Groupes triangulaires lagrangiens en géométrie hyperbolique complexe.

Pierre Will
Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
email : will@math.jussieu.fr

24 septembre 2007

Résumé

Nous présentons quelques résultats au sujet des groupes engendrés par trois involutions antiholomorphes dans le cadre du plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. [1]

Classification AMS : 32G15, 32M15, 32Q45, 57S30

1 Introduction

Le groupe PU(n,1) est le groupe des isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, qui généralise le disque de Poincaré à la dimension (complexe) n . L'étude des sous-groupes discrets de PU(n,1) généralise donc celles des groupes fuchsiens, sous-groupes discrets de PU(1,1). Par exemple, une description des représentations discrètes et fidèles du groupe fondamental d'une surface de Riemann hyperbolique conduirait à un analogue hyperbolique complexe de l'espace de Teichmüller de cette surface. A ce jour, la principale méthode utilisée pour montrer la discrétude d'un sous-groupe de PU(n,1) a été de construire un domaine fondamental pour l'action de ce sous-groupe, et les exemples obtenus traitent presque tous du cas $n = 2$. Cette construction est rendue très difficile par l'abscence d'hypersurface réelle totalement géodésique dans $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, qui seraient des candidats naturels pour servir de faces à un domaine fondamental. A titre d'exemple, le seul groupe (infini) de type fini dont on connaisse toutes les représentations discrètes, fidèles et préservant le type dans PU(2,1) est le groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) (voir [4]). Il n'existe pas de description complète de ce type de représentations dans le cas des groupes de surfaces, même dans le cas $n = 2$. Nous n'aborderons que le cas de la dimension complexe deux dans cette note.

[1]Cette note a été rédigée pendant un séjour à Bonn (MPIM) financé par une bourse du Max Planck Institut für Mathematik

Beaucoup des exemples de sous-groupes discrets de PU(2,1) connus à ce jour sont liés aux groupes triangulaires.

Définition 1. Un *groupe triangulaire* est une représentation dans Isom($\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$) du produit libre de trois copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans PU(2,1). On dit qu'un groupe triangulaire est *complexe* (resp. *lagrangien*) s'il est engendré par trois involutions holomorphes (resp. antiholomorphes).

Goldman et Parker on étudé dans [7] les groupes triangulaires idéaux complexes, qui sont liés aux représentations du groupe fondamental de la sphère privée de trois points. Les représentations du groupe modulaire décrites dans [4] sont d'indice trois dans des groupes triangulaires lagrangiens. Dans [1], Deraux, Falbel et Paupert ont montré que les réseaux décrits par Mostow dans [9] étaient d'indice fini dans un groupe triangulaire lagrangien. Nous renvoyons au survey [15] pour plus d'informations.

Le but de cette note est de présenter quelques résultats concernant les groupes triangulaires lagrangiens qui admettent un cycle d'ordre trois au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Plus, précisément, nous nous intéressons aux groupes engendrés par trois involutions antiholomorphes I_1, I_2 et I_3 telles qu'il existe trois points p_1, p_2 et p_3 au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ satisfaisant

$$p_1 \xleftrightarrow{I_3} p_2 \xleftrightarrow{I_1} p_3 \xleftrightarrow{I_3} p_1. \tag{1}$$

Ces involutions s'appellent des symétries réelles ; elles sont définies dans la section 2. La condition 1 est équivalente à demander que le produit $I_1I_2I_3$ ait un point fixe au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Lorsque ce point fixe est unique, on obtient une représentation préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1) de la manière suivante. On voit le groupe fondamental du tore épointé comme le groupe libre à deux générateurs $F_2 = \langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$, et l'on pose

$$\rho(\mathtt{a}) = I_1I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{b}) = I_3I_2, \tag{2}$$

Dans ces conditions, le commutateur $\rho([\mathtt{a}, \mathtt{b}])$ est égal au produit $(I_1I_2I_3)^2$. Dans ce cas, la préservation du type est donc équivalente à la parabolicité du produit $(I_1I_2I_3)^2$. Un représentation de F_2 admettant une telle décomposition est dite *décomposable.* Notons qu'en général, on ne peut pas décomposer une paire quelconque d'isométries sous la forme 2. Plus précisément :

- La variété des représentations $\mathfrak{R}$ =Hom(F_2, PU(2,1))/PU(2,1) est de dimension 8,
- la sous variété de $\mathfrak{R}$ contenant les représentations de F_2 admettant une décomposition telle que (2) est de dimension 7. Parmis celles-ci, celles qui donnent un groupe triangulaire lagrangien satisfaisant 1 forme un fermé de dimension maximale.
- La sous variété de $\mathfrak{R}$ contenant les représentations de F_2 admettant une décomposition analogue à (2) en remplaçant les I_k par des involutions holomorphes est de dimension 4.

Nous abordons au paragraphe 8 la question de savoir quand une représentation préservant le type du groupe fondamental du tore épointé est décomposable (voir également [18]). Une fois donné un critère de préservation du type, nous décrivons dans le théorème 1 (voir section 7) une famille de plongements de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans $\mathfrak{R}$, dont les images ne contiennent que des classes de représentations discrètes, fidèles et préservant le type. Nous esquissons la preuve au paragraphe 7, et renvoyons à [17] ou [19] pour plus de détails. Nous terminons par montrer dans le paragraphe 9 que certains groupes triangulaires complexes possédant une symétrie sont commensurables à des groupes triangulaires lagrangiens satisfaisant (1). Parmis eux se trouvent des groupes liés aux représentations du groupe modulaire dans PU(2,1), et aux groupes triangulaires complexes idéaux (voir

[7, 14]).

