SUR L'INVERSION DES SÉRIES

Roland BACHER

Prépublication de l'Institut Fourier n° 589 (2003)
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract

A continuous version of the invert transform coincides conjecturally with a series obtained from limited Taylor expansions. This conjectural identity is equivalent to a curious identity involving binomial coefficients.

Résumé

Une version continue de la transformée inverse coïncide conjecturalement avec une série obtenue à partir de développements limités. Cette identité conjecturale est équivalente à une curieuse identité entre coefficients binomiaux.

On associe à la suite $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ (à valeurs dans un anneau commutatif quelconque) sa *transformée inverse* (Invert transform) $I(a) = b = (b_0, b_1, \dots)$ définie formellement par l'égalité

$$\left(1 + t\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(1 - t\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = 1 \ .$$

Posons $I^0(a) = a,\ I^1(a) = b$ et $I^{k+1}(a) = I(I^k(a))$. Comme $a \longmapsto I(a)$ est bijective sur l'ensemble des suites, on peut donner un sens à $I^k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ en posant $I^k(I^{-k}(a)) = a$. Un petit calcul et une récurrence montrent facilement le résultat suivant.

Proposition 1 *Soit $k \in \mathbb{Z}$ un entier et soit $a = (a_0, a_1, \dots)$ une suite. La suite $I^k(a) = b = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ vérifie alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}{1 + kt\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n} \ .$$

2000 Mathematics Subject Classification : 05A10, 05A18, 05A19, 15A15.
Keywords : Invert transform, Hankel matrix, Binomial coefficient.

Cette proposition permet de définir la *transformée inverse continue*

$$I^x(a) = (I_0(x) = a_0,\ I_1(x) = a_1 - a_0^2 x,\ I_2(x) = a_2 - 2a_0a_1x + a_0^3x^2, \dots)$$

d'une suite $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ en considérant la série formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(x)t^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}{1 + xt \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}$$

qui interpole les suites $I^k(a)$ en des exposants quelconques. La notation $I^x(a)$ est justifiée par l'identité $I^x(I^y(a)) = I^{x+y}(a)$. Le coefficient $I_n(x)$ de t^n dans $I^x(a)$ est un polynôme de degré $\leq n$ en x dont les coefficients dépendent de manière polynomiale de $a_0, a_1, \dots$. Ce polynôme $I_n(x)$ est homogène de degré 1 en $x, a_0, a_1, \dots$ en donnant aux variables les poids $\deg(a_i) = 1,\ \deg(x) = -1$ et $I_n(x)$ est homogène de degré n pour les poids $\deg(a_i) = i,\ \deg(x) = 1$.

Remarque 2 Certaines suites $I^x(a)$ semblent posséder des propriétés arithmétiques curieuses : ainsi les polynômes $I_n(x)$ (définis par $\sum I_n(x)t^n = 1/((1-t)^2 + tx))$ associés à la suite $a = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ des entiers naturels semblent avoir des propriétés de divisibilité analogues aux entiers (i.e. $I_{k-1}(x) | I_{n-1}$ si $k|n$) ainsi que de curieuses réductions sur les corps finis.

Remarque 3 Un phénomène similaire d'interpolation continue se produit également pour la composition itérée $f^{\circ k} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ d'une série formelle $f(t) = t + \sum_{i=2}^{\infty} a_i t^i$ dont le développement à l'ordre 1 est l'identité (ceci se généralise d'ailleurs facilement à un d$-$uplet de séries formelles $F(t_1, \dots, t_d) = (f_1(t_1, \dots, t_d), \dots, f_d(t_1, \dots, t_d))$ vérifiant $f_i = t_i +$ termes d'ordre > 1). Il existe alors une suite

$$C_1(x) = 1,\ C_2(x) = a_2 x,\ C_3(x) = (a_2^2(x-1) + a_3)x,$$
$$C_4(x) = (((2x-3)a_2^3 + 5a_2a_3)(x-1) + 2a_4)x/2, \dots$$

avec $C_n(x)$ polynomial de degré $\leq n-1$ en x telle qu'on ait $f^{\circ x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(x)t^i$.

Pour le prouver on peut considérer la différence finie

$$C_n(k+1) - C_n(k) = \text{coefficient de } t^n \text{ dans } \sum_{i=2}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} C_j(k) t^j \right)^i$$

qui est polynomiale de degré au plus $n-2$ en k par récurrence sur n. On peut également le déduire de l'existence d'un isomorphisme de groupe entre ces séries (avec pour produit la composition $f \circ g$) et un certain groupe de matrices (infinies) triangulaires supérieures unipotentes, cf. Theorem 1.7a dans [1].

Remarque 4 Signalons encore la propriété suivante de la transformée inverse : étendons la suite $b = I(a)$ en posant $b_{-1} = -1$ et $b_{-k} = 0$ pour $k \geq 2$. Alors $a_n = \det((b_{i-j})_{0\leq i,j<n}))$ (la preuve est donnée par l'isomorphisme entre l'anneau des séries formelles et l'algèbre des matrices de Toeplitz triangulaires).

