Sur la continuité dans L^1 d'une fonctionnelle non linéaire remarquable

Lucien Chevalier

Prépublication de l'Institut Fourier n° 581 (2003)
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/prepublications.html

Abstract : The well-known Calderón reproducing formula expresses a given function f defined in $\mathbb{R}^n$ in terms of the gradient of its harmonic extension, say $\nabla P(f)$, to the upper half-space. Since this formula has countless applications, it seems quite natural to seek for a more general one, expressing $\psi \circ f$ in terms of $\nabla P(f)$ (*not* in terms of $\nabla P(\psi \circ f)$, as the Calderón formula itself would do). An example of such an extension (in a particular case) can be found in [5], and examples of applications in the basic cases $\psi(t) = |t|$ and $\psi(t) = t^2$ can be found in [3], [5] and [6]. For reasonably regular ψ, expressing $\psi \circ f$ amounts to expressing $|f|$, which was accomplished (in the particular case alluded to above) in [3] and [5]. It turns out that the formula obtained has the form

$$|f| = \mathcal{L}(f) + D^0(f),$$

where $D^0(f)$ is (a variant of) the *density of the area integral* associated with f, introduced by R. F. Gundy in his 1983 paper [12]. The above "Tanaka formula" brings into light the new functional $\mathcal{L}$, that can be viewed as the counterpart in real analysis of the "Lévy transform" in martingale theory. It is easily seen that $D^0(f) = 0$ if f is nonnegative (or nonpositive), thus the $\mathcal{L}$ - functional acts as the identity when restricted to non-negative functions, in which case our identity reduces to a classical reproducing formula. As will be shown in this paper, the above formula holds in a strong (pointwise) sense if f is a nice function. For many function spaces E, the question of whether it holds for $f \in E$ is more or less equivalent to the problem of the continuity of $\mathcal{L}$ or D^0 on E. Consequently, continuity results concerning these functionals are not only of intrinsic interest. In some of our recent papers, we have proved that $\mathcal{L}$ is continuous on the Hardy space H^p for $p > n/(n+1)$, thus $\mathcal{L}$ and D^0 are continuous on L^p for $p > 1$ also. In the present paper, we will discuss the continuity on L^1. Two remarks are in order. First, since none of the two functionals under consideration is sublinear, continuity is by no means a consequence of boundedness (the boundedness of $\mathcal{L}$ or D^0 on L^1 was (rather easily) proved in [3] and [5]). Second, the methods we have used to obtain continuity results in H^p cannot work in the case of L^1.

Mots-clés : Identité de Calderón, formule de Tanaka, densité de l'intégrale d'aire, transformation de Lévy.

Classification : 42B25, 42B30, 60G46, 60J65.

1. — Introduction : de l'identité de Calderón à la transformation de Lévy

L'identité de Calderón à laquelle nous nous intéressons ici est une formule permettant de "reproduire" une fonction convenable f définie dans $\mathbb{R}^n$ à partir du gradient de son intégrale de Poisson $P(f)$. Il suffit pour cela de considérer une fonction (vectorielle) ϕ d'intégrale nulle et vérifiant de plus certaines conditions techniques peu contraignantes pour obtenir une égalité de la forme

$$f = \int_0^{+\infty} \nabla P(f)(\cdot,y) * \phi_y \, dy \,, \tag{1}$$

en un sens d'autant plus fort que la fonction f est plus régulière. Il existe de nombreux exemples de telles fonctions ϕ, et des formules du type (1) ont été abondamment utilisées en analyse [1].

Il est naturel de s'intéresser plus généralement à des identités fournissant une expression de $\psi \circ f$ au moyen d'intégrales mettant en jeu le gradient de $P(f)$, où ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on trouvera des exemples d'applications d'une telle identité dans [3], [5] ou [6]). Si on se limite à des fonctions ψ dont la dérivée seconde au sens des distributions est une mesure raisonnable, des arguments standards (voir la preuve du théorème 2 de [5]) permettent de se ramener au cas où $\psi(t) = |t|$, qu'il est donc fondamental de savoir traiter. Dans ce cas, nous verrons que l'égalité obtenue prend la forme (dans laquelle la fonction scalaire φ est positive, d'intégrale 1, et la fonction vectorielle ϕ est convenablement définie en fonction de φ)

$$|f| = \mathcal{L}_\phi(f) + D^0_\varphi(f) \,, \tag{2}$$

où

$$\mathcal{L}_\phi(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} (\operatorname{sgn}(P(f))\nabla P(f))(\cdot,y) * \phi_y(\xi) \, dy \tag{3}$$

et

$$D^0_\varphi(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} y\varphi_y(x-\xi)\Delta|P(f)|(dx\, dy) \tag{4}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Une égalité du type (2) a été obtenue et exploitée dans [3] et [4], et nous montrerons plus loin comment on peut en obtenir d'autres, dans un contexte sensiblement différent.

