

---

# FAMILLES DE POLYNÔMES LIÉES AUX COURBES MODULAIRES $X_1(l)$ UNICURSALES ET POINTS RATIONNELS NON-TRIVIAUX DE COURBES ELLIPTIQUES QUOTIENT

par

FRANCK LEPRÉVOST, MICHAEL POHST & ANDREAS SCHÖPP

---

**Résumé.** — Soit  $l$  un entier et  $E_{c,l}$  la famille de Kubert des courbes elliptiques définies sur  $\mathbf{Q}$  munies d'un point rationnel  $A$  d'ordre  $l$ . On note  $F_{c,l}$  la courbe elliptique quotient de  $E_{c,l}$  par le groupe engendré par  $A$ , et  $\varphi_l$  l'isogénie de  $E_{c,l}$  sur  $F_{c,l}$ . Pour  $l = 3, 4, 5$  et  $6$ , nous construisons explicitement, pour des paramétrisations convenables de  $c$ , des éléments non-triviaux de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})/\varphi_l(E_{c,l}(\mathbf{Q}))$ , autrement dit, des points explicites de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  qui ne sont l'image par  $\varphi_l$  d'aucun élément de  $E_{c,l}(\mathbf{Q})$ . Ces points sont en général d'ordre infini. Nous donnons des applications de cette méthode à la construction d'extensions cycliques de  $\mathbf{Q}$  de degré  $l$ , et retrouvons certains corps obtenus par Shanks et Gras. Dans un article ultérieur, nous étudierons les propriétés arithmétiques de certaines des extensions obtenues ici.

Prépublication de l'Institut Fourier n° 588 (2003)  
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html>

## 1. Introduction

L'étude du rang des courbes elliptiques définies sur  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}(t)$  a connu ces dernières années de nombreux progrès, initiés par les travaux de Mestre. En fait, il est (verbalement) conjecturé l'existence de courbes elliptiques sur  $\mathbf{Q}$  de grand rang et de groupe de torsion rationnel arbitraire parmi la liste des quinze groupes possibles, à savoir  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$  pour  $1 \leq l \leq 10$  ou  $l = 12$ , ou bien  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2l\mathbf{Z}$  pour  $1 \leq l \leq 4$ . Dans plusieurs travaux ([8], [13], [14], [21]), l'on construit des courbes elliptiques de rang élevé ayant un groupe de torsion non-réduit à l'élément neutre.

Considérons ici  $3 \leq l \leq 10$  ou  $l = 12$ , et soit  $E_{c,l}$  la famille de Kubert ([17]) des courbes elliptiques définies sur  $\mathbf{Q}$  munies d'un point rationnel  $A$  d'ordre  $l$  (dans le cas  $l = 3$ ,  $c$  désigne en réalité un couple de paramètres). En d'autres termes,  $(E_{c,l}, A)$  paramétrise les points rationnels sur  $\mathbf{Q}$  de la courbe modulaire  $X_1(l)$ , qui est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$  pour ces valeurs de  $l$  (elle est encore unicursale pour  $l = 1, 2$ , valeurs qui n'ont guère d'intérêt dans le cadre qui nous occupe). Avec ces notations, les travaux cités plus haut exhibent, via des paramétrisations ingénieuses de  $c$ , des familles explicites de courbes du type  $E_{c,l}$  de  $\mathbf{Q}$ -rang différent de 0. Les méthodes employées exploitent essentiellement le fait que le paramètre  $c$  intervient avec un degré relativement *petit* dans des équations bien choisies de  $E_{c,l}$ .

Si  $\langle A \rangle$  désigne le groupe engendré par  $A$ , notons  $F_{c,l}$  la courbe elliptique quotient  $E_{c,l}/\langle A \rangle$ , et  $\varphi_l$  l'isogénie de  $E_{c,l}$  sur  $F_{c,l}$ . On a ainsi la suite exacte suivante de  $G_{\mathbf{Q}}$ -modules galoisiens (où  $G_{\mathbf{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ ) :

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/l\mathbf{Z} \simeq \langle A \rangle \longrightarrow E_{c,l}(\overline{\mathbf{Q}}) \xrightarrow{\varphi_l} F_{c,l}(\overline{\mathbf{Q}}) \longrightarrow 1.$$

Connaissant une équation de  $E_{c,l}$  et les coordonnées de  $A$ , les formules de Vélou ([29]) permettent d'obtenir explicitement une équation de  $F_{c,l}$  et de  $\varphi_l$ .