Rappelons que $(1^{\mu_1} \cdot 2^{\mu_2} \cdots m^{\mu_m})$ désigne la partition de l'entier naturel $m = \sum_{j=1}^{m} j\mu_j$ ayant μ_j parts de longueur j et notons $\mathcal{P}_m$ l'ensemble fini de toutes les partitions de m. Rappelons également la définition des coefficients multinomiaux

$$\binom{n}{\nu} = \binom{n}{\nu_1, \nu_2, \ldots} = \frac{n!}{\left(\prod_j \nu_j!\right)(n - \sum_j \nu_j)!}$$

pour $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$ une suite finie d'entiers naturels de somme $\sum \nu_i \leq n$. En posant $a^\nu = \prod_{j=1} a_j^{\nu_j}$ et en appliquant le théorème binomial à $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right)^{n+1} (-xt)^n$ on montre :

Proposition 5 *Pour $a = (a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots)$ le polynôme $I_n(x)$ est donné par la formule*

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \sum_{(\nu_1,\nu_2,\ldots),\ (1^{\nu_1}\cdot 2^{\nu_2}\cdots)\in\mathcal{P}_{n-k}} \binom{1+k}{\nu} a^\nu \ .$$

Une formule dans le cas général $(a_0 \neq 1)$ se déduit des propriétés d'homogénéité du polynôme $I_n(x)$.

La $n-$ième *matrice de Hankel* $H(n)$ d'une suite $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ est la matrice avec coefficients $h_{i,j} = s_{i+j},\ 0 \leq i, j < n$. La *transformée de Hankel* de s est alors définie comme étant la suite

$$\det(H(1)), \det(H(2)), \det(H(3)), \ldots$$

des déterminants des matrices de Hankel d'ordre $1, 2, \ldots$ associées à s.

Layman [2] a montré le résultat suivant :

Théorème 6 *(Layman) Deux suites a et $b = I(a)$ reliées par la transformée inverse ont même transformée de Hankel.*

Comme les polynômes $I_n(x)$ interpolent les transformées inverses itérées, on a :

Corollaire 7 *La transformée de Hankel de la suite $I^x(a) = (I_0(x), I_1(x), I_2(x), \ldots)$ ne dépend pas de x.*

Pour $k > 0$ un entier, définissons la $k-$ième transformée de Hankel de $s = (s_0,\ s_1, \dots)$ comme la suite $\big(\det(H_k(n))\big)_{n=1,2,\dots}$ pour $H_k(n) = (s_{i+j+k})_{0\leq i,j<n}$.

Conjecture 8 *La suite*

$$\Big(\det\big((I_{i+j+k}(x))_{0\leq i,j<n}\big)\Big)_{n=1,2,3,\dots}$$

de la $k-$ième transformée de Hankel de $I^x(a) = (I_0(x), I_1(x), \dots)$ ne contient que des polynômes de degré $\leq k$ en x.

Notons $\lfloor f(x)\rfloor_k = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j x^j$ le développement limité d'ordre k d'une série formelle $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j x^j$. À une suite $a = (a_0 = 1, a_1, a_2, \dots)$ commençant par 1 nous associons la suite de polynômes

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 + a_1 x,\ P_2(x) = 1 + 2a_1 x + (a_1^2 + a_2)x^2, \dots$$

définie de façon récursive par

$$P_0(x) = a_0 = 1 \ \text{ et } \ P_k(x) = \lfloor P_{k-1}(x)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\Big)\rfloor_k.$$

Posons $Q_n(x) = x^n P_n(1/x)$ et notons $Q(x) = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ la suite formée des polynômes $Q_n(x)$.

Conjecture 9 *On a $I^x(Q(0)) = Q(-x)$.*

La transformée de Hankel de la suite $Q(x)$ devrait donc être indépendante de x. Elle paraît en outre ne pas dépendre de a_1. On semble donc obtenir de cette manière des familles de suites à deux paramètres ayant même transformée de Hankel.

À une suite finie $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ de somme $s(\Lambda) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ nous associons le polynôme $F_\Lambda(x)$ de degré d en posant $F_\emptyset(x) = 1$ et

$$\begin{aligned} F_\Lambda(x) &= x\binom{x-1+s(\Lambda)}{d-1}(d-1)! \\ &= x(x+s(\Lambda)-d+1)(x+s(\Lambda)-d+2)\cdots(x+s(\Lambda)-1) \end{aligned}$$

si $1 \leq d = \sharp(\Lambda) < \infty$. Une application $\varphi \in \{1, \dots, k\}^{\{1,\dots,d\}}$ de $\{1, \dots, d\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ partitionne alors Λ en k sous-suites

$$\varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(i) = \{\lambda_j \mid \varphi(j) = i\}, \dots, \varphi^{-1}(k)$$

(pour l'ordre induit qui ne joue d'ailleurs aucun rôle ici).