Pour obtenir l'expression de $|f|$, il suffit donc de remplacer $P(f)$ par $|P(f)|$ dans l'identité de Calderón relative à f (ce qui revient à remplacer $\nabla P(f)$ par $\operatorname{sgn}(P(f))\nabla P(f)$), à condition d'ajouter le terme correctif $D^0_\varphi(f)$. Cette correction n'intervient que si elle est nécessaire, car la fonction $D^0_\varphi(f)$ est identiquement nulle si f est à valeurs ≥ 0 (auquel cas la formule (2) redonne une identité

1. On pourra trouver au § 1 de [11] un petit historique sur ce sujet.

de Calderón). Ce mécanisme est analogue à celui (connu depuis longtemps) qui fonctionne en calcul stochastique. Dans un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant des conditions appropriées, toute variable aléatoire X (de moyenne nulle pour simplifier) s'écrit comme l'intégrale stochastique

$$X = \int_0^{+\infty} dX_s \ ,$$

où (X_s) est la martingale associée à X (par les égalités $X_s = E(X/\mathcal{F}_s)$). Ceci constitue l'analogue (trivial dans le cadre probabiliste) de l'identité de Calderón. Si, dans l'égalité ci-dessus, on remplace dX_s par $\operatorname{sgn}(X_s)dX_s$, on obtient effectivement $|X|$, à condition d'ajouter aussi un terme correctif, qui est la variable terminale $L^0_\infty(X)$ du temps local en 0 de la martingale associée à X. L'égalité ainsi obtenue, i. e.

$$|X| = \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(X_s)dX_s + L^0_\infty(X)$$

est une conséquence de la classique "formule de Tanaka". C'est en fait pour disposer en analyse d'une notion analogue à celle de temps local en probabilités que R. F. Gundy a introduit ([12]) les fonctionnelles de la forme D^0_φ, qui ont depuis été étudiées par plusieurs auteurs.

En raison de ces analogies, nous appelons *formule de Tanaka* toute égalité de la forme (2). Une telle formule met en lumière un nouvel objet d'étude, la *transformation de Lévy* $\mathcal{L}_\phi$ (associée à ϕ). Contrairement à l'application $t \mapsto |t|$, aucune des fonctionnelles D^0_φ et $\mathcal{L}_\phi$ n'est sous-linéaire, ce qui rend leur étude plus difficile (donc aussi plus intéressante). En particulier, alors que la bornitude de ces fonctionnelles dans L^1 n'est pas très difficile à obtenir, la question de leur continuité dans cet espace est un problème ouvert. Le but principal de cet article est de prouver que, dans le cas où la fonction φ est à support compact et suffisamment régulière, ces fonctionnelles sont continues comme applications de L^1 dans l'espace L^1 faible.

2. — Énoncé des résultats principaux

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'introduire quelques notations et de donner des définitions précises.

On désigne par n un entier ≥ 1, fixé une fois pour toutes, et par $\mathbb{R}^{n+1}_+$ le demi-espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Le point courant de $\mathbb{R}^{n+1}_+$ est généralement noté $z = (x,y)$.

Les espaces L^p considérés sont relatifs à la mesure de Lebesgue m dans $\mathbb{R}^n$, et la norme usuelle dans L^p est notée $\| \cdot \|_p$.

Pour tout point $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note p_ξ le noyau de Poisson relatif au point ξ, défini dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$p_\xi(z) = \frac{c_n y}{(|x-\xi|^2 + y^2)^{(n+1)/2}},$$

où c_n désigne la constante de normalisation habituelle.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(0,1)|f(\xi)|\,d\xi < +\infty.$$

À toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on peut associer son intégrale de Poisson $P(f)$, définie dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$P(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(z) f(\xi)\,d\xi.$$

La fonction $|P(f)|$ étant sous-harmonique, son laplacien au sens des distributions est une mesure positive, et par suite l'intégrale par rapport à cette mesure de toute fonction mesurable à valeurs ≥ 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ est bien définie. Étant donné une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mesurable et à valeurs ≥ 0, on peut donc définir la fonction $D^0_\varphi(f)$ (à valeurs éventuellement infinies) par l'égalité (4) (dans laquelle on a posé, comme c'est l'usage, $\varphi_y(x) = y^{-n}\varphi(x/y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$).

Par exemple, si on prend

$$\varphi(\xi) = \frac{c_n}{(|\xi|^2+1)^{(n+1)/2}}\,,$$

on obtient

$$D^0_\varphi(f)(\xi) = D^0_*(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y p_\xi(z)\Delta|P(f)(z)|(dz)\,,$$

où la fonctionnelle D^0_* est celle qui a été étudiée dans [3], [4] et [7]. Dans ce qui suit, nous considèrerons uniquement le cas où la fonction φ est *bornée et à support compact*. Dans ce cas on a évidemment $D^0_\varphi(f) \leq C(\varphi)D^0_*(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{M}$, où $C(\varphi)$ est une constante qui ne dépend que de φ. Par suite, toute estimation de taille concernant la fonctionnelle D^0_* en donne automatiquement une concernant D^0_φ. On a en particulier, comme conséquence du théorème 1 de [7],

$$\|D^0_\varphi(f)\|_p \leq C(\varphi)p\|f\|_p \tag{5}$$

pour tout $p \geq 1$ et toute fonction $f \in L^p$, ce qui prouve notamment que $D^0_\varphi(f)$ est finie presque partout si $f \in \bigcup_{1\leq p<+\infty} L^p$. De plus, nous avons prouvé précédemment ([3], [7]) que la fonctionnelle D^0_* est continue dans L^p pour $1 < p < +\infty$, et la preuve donnée dans [7] passe sans difficulté aux fonctionnelles D^0_φ, à condition que φ soit à support compact et suffisamment régulière. Ceci explique pourquoi notre intérêt s'est porté sur le cas de L^1, ce qui nous a conduit à prouver le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de cet article (dans lequel $\mathcal{D}$ désigne l'espace $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, suivant la notation usuelle) :