---

**Mots clefs.** — Courbes modulaires, extensions diédrales, extensions cycliques, unités.

Bien évidemment, l'image par  $\varphi_l$  de points de  $E_{c,l}(\mathbf{Q})$  fournit des points de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$ , que nous appelons ici des points rationnels triviaux de la courbe elliptique quotient  $F_{c,l}$ .

Le problème, auquel nous nous intéressons dans la partie 2, consiste en la construction, via des paramétrisations convenables ou des spécialisations de  $c$ , d'éléments non-triviaux de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})/\varphi_l(E_{c,l}(\mathbf{Q}))$ , autrement dit, de points explicites de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  qui ne sont l'image par  $\varphi_l$  d'aucun élément de  $E_{c,l}(\mathbf{Q})$ . En général les représentants de ces points dans  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  sont d'ordre infini. Ceci dit, et bien que les courbes elliptiques  $E_{c,l}(\mathbf{Q})$  et  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  aient même rang, nous n'utilisons pas les constructions de [8], [13], [14], [21] qui ne fourniraient, dans notre terminologie, que des points triviaux de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$ , comme remarqué plus haut. Le problème traité ici devient rapidement délicat (au regard de  $l$ ), puisque le degré du paramètre  $c$  dans les équations de  $F_{c,l}$  est, comme nous le verrons en particulier dans les cas considérés, notablement plus élevé que dans les équations de  $E_{c,l}$ . Dans la partie 3, nous construisons, à partir de la donnée  $(E_{c,l}, A)$ , un polynôme  $P_{n,c,l} \in \mathbf{Z}[n, c][x]$ , pour lequel nous montrons que son corps de décomposition sur  $\mathbf{Q}(n, c)$  est génériquement le groupe diédral  $D_l$  à  $2l$  éléments. Dans la partie 4, nous considérons plus spécifiquement le cas  $l = 5$ , et montrons que notre construction permet de retrouver la famille générique de Brumer, qui est isomorphe à celle obtenue, indépendamment, par Darmon (voir les références données dans cette partie). Il est tentant de regarder sous quelles conditions sur les paramètres  $(n, c)$  le groupe de Galois de  $P_{n,c,l}$  sur  $\mathbf{Q}(n, c)$  devient isomorphe au groupe  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ . Dans la partie 5, nous montrons que ces conditions reviennent à la construction d'éléments non-triviaux de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})/\varphi_l(E_{c,l}(\mathbf{Q}))$ . Les résultats de la partie 2 permettent alors de construire explicitement de telles extensions cycliques. Nous retrouvons également les *simplest cubic fields* de Shanks et les *simplest quartic fields* de M.-N. Gras. Dans [22], nous étudierons des propriétés arithmétiques d'extensions construites ici.

Les calculs effectués pour cet article ont nécessité un usage très important des logiciels de calcul formel KANT ([5]), MAGMA ([2]), MAPLE ([23]) et PARI ([1]).

## 2. Points non-triviaux de courbes elliptiques quotient

Nous montrons ici le résultat suivant :

**Théorème 1.** — *Pour  $l = 3, 4, 5$  et 6, nous construisons explicitement, pour des paramétrisations convenables de  $c$ , des éléments non-triviaux de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})/\varphi_l(E_{c,l}(\mathbf{Q}))$ . Ces points sont en général d'ordre infini.*

Par un argument de cohomologie galoisienne classique, comme  $G_{\mathbf{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$  opère trivialement sur  $\langle A \rangle$ , on établit aisément le :

**Corollaire 1.** — *Pour  $l = 3, 4, 5$  et 6, et pour les paramétrisations de  $c$  du théorème précédent, le groupe de cohomologie  $H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) = \text{Hom}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$  est non réduit à 0.*

Bien entendu, la suite exacte longue en cohomologie se poursuivant, nous obtenons de la sorte plus précisément des éléments non-triviaux du noyau de l'application

$$H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) = \text{Hom}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(G_{\mathbf{Q}}, E_{c,l}(\overline{\mathbf{Q}})).$$