Cet article est organisé comme suit.

- section 2 : définition du plan hyperbolique complexe et de ses isométries.
- section 3 : étude des symétries réelles intervenant dans (1).
- section 4 : géométrie des triangles idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.
- section 5 : coordonnées sur l'ensembles des classes de groupes triangulaires lagrangiens satisfaisant (1).
- section 6 : critère de parabolicité du produit $(I_1I_2I_3)^2$
- section 7 : description de plongements de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans PU(2,1) : théorème 1.
- section 8 : étude de la décomposabilité d'une représentation préservant le type du groupe fondamental du tore épointé.
- section 9 : lien avec les groupes triangulaires complexes symétriques.

Remerciements. Je remercie Elisha Falbel pour nos nombreuses discussions, ainsi que Gilles Courtois et John Parker pour leurs nombreuses remarques à différents stades de la progression du travail exposé ici.

2 Le plan hyperbolique complexe

Nous allons utiliser le modèle projectif du plan hyperbolique complexe. Munissons $\mathbb{C}^3$ d'une forme hermitienne de signature $(2,1)$. Le plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est la projection dans $\mathbb{C}P^2$ du cône négatif V^- de cette forme hermitienne, muni de la distance donnée par

$$\cosh^2\left(\frac{\mathrm{d}(m,n)}{2}\right)=\frac{\langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n},\mathbf{m}\rangle}{\langle\mathbf{m},\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle},$$

où $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ sont des relèvement des points m et n. Le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est le projectivisé du cône nul de la forme hermitienne. Suivant les besoins, nous utiliserons différentes formes hermitiennes. Si l'on fait le choix standard de la forme hermitienne donnée par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,1,-1)$, on peut voir le plan hyperbolique complexe comme la boule unité de $\mathbb{C}^2$ (vu comme carte affine de $\mathbb{C}P^2$).

Le groupe complet des isométries de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ est engendré par PU(2,1) et la conjugaison complexe. Il existe donc des isométries holomorphes, et des isométries antiholomorphes. Les isométries holomorphes se relèvent classiquement à U(2,1), et nous appellerons relèvement d'une isométrie antiholomorphe A toute matrice M_A de U(2,1) vérifiant

$$\mathbf{P}(M_A\bar{\mathbf{m}})=A(m),\ \text{pour tout relèvement } \mathbf{m} \text{ de } m. \tag{3}$$

Les sous-espaces totalement géodésiques maximaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ sont de dimension réelle deux. Ils sont classifiés en deux types.

1. Les *droites complexes*, qui sont les intersections (lorsqu'elles sont non-vides) des droites projectives complexes de $\mathbb{C}P^2$ avec $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Une droite complexe C se relève donc en un plan complexe qui intersecte V^-, et qui est donc orthogonal à un sous-espace de dimension 1 contenu dans V^+. On appellera *vecteur polaire de C* tout

génerateur $\mathbf{c}$ de ce sous-espace de dimension 1. Etant donnée une droite complexe, il existe une unique involution holomorphe qui fixe C point par point : la *symétrie complexe* par rapport à C. Si $\mathbf{c}$ est un vecteur polaire à C, cette symétrie est donnée par

$$Z \longmapsto -Z + 2\frac{\langle Z, \mathbf{c}\rangle}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle}\mathbf{c}.$$

2. Les *plans réels*, qui sont les intersections avec $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ des projections des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $\mathbb{C}^{2,1}$. Tout plan réel P est fixé point par point par une unique isométrie involutive antiholomorphe : la *symétrie réelle* par rapport à P. Un relèvement d'une symétrie réelle est une matrice M de U(2,1) satisfaisant $M\overline{M} = 1$. Notons que si M_1 et M_2 sont des relèvements de deux symétries réelles I_1 et I_2, l'isométrie $I_1 \circ I_2$ se relève en $M_1\overline{M}_2$. L'exemple standard est $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, l'ensemble des points à coordonnées réelles dans la boule. La symétrie par rapport à $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ est la conjugaison complexe.

Notons que PU(2,1) agit transitivement sur l'ensemble des droites complexes, et sur l'ensemble de plans réels.

Les isométries de PU(2,1) sont classées en trois types, qui généralisent la classification usuelle des éléments de PSL(2,$\mathbb{R}$). Une isométrie est ainsi dite elliptique (resp. parabolique, resp. loxodromique) si elle a un point fixe dans $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (resp. un unique point fixe dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, resp. exactement deux points fixes dans $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$). De même que dans le cas de PSL(2,$\mathbb{R}$) ou PSL(2,$\mathbb{C}$), on peut différencier ces types par la trace d'un relèvement à SU(2,1). Nous renvoyons au chapitre 6 de [6] pour plus de détails.

Notons qu'il existe d'autres involutions holomorphes, qui fixent exactement un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, que nous appellerons *demi-tours*. Dans le modèle de la boule unité, lié à la forme hermitienne donnée par $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$, ces demi-tours sont conjugués dans PU(2,1) à l'application

$$(z_1, z_2) \longmapsto (-z_1, -z_2).$$

Etant donné deux points p_1 et p_2 de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, il existe une unique géodésique qui les relie que nous noterons (p_1p_2), et une unique droite complexe qui les contient, que nous noterons $(p_1p_2)^{\mathbb{C}}$.