THÉORÈME 1. — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, radiale, à valeurs ≥ 0, à support inclus dans la boule unité. Il existe une constante $C(n,\varphi)$*

telle que, pour tout couple (f,g)*, d'éléments de* $\mathcal{D}$*, on ait, pour tout* $\lambda > 0$,

$$m(|D^0_\varphi(f) - D^0_\varphi(g)| > \lambda) \leq \frac{C(n,\varphi)}{\lambda}\|f-g\|_1^{1/2}(\|f\|_1 + \|g\|_1)^{1/2} \,. \tag{6}$$

Bien que le résultat de bornitude dans L^1 de la fonctionnelle D^0_* (donc aussi celui concernant les fonctionnelles D^0_φ) soit facile à établir *directement* ([3], proposition 2), nous ne savons pas établir le théorème précédent sans utiliser un résultat analogue relatif aux fonctionnelles “sœurs” $\mathcal{L}_\phi$ et une égalité de la forme (2). Nous devrons donc prouver le

Théorème 2. — *Soit* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *une fonction bornée, à support inclus dans la boule unité et vérifiant les conditions suivantes :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 0 \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+\xi) - \phi(x)|\, dx \leq c|\xi|^\alpha \tag{8}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$*, où* c *et* α *sont des constantes* > 0.

Il existe alors une constante $C(n,\phi)$ *telle que, pour tout couple* (f,g)*, d'éléments de* $\mathcal{D}$*, on ait, pour tout* $\lambda > 0$,

$$m(|\mathcal{L}_\phi(f) - \mathcal{L}_\phi(g)| > \lambda) \leq \frac{C(n,\phi)}{\lambda}\|f-g\|_1^{1/2}(\|f\|_1 + \|g\|_1)^{1/2} \,. \tag{9}$$

Nous déduirons ensuite le théorème 1 du théorème 2 au moyen du

Théorème 3. — *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^2$*, à valeurs* ≥ 0*, à support inclus dans la boule unité, et soit* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *définie par les égalités :*

$$\phi = \left(\phi^1, \cdots, \phi^{n+1}\right) \,, \tag{10}$$

où

$$\phi^i(x) = x_i\varphi(x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \tag{11}$$

pour $1 \leq i \leq n$ *et*

$$\phi^{n+1}(x) = -n\varphi(x) - x\nabla\varphi(x) \tag{12}$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les fonctionnelles $\mathcal{L}_\phi$ *et* D^0_φ*, définies par les égalités* (3) *et* (4) *respectivement réalisent l'identité* (2). *Plus précisément, pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}$ *et tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, les intégrales définissant* $\mathcal{L}_\phi(f)(\xi)$ *et* $D^0_\varphi(f)(\xi)$ *sont absolument convergentes, et on a l'égalité*

$$|f(\xi)| = \mathcal{L}_\phi(f)(\xi) + D^0_\varphi(f)(\xi) \,. \tag{13}$$

3. — Preuve des résultats principaux

Preuve du théorème 1:

Comme la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact, toutes ses dérivées partielles d'ordre ≤ 2 sont bornées, ce qui implique immédiatement que la fonction ϕ associée au moyen des formules (10) à (12) vérifie la condition (8) du théorème 2. De plus, pour $1 \le i \le n$, la fonction ϕ^i est d'intégrale nulle parce que φ est radiale, et ϕ^{n+1} est aussi d'intégrale nulle parce que $\phi^{n+1}(x) = -\mathrm{div}(x\varphi(x))$ et que φ est à support compact. Le théorème 2 est ainsi applicable à la fonction ϕ associée à φ, et par suite il nous suffit de prouver les théorèmes 2 et 3, qui impliquent clairement le théorème 1.

Preuve du théorème 2:

Rappelons que, étant donné une fonction $f \in \mathcal{M}$, son intégrale d'aire de Lusin-Calderón $A(f)$, sa fonction maximale non tangentielle $N(f)$ et sa densité maximale de l'intégrale d'aire $D(f)$ sont définies dans $\mathbb{R}^n$ par les égalités

$$A(f)(\xi) = \left(\int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n} |\nabla P(f)(z)|^2 \, dz \right)^{1/2} ,$$

$$N(f)(\xi) = \sup_{|x-\xi|<y} |P(f)(z)|$$

et

$$D(f)(\xi) = \sup_{r \in \mathbb{R}} D_\rho(f-r)(\xi) ,$$

avec $\rho = b_n^{-1} \mathbf{1}_{B_n}$, où B_n désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $b_n = m(B_n)$ son volume.

