfaite puisque si un vecteur \mathcal{X} vérifie $\nabla_{\mathcal{X}} \nabla F \sim \nabla F$ et $\nabla_{\mathcal{X}} F = 0$, cela signifie que l'on a

$$\begin{cases} \mathcal{X}_i - \sum_j \frac{\xi_i \xi_j \mathcal{X}_j}{|\xi|^2} = \lambda \xi_i \\ \sum_j \mathcal{X}_j \xi_j = 0 \end{cases}.$$

En insérant la deuxième équation dans la première, on doit avoir

$$\begin{cases} \mathcal{X}_i = \lambda \xi_i \\ \sum_j \mathcal{X}_j \xi_j = 0 \end{cases},$$

ce qui n'est possible qu'en $\xi = 0$, qui n'appartient pas à \mathcal{B} .

Exemple 3: Faible mais pas iso-énergétique ni Kolmogorov. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = \frac{\xi_1^3}{3} + \frac{\xi_2^2}{2}$. La différentielle est $dF = \xi_1^2 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2$ et la hessienne est

$$F_{ij}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $F_{ij}(\xi)$ est simplement $2\xi_1$, ce qui fait que la condition "Kolmogorov" n'est pas satisfaite en tout point de l'axe $\{(0, \xi_2); \xi_2 \neq 0\}$. De même, on a

$$\det \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 & \xi_1^2 \\ 0 & 1 & \xi_2 \\ \xi_1^2 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix} = -\xi_1 (\xi_1^3 + 2\xi_2^2),$$

ce qui fait que la condition iso-énergétique n'est pas satisfaite, notamment sur l'axe $\{(0, \xi_2); \xi_2 \neq 0\}$. Par contre, la condition d'hypersurface régulière est satisfaite. En effet,

pour tout \mathcal{X} , on a $\Omega_{\mathcal{X}} = dF(\mathcal{X}) = \xi_1^2 \mathcal{X}_1 + \xi_2 \mathcal{X}_2$, et la différentielle $d\Omega_{\mathcal{X}} = \xi_1 \mathcal{X}_1 d\xi_1 + \mathcal{X}_2 d\xi_2$ n'est jamais nulle.

Exemple 4: Rüssmann mais pas faible. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4$. La différentielle est $dF = 4\xi_1^3 d\xi_1 + 4\xi_2^3 d\xi_2$, ce qui fait que pour tout \mathcal{X} , on a $\Omega_{\mathcal{X}} = dF(\mathcal{X}) = 4\xi_1^3 \mathcal{X}_1 + 4\xi_2^3 \mathcal{X}_2$. Le sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{X}} = \{(\xi_1, \xi_2); \xi_1^3 \mathcal{X}_1 + \xi_2^3 \mathcal{X}_2 = 0\}$ est simplement une droite passant par l'origine et de pente $-\left(\frac{\mathcal{X}_1}{\mathcal{X}_2}\right)^{\frac{1}{3}}$, privée de l'origine. C'est un ensemble d'intérieur nul, ce qui fait que la condition de Rüssmann est satisfaite. Par ailleurs, la différentielle de $\Omega_{\mathcal{X}}$ est $d\Omega_{\mathcal{X}} = 12(\xi_1^2 \mathcal{X}_1 d\xi_1 + 4\xi_2^2 \mathcal{X}_2 d\xi_2)$. On va voir que pour certains \mathcal{X} , cette fonction est nulle en des points de la surface $\Sigma_{\mathcal{X}}$, ce qui fait que la condition "faible" n'est pas satisfaite. Par exemple, pour $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, 0)$, la surface $\Sigma_{\mathcal{X}}$ est l'axe verticale $\{(0, \xi_2); \xi_2 \neq 0\}$ privé de l'origine. Or, en tout point de cette surface, on a $d\Omega_{\mathcal{X}} = 0$.

References

- [1] V.I. Arnol'd. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. *Russian Math. Surveys*, 18(5):9–36, 1963.
- [2] V.I. Arnol'd. A theorem of Liouville concerning integrable dynamics. *Siberian Math. J.*, 4:471–474, 1963.
- [3] J. Dixmier. *Topologie Générale*. 1981.
- [4] J. J. Duistermaat. Global action-angle coordinates. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32:687–706, 1980.
- [5] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foudations of differential geometry*. 1969.
- [6] A.N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 98(4):527–530, 1954.
- [7] J. Liouville. Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique. *J. Math. Pure Appl.*, 20:137–138, 1855.
- [8] P. Lochack and C. Meunier. *Multiphasing averaging for classical systems*. Springer-Verlag, 1988.
- [9] H. Mineur. Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involutions aux systèmes à variables séparées. *J. Math. Pure Appl.*, 15:221–267, 1936.
- [10] J. Moser. On invariant curves of area preserving mappings of an annulus. *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys Kl*, 11a(1):1–20, 1962.
- [11] R. Penrose and W. Rindler. *Spinor and pace-time I*. Cambridge university Press, 1984.
- [12] J. Pöschel. Integrability of hamiltonian systems on cantor sets. *Comm. Pure Appl. Maths*, XXXV:653–695, 1982.
- [13] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Adv. in Math.*, 6:329–346, 1971.
- [14] N. Woodhouse. *Geometric Quantization*. 2 edition.

Nicolas Roy
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS), BP 74
38402 Saint Martin d'Hères
France
Email : Nicolas.Roy@ujf-grenoble.fr