3 Symétries réelles échangeant deux points donnés du bord

Proposition 1. *Il existe une famille à deux paramètres réels de symétries réelles échangeant deux points distincts donnés p et q du bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Quitte à normaliser, on peut supposer que p et q admettent les relèvements à $\mathbb{C}^3$ suivants donnés par $\mathbf{p} =^t \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{q} =^t \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, et que le vecteur $\mathbf{c} =^t \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ est polaire à la droite complexe $(pq)^{\mathbb{C}}$. On travaille dans la base $(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{q})$, dans laquelle la forme hermitienne est donnée par la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Un relèvement d'une réflexion réelle échangeant p et q est une matrice M de U(2,1) satisfaisant aux propriétés suivantes

$$M\overline{M} = 1 \text{ et } \mathbf{P}\left(M\bar{\mathbf{p}}\right) = \mathbf{P}\left(M\mathbf{p}\right) = q.$$

Une vérification directe montre qu'une telle matrice est de la forme

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 1/\bar{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } |b| = 1.$$

Quitte à multiplier par un nombre complexe de module 1, on peut toujours se ramener au cas où le paramètre a est réel et strictement positif. On peut alors mettre M sous la forme suivante

$$M_{t,\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{t} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } (t,\theta) \in [0,\pi[.$$

Ceci prouve la proposition. □

Remarque 1. Remarquons que l'on peut toujours choisir θ dans l'intervalle $[0,\pi[$. En effet, le changement $\theta \longmapsto -\theta$ transforme la matrice $M_{t,\theta}$ en sa conjuguée, qui n'est autre que son inverse. Les réflexions réelles étant des involutions, il s'agit encore d'un relèvement de la même réflexion.

Remarque 2. Les paramètres t et θ ont une interprétation géométrique.

- Avec le choix ci-dessus de relèvements, la géodésique γ reliant p et q est paramétrée par la longueur d'arc, en version relevée, par

  $$\gamma(s) = e^{s/2}\mathbf{p} - e^{-s/2}\mathbf{q},\ s \in \mathbb{R}$$

  Une vérification directe montre alors que la symétrie réelle associée à la matrice $M_{t,\theta}$ agit sur γ comme un demi tour de $\mathbb{R}$ de centre t. La paramétrisation de la géodésique γ ci-dessus est en fait valable dès que le produit hermitien $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ vaut 1.
- Une vérification directe montre que

  $$M_{t,\theta_1}\overline{M_{t,\theta_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta_1-\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{PU}(2,1)}{\sim} \begin{bmatrix} e^{(\theta_2-\theta_1)/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\theta_1-\theta_2)/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(\theta_2-\theta_1)/3} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2,1).$$

  Cette dernière matrice est le relèvement d'une réflexion complexe qui fixe point par point la droite complexe contenant p_1 et p_2, et dont l'angle de rotation est $\theta_1 - \theta_2$.

Ainsi, le paramètre t correspond à l'abscisse curviligne le long de γ de l'unique point fixe de la symétrie réelle associée à $M_{t,\theta}$ situé sur γ, et le paramètre θ correspond à un angle de rotation autour de γ.

Terminons ce paragraphe par le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit φ une isométrie antiholomorphe telle qu'il existe une paire de points (p,q) au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ vérifiant $\varphi(p) = q$ et $\varphi(q) = p$. Alors φ est une symétrie réelle.*

Démonstration. C'est une vérification directe, en écrivant un relèvement de φ dans la base $(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{q})$ où $\mathbf{c}$ est polaire à la droite complexe $(pq)^{\mathbb{C}}$. □

4 Les triangles idéaux de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Rappelons qu'un triangle est dit idéal lorsque ses trois sommets sont situés sur le bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

4.1 Classification : l'invariant de Cartan

Définition 2. Soient p_1, p_2 et p_3 trois points au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. La quantité définie par

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = -\arg\left(\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\rangle\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1\rangle\right) \tag{5}$$

ne dépend pas du choix des relèvements $\mathbf{p}_i$, et s'appelle l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3).

Un calcul direct montre que le déterminant de la matrice de Gram de $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ vaut $2\mathrm{Re}\left(\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\rangle\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1\rangle\right)$. La forme hermitienne étant de signature (2,1), ce déterminant est négatif. En conséquence, l'invariant de Cartan de trois points appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Si les trois relèvements $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ forment une famille liée, c'est à dire si les trois points p_1, p_2 et p_3 appartiennent à une même droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, le déterminant est nul, ce qui montre que les bornes de l'intervalle sont effectivement atteintes.

Nous renvoyons à [6] (chapitre 7) pour la preuve du résultat suivant.

Proposition 2. *L'invariant de Cartan satisfait aux propriétés suivantes.*

1. $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = 0$ *si et seulement si les trois points sont contenus dans un plan réel.*
2. $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \pm\pi/2$ *si et seulement si les trois points sont contenus dans une droite complexe.*
3. *Deux triplets ordonnés de points au bord ont mêmes invariants de Cartan si et seulement s'il existe une isométrie holomorphe qui les identifie.*
4. *Deux triplets ordonnés de points au bord ont des invariants de Cartan opposés si et seulement s'il existe une isométrie antiholomorphe qui les identifie*

Remarque 3. L'invariant de Cartan admet une interprétation géométrique simple. La distance d entre (p_1p_2) et p_3', la projection orthogonale de p_3 sur $(p_1p_2)^{\mathbb{C}}$, est liée à l'invariant de Cartan de (p_1, p_2, p_3) par la relation

$$|\tan\left(\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3)\right)| = \sinh(d).$$

4.2 Côtés et hauteurs réels d'un triangle idéal.

Proposition 3. *Soient p_1, p_2 et p_3 trois points au bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Supposons que ces trois points ne sont pas contenus dans une droite complexe de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Alors, il existe une unique réflexion réelle qui fixe p_1 et qui échange p_2 et p_3.*

Démonstration. La définition de l'invariant de Cartan par la relation (5) montre que $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = -\mathbb{A}(p_1, p_3, p_2)$. En conséquence, il existe une application antiholomorphe φ qui fixe p_1, et échange p_2 et p_3. L'application $\varphi \circ \varphi$ fixe simultanément les trois points. Lorsque ces derniers n'appartiennent pas à une droite complexe commune, ceci impose que $\varphi \circ \varphi = 1$. S'il existait deux telles involutions φ_1 et φ_2, on vérifierait de même qu'elles sont inverses l'une de l'autre, donc égales. $\square$

Remarque 4. Si dans l'énoncé de la proposition 3, les trois points sont dans une droite complexe, alors il existe tout de même une symétrie réelle satisfaisante, mais elle n'est plus unique.