**2.1. Les cas  $l = 3$  et  $l = 5$ .** — Etant donné que notre stratégie est suffisamment générale, nous la développons pour  $l \geq 5$  impair, la détaillons sur le cas  $l = 5$ , et serons plus succints pour le cas  $l = 3$ . Nous indiquons dans une remarque les limites de notre approche. La différence de traitement du cas  $l = 3$  correspond essentiellement au fait que la famille des courbes elliptiques définies sur  $\mathbf{Q}$  munies d'un point d'ordre 3 est paramétrisée par deux paramètres, et non pas un, ce qui alourdit quelque peu les notations. Soit donc  $l \geq 5$  impair. Les formules de Vélou permettent d'obtenir une équation de  $F_{c,l}$  de la forme :

$$y^2 = f_{c,l}(x) = 4x^3 + \alpha_l(c)x^2 + \beta_l(c)x + \gamma_l(c),$$

où  $\alpha_l, \beta_l$  et  $\gamma_l$  sont les éléments de  $\mathbf{Z}[c]$  donnés dans le tableau suivant pour  $l = 5$  :

$\alpha_5(c)$	$c^2 - 30c + 1$
$\beta_5(c)$	$-2c(3c + 1)(4c - 7)$
$\gamma_5(c)$	$-c(4c^4 - 4c^3 - 40c^2 + 91c - 4)$

On cherche alors  $x_{c,l}$  sous la forme d'un polynôme en  $c$ , de petit degré, de sorte que l'on ait une identité :

$$f_{c,l}(x_{c,l}) = A_l(c)G_l^2(c),$$

où  $A_l, G_l$  sont des polynômes en  $c$  tels que le degré de  $A_l$  en  $c$  soit égal à 1 ou à 2. Pour réaliser cela, on calcule le discriminant par rapport à  $c$  de  $f_{c,l}(x_{c,l})$ , qui est un polynôme en les coefficients de  $c$  de  $x_{c,l}$ . Il s'agit alors de l'annuler. De tels  $x_{c,l}$ , et les  $G_l(c)$  et  $A_l(c)$  associés, sont donnés dans le tableau suivant pour  $l = 5$  :

$x_{c,5}$	$-(u_0 + 1)c^2 + (11u_0 + 8)c + u_0$
$G_5(c)$	$c^2 - 11c - 1$
$A_5(c)$	$-(4u_0 + 3)(u_0 + 1)^2c^2 + 2(2u_0 + 1)(11u_0^2 + 11u_0 + 2)c + u_0^2(4u_0 + 1)$

Il reste alors à paramétriser, à l'aide d'un choix approprié des paramètres restants la conique en  $(c, z)$  d'équation :

$$A_l(c) = z^2.$$

Cas  $l = 5$  : Comme nous l'avons souligné plus haut, le degré en  $c$  de  $A_5(c)$  est  $\leq 2$ . Par conséquent, plusieurs cas se présentent, selon que l'on choisisse le degré en  $c$  de  $A_5(c)$  égal à 1 ou à 2, et qui peuvent simplifier les calculs. Le tableau suivant résume les choix et calculs effectués. Les deux premières lignes correspondent à l'annulation du coefficient de degré 2 en  $c$  de  $A_5(c)$ , et la troisième assure que le point de coordonnées  $(c, z) = (0, u_0t)$  appartient à la conique d'équation  $A_5(c) = z^2$ .

$u_0 = -1$	$c = \frac{z^2 - 3}{4}$	$x_{c,5} = \frac{5 - 3z^2}{4}$
$u_0 = -\frac{3}{4}$	$c = 16z^2 + 18$	$x_{c,5} = -64z^4 - 148z^2 - \frac{345}{4}$
$u_0 = \frac{t^2 - 1}{4}$	$c = \frac{11t^6 + 33t^4 - 8mt^3 + 21t^2 + 8mt - 1}{t^6 + 8t^4 + 21t^2 + 16m^2 + 18}$	$x_{c,5} = -\frac{t^2 + 3}{4}c^2 + \frac{11t^2 + 21}{4}c + \frac{t^2 - 1}{4}$

Il découle de ce qui précède que, pour ces choix des paramètres, la courbe elliptique quotient  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  possède le point de coordonnées  $(x_{c,l}, zG_l(c))$ . Le calcul montre que le point ainsi construit est génériquement d'ordre infini. Le calcul montre également que ce point n'est génériquement pas l'image par l'isogénie  $\varphi_l$  d'un point rationnel de  $E_{c,l}$ . Cette dernière question sera considérée de nouveau dans la partie 5.