Nous posons $T = A + N + D$, et nous commençons par déduire le théorème 2 des résultats suivants :

Lemme 1. — *Soient u et v deux fonctions mesurables à valeurs ≥ 0, et C un nombre vérifiant, pour tout $\lambda > 0$,*

$$m(u > \lambda) \le \frac{C}{\lambda} \|v\|_1 .$$

On a alors, pour tout $\lambda > 0$ et tout $p > 1$,

$$\frac{1}{\lambda^p} \int_{\{u \le \lambda\}} u^p(x) \, dx \le \frac{Cp}{p-1} \frac{\|v\|_1}{\lambda} .$$

Lemme 2. — *L'opérateur $T = A + N + D$ précédemment défini est de type faible $1-1$, i. e. il existe un nombre $C(n)$ tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout $\lambda > 0$, on ait*

$$m(T(f) > \lambda) \le \frac{C(n)}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Lemme 3. — *Sous les hypothèses et avec les notations du théorème 2, il existe une constante $C(n,\phi)$ telle que, pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{D}$, tout $\lambda > 0$, et tout $c > 0$, on ait*

$$m(|\mathcal{L}_\phi(f) - \mathcal{L}_\phi(g)| > \lambda) \leq C(n,\phi)(A(\lambda,c) + B(\lambda,c)) \tag{14}$$

où

$$A(\lambda,c) = m(T(f-g) > c\lambda) + m(T(f) + T(g) > \lambda/c)$$

et

$$B(\lambda,c) = \frac{1}{\lambda^2}\left(\int_{\{T(f-g)\leq c\lambda\}} (T(f-g)(\xi))^2\, d\xi\right)^{1/2} \times \left(\int_{\{T(f)+T(g)\leq \lambda/c\}} (T(f)(\xi) + T(g)(\xi))^2\, d\xi\right)^{1/2} .$$

Soient f et $g \in \mathcal{D}$, et soit $\lambda > 0$. Pour établir l'estimation (9) il suffit, d'après le lemme 3 (dont nous reprenons les notations) de montrer qu'on a, pour un bon choix du nombre c,

$$A(\lambda,c) + B(\lambda,c)) \leq \frac{C(n,\phi)}{\lambda}\|f-g\|_1^{1/2}(\|f\|_1 + \|g\|_1)^{1/2} . \tag{15}$$

Nous noterons $C(\cdot)$ une constante dépendant uniquement des paramètres entre parenthèses, mais dont la valeur peut varier d'une ligne à l'autre.

D'après le lemme 2, on a

$$A(\lambda,c) \leq \frac{C(n)}{\lambda}\left(\frac{1}{c}\|f-g\|_1 + c(\|f\|_1 + \|g\|_1)\right) . \tag{16}$$

D'autre part, il résulte des lemmes 1 et 2 que

$$B(\lambda,c)) \leq \frac{C(n)}{\lambda}\|f-g\|_1^{1/2}(\|f\|_1 + \|g\|_1)^{1/2} . \tag{17}$$

Il suffit donc de minimiser le second membre de l'inégalité (16) en prenant

$$c = \frac{(\|f-g\|_1)^{1/2}}{(\|f|_1 + \|g\|_1)^{1/2}}$$

pour obtenir l'estimation (15) à partir de (16) et (17).

Il nous reste donc à établir les trois lemmes. La preuve du premier est immédiate. En effet,

$$\int_{\{u\leq\lambda\}} u^p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} m\left(u^p \mathbf{1}_{\{u\leq\lambda\}} > \mu\right)\, d\mu \leq \int_0^{\lambda^p} m\left(u > \mu^{1/p}\right)\, d\mu$$

$$\leq C\|v\|_1 \int_0^{\lambda^p} \mu^{-1/p}\, d\mu = \frac{Cp\|v\|_1}{p-1}\lambda^{p-1}\ .$$

Notre second lemme se déduit facilement de résultats connus. En premier lieu, le fait que les fonctions maximales non tangentielles soient de type faible $1-1$ est trop connu pour justifier une explication. Le fait que la fonctionnelle A possède aussi cette propriété est également classique ; cela résulte, par exemple, de l'estimation ([15], p. 127)

$$m(A(f)>\lambda) \leq C(n,a)\left(\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{N_a(f)\leq\lambda\}} (N_a(f)(\xi))^2\, d\xi + m(N_a(f)>\lambda)\right)\ ,$$

où $a>1$, du lemme 1 et du fait que N_a est de type faible $1-1$ pour tout $a>0$. Enfin, la fonctionnelle D est aussi de type faible $1-1$, comme conséquence des mêmes arguments et de l'inégalité ([13], p.227)

$$m(D(f)>\lambda) \leq C(n,a)\left(\frac{1}{\lambda^p}\int_{\{N_a(f)\leq\lambda\}} (N_a(f)(\xi))^p\, d\xi + m(N_a(f)>\lambda)\right)\ ,$$

pour $p>2$ et $a>1$.