Conjecture 10 *On a pour $x_1, \dots, x_k$ quelconques l'identité*

$$\sum_{\varphi \in \{1,\dots,k\}^{\{1,\dots,d\}}} \prod_{j=1}^{k} F_{\varphi^{-1}(j)}(x_j) = F_\Lambda(\sum_{j=1}^{k} x_j) \ .$$

Exemple Pour $\Lambda = (1, 2, 4, 8, \dots, 2^{d-1})$ de longueur d on obtient (après division par $(d-1)!$) l'identité

$$(x+y)\binom{x+y+2^d-2}{d-1} = x\binom{x+2^d-2}{d-1} + y\binom{y+2^d-2}{d-1}$$

$$+ \frac{xy}{(d-1)} \sum_{i=1}^{2^d-2} \frac{\binom{x+i-1}{\delta(i)-1}\binom{y+2^d-i-2}{d-\delta(i)-1}}{\binom{d-2}{\delta(i)-1}}$$

où $\delta(n) = \sum \nu_i$ est la somme des chiffres binaires d'un entier naturel $n = \sum \nu_i 2^i$ écrit en base 2.

Proposition 11 *Les conjectures 9 et 10 sont équivalentes.*

Le lien entre les conjectures 9 et 10 est donné par la formule suivante qui fournit une autre expression pour le polynôme $P_n(x)$:

Théorème 12 *Pour $a = (a_0 = 1, a_1, a_2, a_3, \dots)$ on a*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{\nu=(1^{\nu_1} \cdot 2^{\nu_2} \cdots) \in \mathcal{P}_k} \frac{n+1-k}{n+1-\sum_j \nu_j} \binom{n}{\nu} a^\nu \ .$$

Preuve de la proposition 11 La conjecture 10 est équivalente à l'identité

$$\left(\sum_j Q_j(x) t^j\right)\left(1 - tx\sum_j Q_j(0)t^j\right) = \sum_j Q_j(0)t^j \ .$$

En utilisant le théorème 12 et en comparant les coefficients de $x^n t^k a^\nu$ des deux côtés, la conjecture 9 se ramène à l'égalité

$$F_\Lambda(x+1) = \sum_{\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2} F_{\Lambda_1}(x) F_{\Lambda_2}(1) \ .$$

La conjecture 10 en découle facilement. QED

Idée de la preuve du théorème 12. À une partition $\nu = (1^{\nu_1} \cdot 2^{\nu_2} \cdots)$ on associe le polynôme

$$\begin{aligned} R_\nu(x) &= \frac{x+1-\sum_j j\nu_j}{x+1-\sum_j \nu_j}\binom{x}{\nu} \\ &= (x+1-\sum j\nu_j)\binom{x}{(\sum \nu_j)-1}\frac{((\sum \nu_j)-1)!}{\prod \nu_j!} \end{aligned} \ .$$

Un calcul montre que les polynômes $R_\nu(x)$ satisfont l'identité

$$R_\nu(x+1)-R_\nu(x)=\sum_{j,\ \nu_j>0} R_{(1^{\nu_1}\cdots(j-1)^{\nu_{j-1}}\cdot j^{\nu_j-1}\cdot(j+1)^{\nu_{j+1}}\cdots)}(x)\ .$$

On a ensuite

$$P_{k+1}(x)-P_k(x)=\lfloor P_k(x)\left(\sum_{j=1} a_j x^j\right)\rfloor_{k+1}$$

par définition et les polynômes

$$\tilde P_k(x)=1+\sum_{j=1}^{k}\ \sum_{(1^{\nu_1}\cdot 2^{\nu_2}\cdots)\in\mathcal{P}_j}\left(\prod_{s=1} a_s^{\nu_s}\right)\ R_\nu(k)\ x^j$$

satisfont la même équation. Par récurrence sur k, on a donc $\tilde P_k(x)-P(x)=c_k x^k$ avec c_k une constante. Or c_k doit être nul car tous les polynômes $R_\nu(x)$, $\nu\in\mathcal{P}_k$ contribuant au coefficient dominant x^k de $\tilde P(k)$ ont une racine commune en $k-1$. QED

Je remercie Jean Brossard, Marie-Line Chabanol et Alexis Marin pour leur intérêt.

Références

[1] P. Henrici, Applied and computational complex analysis, Volume I. Wiley Classics Library. New York etc. : John Wiley & Sons Ltd., 682 p. (1988).

[2] J.W. Layman, *The Hankel Transform and Some of its Properties*, J. of Integer Sequences, Vol 4 (2001), Article 01.1.5. (11 pages).

Roland BACHER
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)

Roland.Bacher@ujf-grenoble.fr