Cas  $l = 3$  : Les formules de Vélou permettent d'obtenir une équation de  $F_{a_1, a_3, l}$  de la forme :

$$y^2 = f_{a_1, a_3, 3}(x) = 4x^3 + a_1^2x^2 - 18a_1a_3x - a_3(4a_1^3 + 27a_3).$$

Si l'on choisit  $x_{a_1, a_3, 3} = u_1a_3 + \frac{a_1u_1 + 1}{u_1^2}$ , le calcul montre que

$$f_{a_1, a_3, 3}(x_{a_1, a_3, 3}) = A_3(a_1, a_3)G_3^2(a_1, a_3),$$

où  $A_3(a_1, a_3) = 4u_1^3a_3 + (u_1a_1 + 1)^2$  et  $G_3(a_1, a_3) = \frac{u_1^3a_3 - u_1a_1 - 2}{u_1^3}$ . L'équation  $A_l(c) = z^2$  est linéaire en  $a_3$ , et il suffit de prendre  $a_3 = \frac{z^2 - (u_1a_1 + 1)^2}{4u_1^3}$ . On obtient alors  $x_{a_1, a_3, 3} = \frac{z^2 - (a_1u_1 + 1)(a_1u_1 - 3)}{4u_1^2}$ , et l'on conclut comme dans le cas  $l = 5$ .

Remarque : Pour les autres valeurs impaires de  $l$ , la méthode décrite ici trouve ses limites essentiellement dans le calcul du discriminant de  $f_{c,l}(x_{c,l})$  par rapport à  $c$ . Les logiciels de calcul formel ne permettent pas de factoriser en toute généralité cette quantité. Cependant, on constate que celle-ci s'exprime comme un produit d'un *gros* facteur par un *petit* facteur, ce dernier intervenant à la puissance  $l$ . On peut, par spécialisation et interpolation, calculer explicitement ce petit facteur, du moins l'avons nous fait pour  $l = 7$ . Nous ne sommes en revanche malheureusement pas parvenus à l'annuler de manière utile dans le cadre que nous considérons ici.

**2.2. Les cas  $l = 4$  et  $l = 6$ .** — Dans le cas où  $l$  est pair, l'approche est légèrement différente. Cependant, là également, nous la décrivons pour  $l \geq 6$  pair, la détaillons sur le cas  $l = 6$ , et serons plus succints pour le cas  $l = 4$ .

Les formules de Vélou permettent de nouveau d'obtenir une équation de  $F_{c,l}$ , qui est de la forme :

$$y^2 = f_{c,l}(x) = (4x - \alpha_l(c))(x^2 + \beta_l(c)x + \gamma_l(c)),$$

où  $\alpha_l(c), \beta_l(c), \gamma_l(c)$  sont des éléments de  $\mathbf{Z}[c]$  donnés dans le tableau suivant pour  $l = 6$  :

$\alpha_6(c)$	$19c^2 + 14c - 1$
$\beta_6(c)$	$2c(2c + 1)$
$\gamma_6(c)$	$c(4c^3 + 4c^2 + c + 4)$

On cherche de nouveau  $x_{c,l}$  sous la forme d'un polynôme en  $c$  de sorte que l'on ait une identité

$$f_{c,l}(x_{c,l}) = A_l(c)G_l(c)^2,$$

où  $A_l$  est un polynôme en  $c$  de degré  $\leq 2$ . Mais pour cela, on exploite tout d'abord la factorisation de  $f_{c,l}(x)$ , en prenant  $x_{c,l} = \frac{\alpha_l(c) + u^2}{4}$ , ce qui assure que  $4x_{c,l} - \alpha_l(c) = u^2$ . Ensuite, on cherche  $u$  sous la forme d'un polynôme de degré petit en  $c$ , de sorte que  $x_{c,l}^2 + \beta_l(c)x_{c,l} + \gamma_l(c)$  admette de nouveau des facteurs carrés. En pratique, on prend  $u = v_1c + v_0$ , et l'on cherche à spécialiser les paramètres  $v_0, v_1$  pour avoir la factorisation  $f_{c,l}(x_{c,l}) = A_l(c)G_l(c)^2$  voulue. De tels  $x_{c,l}$ , et les  $G_l(c)$  et  $A_l(c)$  associés, sont donnés dans le tableau suivant pour  $l = 6$  :