Le point crucial est donc le lemme 3, que nous allons démontrer maintenant. Notre méthode est partiellement basée sur une adaptation d'une technique introduite par Ch. Fefferman dans [10].

Ayant fixé tous les paramètres, nous introduisons l'ensemble

$$E = \left\{T(f-g)\leq c\lambda\ ;\ T(f)+T(g)\leq \frac{\lambda}{c}\right\}$$

et la fonction e définie par

$$e(z) = \mathbf{1}_E * \rho_y(x)$$

pour tout $z=(x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$ (rappelons que ρ est la fonction indicatrice normalisée de la boule unité de $\mathbb{R}^n$). Nous notons F l'ensemble des points $\xi\in\mathbb{R}^n$ tels que

$$\sup_{|x-\xi|<y}(1-e(z)) \leq \frac{1}{2}\ .$$

On a évidemment

$$m(|\mathcal{L}_\phi(f)-\mathcal{L}_\phi(g)|>\lambda) \leq m(|\mathcal{L}_\phi(f)-\mathcal{L}_\phi(g)|>\lambda\ ;\ F) + m(F^c)\ . \tag{18}$$

D'autre part, comme $\sup_{|x-\xi|<y}(1-e(z)) = M(\mathbf{1}-\mathbf{1}_E)(\xi)$, où M désigne l'opérateur maximal "non centré" de Hardy-Littlewood, on a

$$m(F^c) \leq C(n)m(E^c) \leq C(n)A(\lambda,c)\ . \tag{19}$$

Compte tenu de l'inégalité (18), il nous reste donc à prouver maintenant que

$$m(|\mathcal{L}_\phi(f)-\mathcal{L}_\phi(g)|>\lambda\ ;\ F) \leq B(\lambda,c)\ . \tag{20}$$

Nous introduisons dans ce but la fonction h définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$h(\xi) = \int_{\{e(z)\geq 1/2\}} (\mathrm{sgn}(P(f)\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g))(z)\phi_y(x-\xi)\, dz\ .$$

Compte tenu de la définition de F, et du fait que le support de la fonction ϕ est inclus dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{L}_\phi(f) - \mathcal{L}_\phi(g) = h$ sur l'ensemble F, et par suite

$$m(|\mathcal{L}_\phi(f) - \mathcal{L}_\phi(g)| > \lambda\ ;\ F) = m(|h| > \lambda\ ;\ F) \leq \frac{1}{\lambda^2}\|h\|_2^2\ .$$

Par conséquent, il suffit pour obtenir (20) de prouver que

$$\|h\|_2^2 \leq C(n,\phi)\lambda^2 B(\lambda,c)\ . \tag{21}$$

Pour cela, nous évaluons cette norme par dualité. Étant donné une fonction $k \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)k(x)\, dx$$
$$= \int_{\{e(z)\geq 1/2\}} (\mathrm{sgn}(P(f))\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g))(z)\Phi_y(k)(x)\, dz\ ,$$

où $\Phi_y(k) = k * \check{\phi}_y$. Par conséquent,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)k(x)\, dx\right| \leq \|g_{\check{\phi}}(k)\|_2$$
$$\times \left(\int_{\{e(z)\geq 1/2\}} y|\mathrm{sgn}(P(f))\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g)|^2(z)\, dz\right)^{1/2}\ , \tag{22}$$

où

$$g_{\check{\phi}}(k)(x) = \left(\int_0^{+\infty} |\Phi_y(k)(x)|^2 \frac{dy}{y}\right)^{1/2}\ .$$

La fonction $g_{\check{\phi}}(k)$ est la fonction g de Littlewood-Paley associée à la fonction k au moyen de $\check{\phi}$. Comme la fonction $\check{\phi}$ vérifie aussi les hypothèses du théorème 2, il est classique que $\|g_{\check{\phi}}(k)\|_2 \leq C(n,\phi)\|k\|_2$. Par suite, on déduit de (22) que

$$\|h\|_2^2 \leq C(n,\phi)\int_{\{e(z)\geq 1/2\}} y|\mathrm{sgn}(P(f))\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g)|^2(z)\, dz\ . \tag{23}$$

D'autre part, $\mathbf{1}_{\{e(z)\geq 1/2\}} \leq 2e(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, et par suite on obtient, en utilisant une fois de plus le théorème de Fubini,

$$\int_{\{e(z)\geq 1/2\}} y|\mathrm{sgn}(P(f))\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g)|^2(z)\, dz$$

$$\leq 2 \int_E U^2(f,g)(\xi)\, d\xi \,, \tag{24}$$

où

$$U^2(f,g)(\xi) = \int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n} |\mathrm{sgn}(P(f))\nabla P(f) - \mathrm{sgn}(P(g))\nabla P(g)|^2(z)\, dz \,.$$

On a évidemment

$$U^2(f,g) \leq 2(A^2(f-g) + V^2(f,g)) \,, \tag{25}$$

où

$$V^2(f,g)(\xi) = \int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n} (\mathrm{sgn}(P(f)(z)) - \mathrm{sgn}(P(g)(z))^2 |\nabla P(g)(z)|^2\, dz \,.$$