Définition 3. Etant donné un triangle idéal Δ non-contenu dans une droite complexe, nous appellerons *hauteurs réelles* de Δ les trois plans réels miroirs des symétries obtenues en appliquant successivement la proposition 3 aux trois sommets de Δ.

Remarque 5. Soit $p_1p_2p_3$ un triangle idéal et (h_1, h_2, h_3) ses hauteurs réelles. La symétrie par rapport à h_k, H_k, fixe p_k et échange p_{k+1} et p_{k+2} (indices pris modulo 3). On vérifie alors que les trois produits H_kH_{k+1} sont égaux à une même isométrie elliptique d'ordre trois qui permute cycliquement les sommets du triangle. Les trois hauteurs réelles s'intersectent au point fixe de E, qui n'est autre que le barycentre du triangle (p_1, p_2, p_3) (voir le chapitre 7 de [6]). Notons que la hauteur réelle h_k intersecte la géodésique $p_{k+1}p_{k+2}$ orthogonalement, puisque la réflexion de référence associée en échange les extrémités.

Définition 4. Nous notons m_k l'intersection de la hauteur réelle h_k avec la géodésique p_kp_{k+1}, et l'appelons le *pied* de la hauteur h_k.

Proposition 4. *Soit (p_1, p_2, p_3) un triangle idéal non-contenu dans une droite complexe, $(H_k)_{k=1,2,3}$ les symétries par rapport à ses hauteurs réelles, et $(m_k)_{k=1,2,3}$ les pieds de ses hauteurs réelles. Pour $k = 1, 2, 3$, il existe un unique plan réel s_k tel que S_k, la symétrie réelle par rapport à s_k, satisfait aux deux propriétés suivantes.*
- *S_k fixe p_{k+1} et p_{k+2}.*
- *$H_k \circ S_k$ est le demi-tour de centre m_k*

Démonstration. Nous allons construire s_3. Les deux autres plans réels annoncés, s_1 et s_2, sont alors obtenus par la symétrie d'ordre 3 discutée ci-dessus. Pour cela, normalisons de sorte que p_1 et p_2 admettent les relèvements ${}^t\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{p}_2 ={}^t \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, et que le vecteur $\mathbf{c}_{12} ={}^t \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ soit polaire à la droite complexe $(p_1p_2)^{\mathbb{C}}$. Nous utilisons encore la forme hermitienne donnée par la matrice J donnée par (4). En écrivant la condition $\langle p_3, p_3\rangle = 0$ dans la base $(\mathbf{p}_1, \mathbf{c}_{12}, \mathbf{p}_2)$, on vérifie que le point p_3 admet un relèvement du type

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix}-|z|^2 + it\\ \sqrt{2}z\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}.$$

Dans ces conditions, la réflexion h_3 admet un relèvement du type $M_{t,\theta}$ (voir (3)), avec t et θ choisis de sorte que $M_{t,\theta}\bar{\mathbf{p}}_3$ soit colinéaire à $\mathbf{p}_3$ (c'est toujours possible). La seule possibilité est alors que S_3 admette un relèvement multiple de

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -e^{i\theta} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

□

Définition 5. Nous appellerons les trois plans réels s_1, s_2 et s_3 les côtés réels du triangle idéal (p_1, p_2, p_3).

Remarque 6. Notons que les hauteurs et côtés réels ne sont bien définis que lorsque les trois points p_i ne sont pas contenus dans une droite complexe. Notons de plus que m_k est l'unique intersection de la hauteur réelle h_k avec le côté réel s_k, car la composée des symétries associées est un demi-tour, et n'a donc qu'un seul point fixe.

5 Classification des triplets de réflexions satisfaisant (1)

En utilisant la proposition 1, nous allons maintenant décrire à conjugaison près dans PU(2,1) les triplets de réflexions réelles satisfaisant la relation (1). Pour cela, définissons comme suit une application Φ. Soit (I_1, I_2, I_3) un triplet de réflexions réelles satisfaisant la condition (1). Nous lui associons un 7-uplet $\Phi(I_1, I_2, I_3) = (t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}) \in (\mathbb{R} \times [0, \pi[)^3 \times]-\pi/2, \pi/2[$ de la manière suivante. Commençons par choisir une orientation des côtés du triangle, par exemple en suivant le parcours $p_1p_2p_3$.