$x_{c,6}$	$\frac{19c^2 + 14c - 1 + v_0^2(9c + 1)^2}{4}$
$G_6(c)$	$\frac{v_0(9c + 1)^2}{4}$
$A_6(c)$	$9(3v_0^2 + 1)^2c^2 + 2(3v_0^2 + 1)(3v_0^2 + 5)c + (v_0^2 - 1)^2$

Cas  $l = 6$  : La conique d'équation  $A_6(c) = z^2$  contient le point rationnel de coordonnées  $(c, z) = (0, v_0^2 - 1)$ , et donc se paramétrise, et l'on trouve finalement

$$c = 2 \frac{9v_0^4 + 18v_0^2 - v_0^2z + z + 5}{(z + 3 + 9v_0^2)(z - 3 - 9v_0^2)}.$$

On vérifie alors que le point de  $F_{c,6}$  d'abscisse  $x_{c,6}$  ainsi construit ne provient pas d'un point de  $E_{c,6}$  via l'isogénie  $\varphi_6$ .

Cas  $l = 4$  : Dans ce cas, les formules de Vélou donnent une équation de  $F_{4,c}$  de la forme :

$$y^2 = f_{c,4}(x) = (x + c)(4x^2 + x + c).$$

On choisit  $x_{c,4} = u^2 - c$ , si bien que

$$f_{c,4}(x_{c,4}) = u^2(4c^2 - 8u^2c + u^2(4u^2 + 1)).$$

La conique d'équation  $4c^2 - 8u^2c + u^2(4u^2 + 1) = z^2$  se paramétrise aisément, et l'on trouve

$$c = \frac{u^2(4u^2 + 1) - v^2}{4v + 8u^2}.$$

De même, on vérifie alors que le point de  $F_{c,4}$  d'abscisse  $x_{c,4}$  ainsi construit ne provient pas d'un point de  $E_{c,4}$  via l'isogénie  $\varphi_4$ .

### 3. Courbes elliptiques et polynômes à groupe de Galois diédral

Avec les notations de la partie précédente, soit  $P_{n,c,l}(x)$  le polynôme de  $\mathbf{Z}[n,c][x]$  défini par

$$P_{n,c,l}(x) = \prod_{i=0}^{l-1} (x - x(P + iA)) = x^l - nx^{l-1} + \dots,$$

où  $P$  désigne un point non  $\mathbf{Q}$ -rationnel de  $E_{c,l}$ ,  $A$  un point fixé d'ordre  $l$ , et  $x(P + iA)$  l'abscisse du point  $P + iA \in E_{c,l}$ . Les logiciels de calcul formel permettent d'obtenir l'équation explicite <sup>(1)</sup> de  $P_{n,c,l}(x) \in \mathbf{Z}[n,c][x]$ , et d'établir le résultat suivant :

**Théorème 2.** — *Soit  $l$  un entier tel que  $3 \leq l \leq 10$  ou  $l = 12$ . Le polynôme  $P_{n,c,l}$  construit ci-dessus est génériquement irréductible sur le corps  $\mathbf{Q}(n,c)$ , et le groupe de Galois sur  $\mathbf{Q}(n,c)$  de son corps de décomposition est génériquement le groupe diédral  $D_l$  à  $2l$  éléments.*

### 4. Le cas $D_5$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la construction de polynômes quintiques de groupe de Galois  $D_5$ . Ainsi Weber ([30], p. 676) et Cebotarev ([4], p. 344) donnent une condition nécessaire et suffisante, sous la forme d'une paramétrisation explicite des coefficients  $a$  et  $b$ , pour que  $x^5 + ax + b$  soit résoluble par radicaux. Une telle caractérisation, apparemment obtenue de manière indépendante, est également l'objet de l'article [28]. A partir de la caractérisation due à Weber et Cebotarev, Roland, Yui et Zagier ([25]) donnent la paramétrisation des polynômes quintiques  $x^5 + ax + b$  ayant  $D_5$  pour groupe de Galois. D'autres auteurs se sont intéressés à ces questions (sans prétendre en aucune manière à l'exclusivité, citons [12] pour les groupes  $D_p$ , où  $p$  est premier, et [9] pour une théorie sur les relations entre tours modulaires et groupes diédraux).