Nous reprenons maintenant, en l'adaptant à notre contexte, un argument de M. T. Barlow et M. Yor ([2]). Nous avons

$$|\mathrm{sgn}(P(f)(z)) - \mathrm{sgn}(P(g)(z))| \leq 2 \times \mathbf{1}_{\{|P(g)(z)| \leq |P(g)(z) - P(f)(z)|\}}$$

et

$$|P(g)(z) - P(f)(z)| \leq N(f-g)(\xi)$$

si $|x - \xi| < y$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V^2(f,g)(\xi) &\leq 4 \int_{\{|x-\xi|<y\}} y^{1-n} \mathbf{1}_{\{|P(g)(z)| \leq N(f-g)(\xi)\}} |\nabla P(g)(z)|^2\, dz \\ &= \int_{-N(f-g)(\xi)}^{N(f-g)(\xi)} D_\rho(g-r)\, dr \,, \end{aligned}$$

d'après la formule de densité ([13], p. 217). Il en résulte que

$$V^2(f,g) \leq 8N(f-g)D(g) \,. \tag{26}$$

On déduit de (25) et (26) que

$$U^2(f,g) \leq 18\, T(f-g)(T(f) + T(g)) \,,$$

ce qui implique, grâce à (23) et (24), que

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &\leq C(n,\phi) \int_E T(f-g)(z)(T(f)(z) + T(g)(z))\, dz \\ &\leq C(n,\phi)\lambda^2 B(\lambda,c) \,. \end{aligned}$$

On a donc prouvé l'inégalité (21), ce qui achève la démonstration du lemme 3, donc aussi celle du théorème 2.

Remarque. — Si la fonction ϕ est obtenue par le procédé défini par les égalités (10), (11) et (12), la fonctionnelle $\mathcal{L}_\phi$ est bornée dans L^1. Une question naturelle est donc la suivante : la propriété plus forte

$$\|\mathcal{L}_\phi(f)-\mathcal{L}_\phi(g)\|_1 \leq \frac{C(n,\phi)}{\lambda}\|f-g\|_1^{1/2}(\|f\|_1+\|g\|_1)^{1/2}$$

est-elle vraie ?

Preuve du théorème 3 :

Essentiellement, elle consiste à effectuer quelques passages à la limite dans l'égalité fournie par le résultat suivant. Diverses variantes de cette égalité ont déjà fait leur apparition dans la littérature consacrée à la densité de l'intégrale d'aire, notamment dans [13] et [1]. Sous la forme qui suit, elle se trouve dans [14] :

LEMME 4. — *Soient a et b deux nombres tels que $0<a<b$ et v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$, à support inclus dans $\mathbb{R}^n\times[a,b]$. Nous conservons les hypothèses et les notations du théorème 3, et nous posons $\psi(x)=(-x,1)\varphi(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Nous avons alors, pour toute fonction $f\in\mathcal{D}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^n$, l'égalité*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}&|P(f)(z)|\nabla v(z)\psi_y(x-\xi)\,dz\\ &=\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}v(z)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)\,dz\\ &\qquad+\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}yv(z)\varphi_y(x-\xi)\Delta|P(f)|(dz)\\ &+\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}y\varphi_y(x-\xi)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\nabla v(z)\,dz\,. \end{aligned}\tag{27}$$

Schématiquement, la preuve de l'égalité (13) consiste maintenant à remplacer, dans la formule précédente, la fonction v par l'indicatrice du demi-espace $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Comme cela ne peut se faire sans quelques précautions, nous procédons de la manière suivante : à tout triplet (a,ε,j), où a est un nombre vérifiant $0<a<1/2$, ε un nombre vérifiant $0<\varepsilon<a/2$ et j un entier ≥ 1, nous associons une application $\delta_{a,\varepsilon,j}:[0,+\infty[\to[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant $\delta_{a,\varepsilon,j}(t)=0$ si $t\leq a$, $\delta_{a,\varepsilon,j}(t)=1$ si $a+\varepsilon\leq t\leq j-\varepsilon$ et $\delta_{a,\varepsilon,j}(t)=0$ si $t\geq j$. De plus, on fait en sorte que $\delta_{a,\varepsilon,j}$ soit croissante sur $[a,a+\varepsilon]$ et que

$$K(a,\varepsilon)=\sup_{t\geq 0;j\geq 1}\delta'_{a,\varepsilon,j}(t)<+\infty$$

pour tout les couples (a,ε) considérés. Il est clair que le lemme 4 est applicable à la fonction v définie par $v(z)=\delta_{a,\varepsilon,j}(y)$, ce qui nous donne l'égalité

$$I_1(a,\varepsilon,j)=\int_{\{a\leq y\leq a+\varepsilon\}\cup\{j-\varepsilon\leq y\leq j\}}|P(f)(z)|\delta'_{a,\varepsilon,j}(y)\varphi_y(x-\xi)\,dz$$

$$= I_2(a,\varepsilon,j) + I_3(a,\varepsilon,j) + I_4(a,\varepsilon,j)\ , \tag{28}$$

où

$$I_2(a,\varepsilon,j) = \int_{\{a\le y\le j\}} \delta_{a,\varepsilon,j}(y)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)\,dz\ ,$$

$$I_3(a,\varepsilon,j) = \int_{\{a\le y\le j\}} y\delta_{a,\varepsilon,j}(y)\varphi_y(x-\xi)\Delta|P(f)|(dz)$$

et

$$I_4(a,\varepsilon,j) = \int_{\{a\le y\le a+\varepsilon\}\cup\{j-\varepsilon\le y\le j\}} y\varphi_y(x-\xi)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\frac{\partial P(f)}{\partial y}(z)\delta'_{a,\varepsilon,j}(y)\,dz\,.$$