- $\mathbb{A}$ est l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3).
- Au triangle idéal (p_1, p_2, p_3) sont associés ses côtés et hauteurs réels. Le miroir de I_k intersecte la géodésique $p_{k+1}p_{k+2}$ en un point n_k (car I_k échange les extrémités de cette géodésique). Nous appelons $t_k \in \mathbb{R}$ la distance algébrique entre m_k et n_k, en tenant compte de l'orientation de la géodésique $(p_{k+1}p_{k+2})$.
- L'isométrie $I_k \circ s_k$ est elliptique, et fixe le point n_k. Cette isométrie elliptique préserve deux droites complexes :
  - l'une est la droite $(p_kp_{k+1})^{\mathbb{C}}$, sur laquelle elle agit comme un demi-tour du disque hyperbolique $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$,
  - l'autre est la droite complexe orthogonale à $(p_kp_{k+1})^{\mathbb{C}}$ au point n_k. L'isométrie $I_k \circ s_k$ agit sur cette deuxième droite comme une isométrie elliptique de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ dont nous notons l'angle de rotation $2\theta_k$, avec $\theta_k \in [0, \pi[$.

Remarque 7. L'angle θ_k peut s'interpréter en termes d'angle entre le côté réel s_k et le miroir de I_k. Il faut pour cela définir la notion d'angle entre deux plans réels, ce que nous ne faisons pas ici pour alléger l'exposition (voir [17]).

Lemme 2. *Soient P un plan réel, p_1 et p_2 deux points de ∂P, γ la géodésique p_1p_2 et n un point de γ. Soit $\theta \in [0, \pi[$ un réel. Notons I_P la symétrie par rapport à P.*

Il existe un unique plan réel Q tel que I_PI_Q soit une isométrie elliptique vérifiant

1. *I_PI_Q fixe n et préserve $\gamma^{\mathbb{C}}$ ainsi que la droite complexe orthogonale à γ^C en n, notée $\gamma^{\mathbb{C}}_{\perp,n}$.*
2. *La restriction de I_PI_Q à $\gamma^{\mathbb{C}}$ est le demi-tour de centre n.*
3. *La restriction de I_PI_Q à $\gamma^{\mathbb{C}}_{\perp,m}$ est une rotation de centre n et d'angle 2θ.*

Démonstration. Soient $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ des vecteurs respectivement polaires aux droites complexes $\gamma^{\mathbb{C}}$ et $\gamma^{\mathbb{C}}_{\perp,n}$, et $\mathbf{n}$ un relèvement de n. Quitte à changer de relèvements, on peut supposer que dans la base $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{n})$, la forme hermitienne est donnée par la matrice diagonale dont les coefficients sont $(1, 1, -1)$, et que P est $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ (voir la section 2). Dans ces conditions, I_P est la conjugaison complexe, et admet pour relèvement la matrice identité.

Une isométrie elliptique satisfaisant aux conditions de l'énoncé admet le relèvement à U(2,1)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La conjuguée de cette dernière matrice est donc un relèvement de I_Q. □

Proposition 5. *L'ensemble des PU(2,1)-classes de conjugaison de triplets de réflexions réelles ne préservant pas une droite complexe et satisfaisant la condition (1) est en bijection avec $(\mathbb{R} \times [0, \pi[)^3 \times] - \pi/2, \pi/2[$.*

Démonstration. – Tout d'abord, $\mathbb{A}$, t et θ sont des invariants pour PU(2,1). Ceci prouve que l'application Φ est injective.
– Réciproquement, donnons-nous $(t_1, \theta_1, t_2, \theta_2, t_3, \theta_3, \mathbb{A}) \in (\mathbb{R} \times [0, \pi[)^3 \times] - \pi/2, \pi/2[$. Le paramètre $\mathbb{A}$ détermine la classe d'isométrie du triplet (p_1, p_2, p_3). Les pieds des hauteurs m_k sont alors déterminés. Les trois longueurs t_1, t_2 et t_3 permettent chacune de marquer un point n_k sur la géodésique $(p_{k+1}p_{k+2})$ pour $k = 1, 2, 3$, à distance $|t_k|$ de m_k. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2 en prenant pour P successivement les côtés réels du triangle idéal, et pour point n les points n_k.

□

Etant donné un triplet de réflexions réelles satisfaisant (1), nous appellerons le 7-uplet fourni par l'application Φ ses *coordonnées*.

6 Parabolicité du produit $(I_1 I_2 I_3)^2$

Lemme 3. *Soit (I_1, I_2, I_3) un triplet de symétries réelles satisfaisant la condition (1). Le produit cyclique $(I_1 I_2 I_3)^2$ stabilise chaque horosphère centrée en p_2 si et seulement si les coordonnées du triplet satisfont*

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

Démonstration. Partons du triangle idéal (p_1, p_2, p_3) donné par la condition (1), dont on oriente les côtés. Supposons fixée une paramétrisation par la longueur d'arc des côtés du triangle, telle que toute horosphère centrée en p_k intersecte les géodésique $(p_k p_{k+1})$ et $(p_k p_{k+2})$ en des points de paramètres opposés. Nous renvoyons à [17] pour les détails de ce choix. La symétrie I_k agit sur la géodésique $(p_{k+1}p_{k+2})$ comme un demi-tour de $\mathbb{R}$:

$$I_{k}\Big|_{(p_{k+1}p_{k+2})} : s \longmapsto 2t_k - s, \tag{6}$$

où t_k est défini par les coordonnées du triplet $(I_1 I_2 I_3)$.