Dans le cas particulier  $l = 5$ , la construction décrite dans la partie 3 donne le polynôme

$$P_{n,c,5}(x) = x^5 - nx^4 - (-c^3 - 2nc + c^2 + c)x^3 - (c^3 + nc^2 - 3c^2)x^2 - (-c^4 + 3c^3)x + c^4.$$

La substitution  $(x, n, c) \rightarrow (\frac{s}{x}, -u, s)$  redonne la famille générique de Brumer ([3]) citée par Martinais et Schneps ([24], p. 151) :

$$B_{s,u}(x) = x^5 + (s - 3)x^4 + (u - s + 3)x^3 + (s^2 - s - 2u - 1)x^2 + ux + s.$$

Cette famille est générique dans le sens où Brumer ([24], p. 151) affirme que, si  $F$  est un corps contenant  $\mathbf{Q}$  et  $K$  est une extension galoisienne de  $F$  de groupe de Galois  $D_5$ , alors  $K$  est le corps de décomposition d'un polynôme de la forme  $B_{s,u}(x)$  pour des valeurs de  $s$  et  $u$  appartenant à  $F$ . Malheureusement, à l'heure actuelle, nous ne disposons pas de la preuve de ce fait. Par ailleurs, Kihel ([15], p. 471) rappelle la construction de Darmon ([6]) de la famille

$$D_{S,T}(x) = x^5 - Sx^4 + (T + S + 5)x^3 - (S^2 + S - 2T - 5)x^2 + (T + 2S + 5)x - (S + 3).$$

Cette famille est encore isomorphe à celle de Brumer, comme on le constate à l'aide de la transformation  $(x, s, u) \rightarrow (-x, S + 3, T + 2S + 5)$ . Les constructions de Brumer, de Darmon et celle présentée ici produisent donc la même famille de polynômes, obtenue de manière indépendante par les différents auteurs : nous avons découvert l'article [15] et l'existence des notes [6], dont l'original ne semble plus disponible [7] mais que l'article [15] décrit pour l'essentiel, après avoir démontré le théorème 2 en toute généralité, ce qui inclut en particulier le cas  $l = 5$ . Le cas  $l = 5$  est également repris dans [16]. Par ailleurs, nous n'avons malheureusement pas eu d'informations concrètes concernant la construction de Brumer et la preuve de son résultat de généralité, qui n'est explicite ni dans [24], ni dans [3]. La question d'étendre

<sup>(1)</sup>On peut récupérer les équations de  $P_{n,c,l}(x)$  sur <http://www.math.tu-berlin.de/~kant/publications/papers/polynomes.txt>

le résultat de Brumer aux autres cas, c'est-à-dire de décrire explicitement les extensions diédrales d'ordre  $2l$  de  $\mathbf{Q}$  reste donc *a priori* encore ouverte pour les cas  $l \neq 5$ .

### 5. Une application : construction de certaines extensions cycliques de $\mathbf{Q}$

Pour  $3 \leq l \leq 10$  ou  $l = 12$ , il paraît naturel de chercher, par spécialisation des paramètres dans  $P_{n,c,l}(x)$ , des familles ou des exemples de polynômes dont le groupe de Galois est isomorphe à  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ . Nous montrons ici les résultats suivants :

**Théorème 3.** — *Pour  $3 \leq l \leq 6$ , il existe une famille explicite de polynômes de degré  $l$ , définie sur  $\mathbf{Q}$ , à groupe de Galois cyclique d'ordre  $l$ . Ces familles sont indexées sur, d'une part, un paramètre rationnel, d'autre part, un point d'ordre infini d'une famille de courbes elliptiques.*

**Théorème 4.** — *Pour  $7 \leq l \leq 10$  et  $l = 12$ , il existe une famille explicite de polynômes de degré  $l$ , définie sur  $\mathbf{Q}$ , à groupe de Galois cyclique d'ordre  $l$ . Ces familles sont indexées par un point d'ordre infini sur une courbe elliptique définie sur  $\mathbf{Q}$ .*

La stratégie que nous adoptons est la suivante : sachant que le groupe de Galois de  $P_{n,c,l}$  est génériquement  $D_l$ , il existe un élément  $\mathfrak{D}_l$ , appelé fonction d'indicateur de l'extension, qui s'exprime a priori en fonction des racines de  $P_{n,c,l}$ , et qui satisfait une équation quadratique :

$$\mathfrak{D}_l^2 + U_l(n, c)\mathfrak{D}_l + V_l(n, c) = 0.$$

Le groupe de Galois de  $P_{n,c,l}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$  si et seulement si  $\mathfrak{D}_l$  est un rationnel, et si  $P_{n,c,l}$  est irréductible. La condition de rationalité de  $\mathfrak{D}_l$  équivaut précisément à trouver un élément de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$ . La condition d'irréductibilité de  $P_{n,c,l}$  équivaut à ce que cet élément de  $F_{c,l}(\mathbf{Q})$  ne soit l'image par  $\varphi_{c,l}$  d'aucun élément de  $E_{c,l}(\mathbf{Q})$ . Les résultats de la partie 2 permettent de conclure.