Les nombres a et ε étant fixés, on commence par faire tendre j vers l'infini. On a $|P(f)(z)| \le C(n)\|f\|_1 y^{-n}$, et par suite

$$\left|\int_{\{j-\varepsilon\le y\le j\}} |P(f)(z)|\delta'_{a,\varepsilon,j}(y)\varphi_y(x-\xi)\,dz\right| \le \frac{C(n)K(a,\varepsilon)\|f\|_1}{(j-\varepsilon)^n}\ ,$$

ce qui prouve que

$$I_1(a,\varepsilon,j) \longrightarrow I_1(a,\varepsilon) = \int_{\{a\le y\le a+\varepsilon\}} |P(f)(z)|\delta'_{a,\varepsilon}(y)\varphi_y(x-\xi)\,dz$$

lorsque $j\to+\infty$, où

$$\delta_{a,\varepsilon}(y) = \lim_{j\to+\infty}\delta_{a,\varepsilon,j}(y)\ .$$

En utilisant l'estimation $|\nabla P(f)(z)| \le C(n)\|f\|_1 y^{-n-1}$, on vérifie de même que

$$I_4(a,\varepsilon,j) \longrightarrow I_4(a,\varepsilon) = \int_{\{a\le y\le a+\varepsilon\}} y\varphi_y(x-\xi)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\frac{\partial P(f)}{\partial y}(z)\delta'_{a,\varepsilon}(y)\,dz$$

lorsque $j\to+\infty$. D'autre part, comme

$$\int_{\{y\ge a\}} |\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)|\,dz \le C(n)\|f\|_1\|\phi\|_1\int_a^{+\infty}\frac{dy}{y^{n+1}} < +\infty\ ,$$

le théorème de convergence dominée montre que

$$I_2(a,\varepsilon,j) \longrightarrow I_2(a,\varepsilon) = \int_{\{a\le y\}} \delta_{a,\varepsilon}(y)\mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)\,dz$$

lorsque $j\to+\infty$. Enfin, le théorème de convergence monotone prouve que

$$I_3(a,\varepsilon,j) \longrightarrow I_3(a,\varepsilon) = \int_{\{a\le y\}} \delta_{a,\varepsilon}(y)\varphi_y(x-\xi)\Delta|P(f)|(dz)$$

lorsque $j\to+\infty$. On a donc obtenu

$$I_1(a,\varepsilon) = I_2(a,\varepsilon) + I_3(a,\varepsilon) + I_4(a,\varepsilon)\ , \tag{29}$$

et nous allons maintenant faire tendre ε vers 0 dans cette égalité. Les arguments précédents montrent que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$I_2(a,\varepsilon) \longrightarrow I_2(a) = \int_{\{a\leq y\}} \mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)\,dz$$

et

$$I_3(a,\varepsilon) \longrightarrow I_3(a) = \int_{\{a\leq y\}} \varphi_y(x-\xi)\Delta|P(f)|(dz)\,.$$

D'autre part, nous avons $I_1(a,\varepsilon) = I_1'(a,\varepsilon) + I_1''(a,\varepsilon)$, où

$$I_1'(a,\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} |P(f)(x,a)|A_\varepsilon(x)\,dx\,, \quad \text{avec} \quad A_\varepsilon(x) = \int_a^{a+\varepsilon} \delta_{a,\varepsilon}(y)\varphi_y(x-\xi)\,dy\,,$$

et

$$I_1''(a,\varepsilon) = \int_{\{a\leq y\leq a+\varepsilon\}} (|P(f)(x,y)| - |P(f)(x,a)|)\delta'_{a,\varepsilon}(y)\varphi_y(x-\xi)\,dz\,.$$

En intégrant par parties et en utilisant le fait que $|\partial\varphi_y(x-\xi)/\partial y| \leq C(\varphi,a)$ pour tout $y \geq a$, on voit que $A_\varepsilon(x) \to \varphi_a(x-\xi)$ quand $\varepsilon \to 0$, et par suite le théorème de convergence dominée montre que

$$I_1'(a,\varepsilon) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |P(f)(x,a)|\varphi_a(x-\xi)\,dx$$

quand $\varepsilon \to 0$. D'autre part, comme $|P(f)(x,y) - P(f)(x,a)| \leq \varepsilon C(n)a^{-n-1}\|f\|_1$ pour $a \leq y \leq a+\varepsilon$, on a

$$|I_1''(a,\varepsilon)| \leq \varepsilon C(n)a^{-n-1}\|f\|_1 \int_a^{a+\varepsilon} \delta'_{a,\varepsilon}(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_y(x-\xi)\,dx\right)dy = \varepsilon C(n)a^{-n-1}\|f\|_1.$$