Dans ces conditions, soit $\mathcal{H}$ une horosphère centrée en p_2. Elle est complètement définie par la donnée de l'abscisse curviligne de son intersection avec la géodésique $(p_2 p_3)$, que nous nommerons s_0. En utilisant (6) et le fait que le triplet de symétries vérifie (1), on peut suivre le parcours de $\mathcal{H}$ le long du cycle $p_1 p_2 p_3$ lors des applications successives des I_k. Ainsi, $I_3(\mathcal{H})$ est une horosphère centrée en p_1, qui intersecte la géodésique $(p_1 p_2)$ en son point de paramètre $2t_3 - s_0$, et la géodésique $(p_1 p_3)$ en son point de paramètre $s_0 - 2t_3$. En itérant ce procédé, on en déduit que l'image de $\mathcal{H}$ par $(I_1 I_2 I_3)^2$ est une horosphère centrée en p_2, et qui intersecte la géodésique $(p_2 p_3)$ en son point de paramètre $s_0 - 4(t_1 + t_2 + t_3)$. D'où le résultat. □

Une isométrie qui préserve toutes les horosphères centrées en un point $p \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, elle peut être a priori

1. l'identité
2. parabolique, de point fixe p
3. une réflexion complexe dont le miroir contient p dans son bord.

Dans notre cas, nous disposons d'informations supplémentaires.

Proposition 6. *Soit (I_1, I_2, I_3) un triplet de réflexions réelles satisfaisant la condition (1), et dont les coordonnées vérifient $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Alors $(I_1 I_2 I_3)^2$ est soit l'identité, soit une isométrie parabolique fixant p_2.*

Démonstration. Soit M_k un relèvement de la réflexion I_k. L'isométrie $(I_1 I_2 I_3)^2$ admet alors le relèvement $M\overline{M}$, où M est la matrice $M_1 \overline{M}_2 M_3$ (voir la section 2 sur les relèvements des isométries antiholomorphes). Notons que si M est dans U(2,1), alors $M\overline{M}$ est dans SU(2,1). Par ailleurs, en se ramenant au cas ou M est triangulaire supérieure,on vérifie que $\mathrm{tr} M\overline{M}$ est réelle et positive. C'est cette condition qui permet d'exclure le cas 3 ci-dessus. Nous renvoyons à [17] pour les détails. □

Dans ces conditions, si $(I_1 I_2 I_3)^2$ est l'identité, alors les deux isométries $I_1 I_2$ et $I_3 I_2$ commutent ($(I_1 I_2 I_3)^2$ est leur commutateur). Elles ont donc les mêmes points fixes. Cette condition de non-dégérescence peut s'exprimer en termes des coordonnées du triplet (voir [17]), mais elle est assez technique et peu instructive.

7 Plongements de l'espace de Teichmüller du tore épointé

Définition 6. – Pour $\alpha \in [-\pi/4\, \pi/4]$, soit $\mathcal{F}_\alpha$ la famille de PU(2,1)-classes de groupes triangulaires lagrangiens dont les coordonnées sont données par

$$(t_1, \pi/2 + \alpha, t_2, \pi/2 + \alpha, t_3, \pi/2 + \alpha, 0)\,, \text{ avec } t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

– Pour $\alpha \in [-\pi/4\, \pi/4]$, soit $\mathcal{F}^\star_\alpha$ la famille des PU(2,1)-classes de représentations ρ du groupe libre à deux génerateurs $F_2 = \langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$ dans PU(2,1) déduites de $\mathcal{F}_\alpha$ via

$$(I_1, I_2, I_3) \longmapsto \rho\, :\, (\mathtt{a},\mathtt{b}) \longmapsto (I_1 I_2, I_3 I_2)\,. \tag{7}$$

Dans le cadre de la famille $\mathcal{F}_\alpha$, l'invariant de Cartan du triplet (p_1, p_2, p_3) est nul. Les trois points sont donc contenus dans un plan réel P. Cependant, le groupe $\langle I_1, I_2, I_3 \rangle$ ne préserve P que si α est nul.

Nous désignons par $F_2 = \langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$, le groupe libre à deux générateurs.

Théorème 1. *Pour tout α dans $[-\pi/4, \pi/4]$, la famille $\mathcal{F}^\star_\alpha$ est un plongement de l'espace de Teichmüller du tore épointé dans PU(2,1) dans la variété de représentations Hom(F_2,PU(2,1))/PU(2,1). Plus précisément, toute $\rho \in \mathcal{F}^\star_\alpha$ est une reprśentation discrète, fidèle du groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1), qui de plus préserve le type, c'est à dire telle que $\rho([\mathtt{a}, \mathtt{b}])$ est parabolique.*

De plus, $\mathcal{F}^\star_{\alpha_1}$ et $\mathcal{F}^\star_{\alpha_2}$ sont disjointes si et seulement si $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Démonstration. Nous n'allons pas démontrer ce résultat en détails. Sa preuve fait l'objet du dernier chapitre de [17]. La disjonction de deux familles $\mathcal{F}^\star_{\alpha_1}$ et $\mathcal{F}^\star_{\alpha_2}$ provient de ce que deux représentations de F_2 dans PU(2,1) provenant de groupes triangulaires lagrangiens comme en (7) sont conjuguées si et seulement si les triplets de réflexions lagrangiennes dont elles proviennent ont les mêmes coordonnées. La préservation du type provient de la condition $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ discutée dans la section 6. Nous allons discuter rapidement la discrétude et la fidélité.

Pour montrer cette partie du résultat, nous montrons que tout point de $\mathcal{F}_\alpha$ représente un groupe triangulaire lagrangien discret et isomorphe au produit libre de trois copies de

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans ce but, nous construisons un domaine fondamental pour l'action du groupe triangulaire lagrangien $\langle I_1, I_2, I_3\rangle$. Ce domaine possède trois faces Σ_1, Σ_2 et Σ_3, qui satisfont aux conditions suivantes.

1. La face Σ_k est une hypersurface réelle de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, qui sépare l'espace en deux composantes connexes. Elle est stable pour I_k, et les deux composantes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_k$ sont échangées par I_k.
2. Pour tout k, l'intersection des adhérences $\mathrm{adh}\,(\Sigma_{k+1}) \cap \mathrm{adh}\,(\Sigma_{k+2})$ est réduite au point $p_k \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (qui est le point fixe de $I_{k+2}I_kI_{k+1}$).