Cette approche est cohérente avec l'interprétation cohomologique donnée dans la partie 2. En effet, à un point fermé de  $\text{Hom}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{Z}/l\mathbf{Z})$  correspond une extension galoisienne de  $\mathbf{Q}$  à groupe de Galois  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ , du moins si  $l$  est premier, celle-ci s'obtenant comme la fibre de  $\varphi_l$ .

Il est à noter que plusieurs familles remarquables de polynômes existent fournissant des extensions cycliques de  $\mathbf{Q}$ . Les corps cubiques les plus simples ont ainsi été introduits par D. Shanks ([27]). E. Lehmer ([18]) a construit des corps quintiques cycliques simples, et M.-N. Gras des corps quartiques cycliques simples ([10]) et des corps sextiques cycliques simples ([11]). D'autres extensions cycliques de degré 6 et 10 ont été considérées par O. Lecacheux dans, respectivement, [19] et [20].

Notre construction permet de retrouver certaines de ces extensions *simples*. En effet, dans le cas  $l = 3$ , le corps engendré par  $P_{n,c,3}(x)$  l'est aussi (via des transformations élémentaires constituées de translation et homothétie) par  $\tilde{P}_{n,c,3}(x) = x^3 + ux^2 - nx + v$ . Il suffit alors de prendre  $(u, v, n) = (-t, -1, t + 3)$  pour retrouver la famille cubique cyclique

$$X^3 - tX^2 - (t + 3)X - 1$$

de Shanks. Dans le cas  $l = 4$ , on constate, à l'aide de transformations élémentaires (translation et homothétie) que le corps engendré par  $P_{n,c,4}(x)$  l'est aussi par  $\tilde{P}_{n,c,4}(x) = x^4 - 2x^3 + (1 - n)x^2 + nx - c$ . Le calcul montre, pour une spécialisation de  $(n, c) = (\frac{t^2+32}{2t^2}, \frac{3t^4-1024}{16t^4})$ , que

$$\text{Résultant}(\tilde{P}_{n,c,4}(x), X - (\frac{t}{2}x^2 - \frac{t^2+32}{8t}), x) = X^4 - tX^3 - 6X^2 + tX + 1,$$

et l'on retrouve ainsi la famille quartique cyclique de Gras.