On en déduit donc que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $I_1''(a,\varepsilon) \to 0$, et par suite

$$I_1(a,\varepsilon) \longrightarrow I_1(a) = \int_{\mathbb{R}^n} |P(f)(x,a)|\varphi_a(x-\xi)\,dx\,.$$

Il est de plus clair, en vertu des résultats précédents et de l'égalité (29) que $I_4(a,\varepsilon)$ a une limite $I_4(a)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En outre, le gradient de $P(f)$ est borné puisque $f \in \mathcal{D}$, et par suite on a, pour $0 < \varepsilon < a/2$,

$$|I_4(a,\varepsilon)| \leq C(f,n)\int_a^{a+\varepsilon} y\delta'_{a,\varepsilon}(y)\,dy \leq C(f,n)(a+\varepsilon)\,,$$

donc $|I_4(a)| \leq C(f,n)a$ pour $0 < a < 1/2$. On a donc obtenu

$$I_1(a) = I_2(a) + I_3(a) + I_4(a)\,, \tag{30}$$

et la dernière étape de notre preuve consiste à faire tendre a vers 0 dans cette égalité. D'après notre dernière inégalité, il est clair que $I_4(a)$ tend vers 0. Ensuite, le théorème de convergence monotone montre que

$$I_3(a) \longrightarrow D^0_\varphi(f)(\xi)$$

lorsque a tend vers 0. De plus, comme $f \in \mathcal{D}$, on a

$$|\nabla P(f)(z)| \leq C(f,n) \min(1,y^{-n-1})$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, et par suite

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |\mathrm{sgn}(P(f)(z))\nabla P(f)(z)\phi_y(x-\xi)|\, dz$$

$$\leq C(f,n)\|\phi\|_1 \int_0^{+\infty} \min(1,y^{-n-1})\, dy < +\infty\,,$$

ce qui prouve que l'intégrale qui définit $\mathcal{L}_\phi(f)(\xi)$ est absolument convergente et que, grâce au théorème de convergence dominée,

$$I_2(a) \longrightarrow \mathcal{L}_\phi(f)(\xi)$$

lorsque a tend vers 0. Pour terminer, nous observons que

$$\left| I_1(a) - \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\varphi_a(x-\xi)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |P(f)(x,a) - f(x)|\varphi_a(x-\xi)\, dx\,.$$

Comme la fonction f est (en particulier) continue et à support compact, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\varphi_a(x-\xi)\, dx$ tend vers $|f(\xi)|$ et $P(f)(\cdot,a)$ tend vers f uniformément dans $\mathbb{R}^n$ lorsque a tend vers 0. Il en résulte que $I_1(a) \to |f(\xi)|$ lorsque a tend vers 0, ce qui achève la preuve du théorème 3.

Références

[1] R. Bañuelos and Ch. N. Moore. — *Distribution function inequalities for the density of the area integral.* Ann. Inst. Fourier **41** (1991), 137-171.

[2] M. T. Barlow and M. Yor. — *Semi-martingale inequalities and local times.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **55** (1981), 237-254.

[3] L. Chevalier. — *Une "formule de Tanaka" en analyse harmonique et quelques applications.* Adv. in Math. **138**, 1 (1998), 182-210.

[4] L. Chevalier. — *Mouvement brownien et formule de Tanaka en analyse.* Potential Anal. **12** (2000), 419-439.

[5] L. Chevalier. — *A new proof of certain Littlewood-Paley inequalities.* J. Fourier Anal. Appl. **7**, 2 (2001), 189-198.

[6] L. Chevalier. — *Renormalisation du produit, jacobiens et transformations de Riesz.* J. Math. Pures Appl. **80**, 10 (2001), 1013-1028.

[7] L. Chevalier. — *Bornitude et continuité de la transformation de Lévy en analyse.* Preprint (2001).

[8] L. Chevalier. — *Une propriété de continuité du temps local.* Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[9] R. R. Coifman, Y. Meyer and E. M. Stein. — *Some new function spaces and their applications to harmonic analysis.* J. Funct. Anal. **62** (1985), 304-335.

[10] Ch. L. Fefferman. — *Estimates for double Hilbert transforms.* Studia Math. **44** (1972), 1-15.

[11] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss. — *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics **79**. American Mathematical Society (1991).

[12] R. F. Gundy. — *The density of the area integral.* Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund. Wadsworth, Belmont, Calif. (1983), 138-149.

[13] R. F. Gundy and M. L. Silverstein. — *The density of the area integral in* $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 215-229.

[14] E. Labeye-Voisin. — *Espaces de tentes, principe de domination et application à l'étude de la densité de l'intégrale d'aire.* Thèse, Grenoble, 1999.

[15] E. M. Stein. — *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, Princeton, N. J. (1993).

Institut Fourier
U.M.R. 5582 C.N.R.S./U.J.F.
B.P. 74
38402 Saint Martin d'Hères
France