On obtient alors le résultat en appliquant le théorème de combinaison de Klein. Nous donnons ci-dessous quelques indications sur la construction des hypersurfaces Σ_k, qui est le point technique de la démonstration. □

Définition 7. Soit P, un plan réel, γ une géodésique contenue dans P et Π la projection orthogonale sur P. La $\mathbb{R}$-*surface spinale* $\Sigma_{\gamma,P}$ est l'hypersurface de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ obtenue comme image inverse de γ par Π.

Notons que les fibres de la projection orthogonale sur un plan réel sont des plans réels. En conséquence, la $\mathbb{R}$-surface spinale $\Sigma_{\gamma,P}$ est feuilletée par des plans réels, qui sont les fibres de Π au dessus des points de γ. L'utilisation d'hypersurfaces feuilletées par des sous-espaces totalement géodésiques de dimension 2 est un procédé qui a été beaucoup utilisé en géométrie hyperbolique complexe, pour palier à l'absence d'hypersurface réelles totalement géodésiques (voir par exemple [3, 4, 5, 10, 13, 14]). Le terme de $\mathbb{R}$-surface spinale vient du fait que la définition est un analogue réel de celle des surfaces spinales définies par Mostow dans [9] (voir aussi [6], où elles sont désignées par le termes de *bisector*). Les surfaces spinales possèdent un double feuilletage, en droites complexes d'une part, et en plans réels d'autre part (mais avec deux points singuliers). Dans le cas des $\mathbb{R}$-surfaces spinales, il n'existe pas de feuilletage en droites complexes, mais on peut montrer que $\Sigma_{\gamma,P}$ contient exactement une droite complexe, qui est $\gamma^{\mathbb{C}}$.

La partie technique est de montrer que la condition 2 ci-dessus est vérifiée. C'est là qu'est l'intérêt de disposer d'hypersurfaces feuilletées par des plans réels. Il suffit en effet de vérifier la disjonction feuille par feuille. Or, deux plans réels sont disjoints si et seulement si le produit des réflexions réelles associées est loxodromique (voir [5]). Cette dernière condition peut se traiter numériquement via la trace d'un relèvement à SU(2,1). C'est la méthode utilisée dans [19] et [17] pour prouver le théorème 1.

Remarque 8. On peut interpréter la déformation ci-dessus en terme de pliage à partir des représentations préservant un plan réel. La famille $\mathcal{F}_0^\star$ est un plongement de l'espace de Teichmüller dans le stabilisateur d'un plan réel P. Si $\rho \in \mathcal{F}_0^\star$ représente une classe de représentations, un domaine fondamental pour l'action de $\rho(F_2)$ restreinte à P, est un quadrilatère idéal K, avec identification des faces opposées. On peut obtenir la représentation déformée $\rho_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha^\star$, image du même point de l'espace de Teichmüller que ρ par un autre plongement par un pliage d'angle 2α de K le long d'une de ses diagonales.

8 Invariant de Toledo et décomposabilité

Soit ρ une représentation préservant le type du groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1). On peut voir ρ comme une représentation du groupe libre $F_2 = \langle \mathtt{a}, \mathtt{b}\rangle$ telle que le commutateur $\rho\,([\mathtt{a}, \mathtt{b}])$ est parabolique. Nous utiliserons dans ce paragraphe la notation $A=\rho(\mathtt{a})$ et $B=\rho(\mathtt{b})$. A ρ est associé un cycle de longueur 4 donné par le point fixe de $\rho\left([\mathtt{a},\mathtt{b}]\right)$:

$$p_2 \xrightarrow{B^{-1}} p_3 \xrightarrow{A^{-1}} p_4 \xrightarrow{B} p_1 \xrightarrow{A} p_2 \tag{8}$$

Nous dirons que la représentation ρ est *non-dégénérée* lorsque les quatre points dans (8) sont deux à deux distincts.

Lemme 4. *Soit ρ une représentation préservant le type et non-dégénérée de groupe fondamental du tore épointé dans PU(2,1). Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe une symétries réelle σ telle que $\sigma(p_1)=p_3$ et $\sigma(p_2)=p_4$.*
2. *Il existe un triplet de symétries réelles (I_1,I_2,I_3) telles que $A=I_1I_2$ et $B=I_3I_2$.*
3. *Les deux triangles idéaux (p_1,p_2,p_3) et (p_3,p_4,p_1) ont des invariants de Cartan opposés.*

Démonstration. – Montrons que les propriétés *1* et *2* sont équivalentes. Supposons *1.* Alors $A\circ\sigma$ (resp. $B\circ\sigma$) est une isométrie antiholomorphe qui échange p_2 et p_3 (resp. p_2 et p_1). Or, d'après le lemme 1, toute isométrie antiholomorphe qui échange deux points est une symétrie réelle. Il suffit alors de poser $I_2=\sigma$, $I_1=A\circ\sigma$ et $I_3=B\circ\sigma$ pour montrer *2.* On peut alors inverser le procédé pour obtenir *1* à partir de *2.*

– Montrons maintenant l'équivalence des propriétés *1* et *3.* La symétrie σ étant antiholomorphe, il est clair que *1* implique *3* par la proposition 2. Réciproquement, si *3* est vérifiée, alors d'après la proposition 2, il existe une isométrie antiholomorphe qui échange p_1 et p_3, et envoie p_4 sur p_2. Le lemme 1 montre que cette isométrie est une symétrie réelle, ce qui prouve *1.*