## Références

- [1] *C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier* : User's guide to PARI-GP (version 1.39). Laboratoire A2X, Université de Bordeaux I, Bordeaux (1995)
- [2] *W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust* : The Magma algebra system. I : The user language. *J. Symb. Comput.* 24(3), 235-265 (1997)
- [3] *A. Brumer* : Communication personnelle (2001)
- [4] *N. Cebotarev* : Grundzüge der Galoisschen Theorie. Noordhoff, Groningen (1950)
- [5] *M. Daberkow, C. Fieker, J. Klüners, M. Pohst, K. Roegner, K. Wildanger* : KANT V4. *J. Symb. Comput.*, 24(3), 267-283 (1997)
- [6] *H. Darmon* : Une famille de polynômes liée à  $X_0(5)$ . Notes non publiées (1993)
- [7] *H. Darmon* : Communication personnelle (2002)
- [8] *S. Fermigier* : Exemples de courbes elliptiques de grand rang sur  $\mathbf{Q}(t)$  et sur  $\mathbf{Q}$  possédant des points d'ordre 2. *C. R. Acad. Sc. Paris* 322, Série I, p. 949-952 (1996)
- [9] *M. D. Fried* : Introduction to Modular Tower : Generalizing dihedral group-modular curve connections. Fried, Michael D. (ed.) et al., Recent developments in the inverse Galois problem. A joint summer research conference, July 17-23, 1993, University of Washington, Seattle, WA, USA. Providence, RI : American Mathematical Society. *Contemp. Math.* 186, 111-171 (1995)
- [10] *M.-N. Gras* : Table numérique du nombre de classes et des unités des extensions cycliques réelles de degré 4 sur  $\mathbf{Q}$ . *Publ. Math. Fac. Sci. Besançon* (Années 1977-78)
- [11] *M.-N. Gras* : Familles d'unités dans les extensions cycliques réelles de degré 6 sur  $\mathbf{Q}$ . *Publ. Math. Fac. Sci. Besançon*, Fasc. 2 (Années 1984-85-1985-86)
- [12] *Ch. U. Jensen, N. Yui* : Polynomials with  $D_p$  as Galois group. *Journal of Number Theory* 15, p. 347-375 (1982)
- [13] *S. Kihara* : On the rank of elliptic curves with a rational point of order 3. *Proc. Japan Acad.*, 76, Ser. 4, p. 126-127 (2000)
- [14] *S. Kihara* : On an elliptic curves over  $\mathbf{Q}(t)$  with a non-trivial 2-torsion point. *Proc. Japan Acad.*, 77, Ser. 4, p. 11-12 (2001)
- [15] *O. Kihel* : Groupe des unités pour des extensions diédrales complexes de degré 10 sur  $\mathbf{Q}$ . *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 13, p. 469-482 (2001)
- [16] *O. Kihel* : Extensions diédrales et courbes elliptiques. *Acta Arithmetica* 102.4, p. 309-314 (2002)
- [17] *D. S. Kubert* : Universal bounds on the torsion of elliptic curves. *Proc. Lond. Math. Soc.*, III. Ser. 33, 193-237 (1976)
- [18] *E. Lehmer* : Connection between Gaussian periods and cyclic units. *Math. Comp.* 50, p. 535-541 (1988)
- [19] *O. Lecacheux* : Unités d'une famille de corps cycliques réels de degré 6 liés à la courbe modulaire  $X_1(13)$ . *Journal of Number Theory*, Vol. 31, No. 1, p. 54-63 (1989)
- [20] *O. Lecacheux* : Unités d'une famille de corps liés à la courbe  $X_1(25)$ . *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, Vol. 40, 2, p. 237-254 (1990)
- [21] *O. Lecacheux* : Rang de courbes elliptiques sur  $\mathbf{Q}$  avec un groupe de torsion isomorphe à  $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ . *C. R. Acad. Sc. Paris* 332, Série I, p. 1-6 (2001)
- [22] *F. Leprévost, M. Pohst, A. Schöpp* : En préparation (2002)
- [23] <http://www.maplesoft.com>
- [24] *D. Martinais, L. Schneps* : Polynômes à groupe de Galois diédral. *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 4, p. 141-153 (1992)
- [25] *G. Roland, N. Yui, D. Zagier* : A parametric family of quintic polynomials with Galois group  $D_5$ . *Journal of Number Theory* 15, p. 137-142 (1982)
- [26] *R. Schoof, L. C. Washington* : Quintic polynomials and real cyclotomic fields with large class numbers. *Math. Comp.* 50, p. 543-556 (1988)

- [27] *D. Shanks* : The simplest cubic fields. *Math. Comp.* 28, p. 1137-1152 (1974)
- [28] *B. K. Spearman, K. S. Williams* : Characterization of solvable quintics  $x^5 + ax + b$ . *Am. Math. Mon.* 101, No. 10, p. 986-992 (1994)
- [29] *J. Vélu* : Isogénies entre courbes elliptiques. *C. R. Acad. Sc. Paris* 273, p. 238-241 (1971)
- [30] *H. Weber* : *Lehrbuch der Algebra*. Chelsea, New York

---

FRANCK LEPRÉVOST, Université Joseph Fourier, UFR de Mathématiques, 100, rue des Maths - B.P. 74 - F-38402 St-Martin d'Hères Cedex, France • *E-mail* : [Franck.Leprevost@ujf-grenoble.fr](mailto:Franck.Leprevost@ujf-grenoble.fr)

MICHAEL POHST, Technische Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik MA 8-1 - Straße des 17. Juni 136, D-10623 Berlin, Allemagne • *E-mail* : [pohst@math.tu-berlin.de](mailto:pohst@math.tu-berlin.de)

ANDREAS SCHÖPP, Technische Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik MA 8-1 - Straße des 17. Juni 136, D-10623 Berlin, Allemagne • *E-mail* : [schoepp@math.tu-berlin.de](mailto:schoepp@math.tu-berlin.de)