Coherant States and a proof of Wehrl entropy conjecture by Lieb

Nicolas Berliat

Résumé

The entropy of a system is a well-known concept. It describes how energy disperses and helps determine the amount of "useful" energy within the system. In the case of quantum systems, another phenomenon comes into play : Heisenberg's uncertainty principle.

Intuitively, this principle should imply a lower bound for the entropy. The problem is that mathematically, classical entropy does not exactly describe what we are looking for, indeed, if f is a positive measurable function on $[0, 1]$

$$S(f) = -\int_0^1 f(x) \ln f(x) \, \mathrm{d}x,$$

then the entropy does not have a lower bound (take $f = ax$, $a > 0$).

Quantum entropy, or Von Neumann entropy, is closer to what we need, but the possibility of states with zero entropy does not align with the uncertainty principle too. So, what solution do we have ? In 1979, Wehrl defined an entropy [Alf79] adapted to this problem, based on coherent states.

Coherent states are well-known for their simplicity. [RC12] If $\hbar$ is the semi classical parameter, they take the form of shifted Gaussians (in the case where the phase space is simple, $\mathbb{R}^2$) :

$$|z\rangle = |q, p\rangle = N \exp(-\frac{|x-q|^2 k}{2\hbar}) \exp(i\frac{p \cdot x}{\hbar}) \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2d} \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Furthermore, coherent states are precisely found to minimize Heisenberg's inequality. We will therefore see how to define these coherent states and their connection to this new notion of entropy, as well as the proof provided by Lieb of the Wehrl conjecture : [Ell78]

$$S_W(Q) \geq 1$$

for all Q, density matrix, and the minimum occur exactly when $Q = P_z$ the projection onto a coherent state $z = (q, p)$. The proof is based on the sharp constants of Young and interpolation inequalities, known since 1975 by Beckner, [Wil75] but they do not exactly allow for obtaining the equivalence in the case of equality.

L'entropie d'un système est un concept bien connu. Elle décrit la manière dont l'énergie se disperse et représente la quantité d'énergie "utile" dans le système. Dans le cas des systèmes quantiques, un autre phénomène entre en jeu : le principe d'incertitude de Heisenberg.

Intuitivement, ce principe devrait impliquer une borne inférieure pour l'entropie. Le problème est que, mathématiquement, l'entropie classique ne décrit pas exactement ce que nous recherchons. En effet, si f est une fonction mesurable positive sur $[0,1]$, l'entropie classique est :

$$S(f) = -\int_0^1 f(x) \ln f(x)\, dx,$$

et n'a pas de borne inférieure (prendre $f = ax$, avec $a > 0$).

L'entropie quantique, ou l'entropie de Von Neumann, se rapproche davantage de ce dont nous avons besoin, mais la possibilité d'états avec une entropie nulle n'est pas non plus compatible avec le principe d'incertitude. Alors, quelle solution avons-nous ? En 1979, Wehrl a défini une entropie adaptée à ce problème, basée sur des états cohérents.

Les états cohérents sont bien connus pour leur simplicité. Si $\hbar$ est le paramètre semi-classique, ils prennent la forme de Gaussiennes décalées (dans le cas où l'espace des phases est simple, $\mathbb{R}^2$) :

$$|z\rangle = |q,p\rangle = N \exp\left(-\frac{|x-q|^2 k}{2\hbar}\right) \exp\left(i\frac{p\cdot x}{\hbar}\right) \quad \forall (q,p) \in \mathbb{R}^{2d}, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, on constate que les états cohérents minimisent précisément l'inégalité de Heisenberg. Nous allons donc voir comment définir ces états cohérents et leur lien avec cette nouvelle notion d'entropie, ainsi que la démonstration fournie par Lieb de la conjecture de Wehrl :

$$S_W(Q) \geq 1$$

pour toute matrice densité Q, et le minimum se produit exactement lorsque $Q = P_z$, la projection sur un état cohérent $z = (q,p)$.

La démonstration repose sur les constantes optimales des inégalités de Young et d'interpolation, qui sont connues depuis 1975 par Beckner, mais elles ne permettent pas exactement d'obtenir l'équivalence dans le cas d'égalité.

Références

[Alf79] Wehrl Alfred. On the relation between classical and quantum-mechanical entropy. *Mathematical Physics vol.16*, 1979.

[Ell78] Lieb Elliott. *Proof of an Entropy Conjecture of Wehrl.* Springer, 1978.

[RC12] Didier Robert and Monique Combescure. *Coherent States and Applications in Mathematicals Physics.* Springer, 2012.

[Wil75] BECKNER Willam. Inequalities in fourier analysis. *Annals of Mathematics vol.102*, 1975.