□

Nous allons maintenant montrer la

Proposition 7. *Soit ρ une représentation préservant le type du groupe fondamental du tore épointé. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un triplet de symétries réelles tel que*

$$\rho(\mathtt{a})=I_1I_2 \text{ et } \rho(\mathtt{b})=I_2I_2$$

2. *L'invariant de Toledo de ρ est nul.*

Démonstration. C'est un conséquence directe de fait que l'invariant de Toledo de ρ vaut $2\mathbb{A}(p_1,p_2,p_3)+2\mathbb{A}(p_3,p_4,p_1)$ et du lemme 4. Il s'agit d'un calcul standard, pour lequel nous renvoyons à [8], ou au chapitre 7 de [6]. □

Remarque 9. D'autres caractérisations de la décomposabilité d'un groupe à deux générateurs en un groupe triangulaire lagrangien sont présentée dans [18].

Remarque 10. Dans [8], Gusevskii et Parker ont montré que pour toute surface non-compacte $\Sigma_{g,p}$ de caractéristique d'Euler négative, il existe une famille à un paramètre de représentations discrètes, fidèles et préservant le type de $\pi_1\left(\Sigma_{g,p}\right)$ dans PU(2,1), sur lesquelles l'invariant de Toledo prend toutes le valeurs admissibles. Ces représentations sont obtenues par passage à un sous-groupe d'indice fini à partir de représentations du groupe modulaire. Dans ce cadre, l'invariant de Toledo est réel, et les valeurs admissibles sont les points de l'intervalle $[\chi,-\chi]$, où χ est la caractéristique d'Euler. Dans le cas particulier du tore épointé, les représentations décrites à la section 7 sont donc en quelque sorte transverses à celles décrites dans [8].

9 Commensurabilité de groupes triangulaires complexes avec des groupes triangulaires lagrangiens vérifiant (1)

9.1 Classification des triplets de droites complexe

Commençons par classifier les triplets de droites complexes (voir par exemple [11]).

Définition 8. Soit (C_1, C_2, C_3) un triplet de droites complexes, et $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ le triplet des vecteurs polaires associés. Pour i , j et k distincts dans $\{1, 2, 3\}$, définissons les invariants

$$\varphi_{ij} = \frac{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i \rangle}{\langle \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i \rangle \langle \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j \rangle} \text{ et } \Phi_{ijk} = \frac{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k \rangle \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_i \rangle}{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i \rangle \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_j \rangle \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_k \rangle}.$$

On vérifie directement à partir de cette définition que $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, et que $\Phi_{ijk} = \Phi_{jki} = \overline{\Phi_{ikj}}$.

Proposition 8. *Deux triplets de droites complexes sont identifiés par une isométrie*
- *holomorphe si et seulement s'ils ont mêmes invariants φ et Φ,*
- *antiholomorphe si et seulement s'ils ont les mêmes invariants φ, mais des invariants Φ conjugués.*

9.2 Décomposition des triplets symétriques de symétries complexes

Définition 9. Soit (R_1, R_2, R_3) un triplet de symétries complexes. Nous dirons qu'il est *symétrique* s'il existe une isométrie elliptique d'ordre trois E telle que $R_2 = ER_1E^{-1}$ et $R_3 = E^{-1}R_1E$.

Proposition 9. *Soit (R_1, R_2, R_3) un triplet symétrique de symétries complexes. Il existe un unique triplet de symétries réelles $(\sigma_1, \sigma_2, I_1)$ tel que*

$$\sigma_1\sigma_2 = E \text{ et } \sigma_1 I_1 = R_1. \tag{9}$$

Démonstration. Par un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 3, et en utilisant la proposition 8 en remplacement de la proposition 2, on vérifie que sous les hypothèses ci-dessus, il existe une unique réflexion réelle σ_k qui préserve C_k, et échange C_{k+1} et C_{k+2}. Dans ces conditions $E = \sigma_1\sigma_2$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 5 ci-dessous à σ_2 et C_2 pour obtenir I_1.

□

Lemme 5. *Soit R une symétrie complexe de miroir C et σ une symétrie réelle préservant C. Il existe une unique symétrie réelle σ' préservant C telle que $R = \sigma \circ \sigma'$.*

Démonstration. C'est une vérification directe. On peut par exemple supposer que C est polaire au vecteur $\mathbf{c} =^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, et que les deux points du bord de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ donnés par $\mathbf{p}_1 =^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{p}_2 =^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont fixés par σ, puis travailler dans la base $(\mathbf{p}_1, \mathbf{c}, \mathbf{p}_2)$. □

Remarque 11. Notons que les deux réflexions σ_1 et I_1 commutent, puisque R_1 est une involution.

Théorème 2. *Soit R_1, R_2, R_3 un triplet symétrique de symétries complexes, tel que le produit R_1R_2 soit non-elliptique. Alors, le groupe $\langle R_1, R_2, R_3\rangle$ est commensurable à un groupe triangulaire lagrangien vérifiant la condition (1).*

Démonstration. Nous allons montrer que le groupe $G = \langle R_1, R_2, R_3\rangle$ est d'indice 6 dans un groupe Γ, qui contient, également avec indice 6, un groupe triangulaire lagrangien satisfaisant (1).
D'après la proposition 9, il existe trois symétries réelles σ_1, σ_2 et I_1 telles que

$$R_1 = \sigma_1 I_1 \text{ et } E = \sigma_1\sigma_2, \tag{10}$$

où E est l'élément elliptique d'ordre trois symétrie du triplet (R_1, R_2, R_3). Posons alors $\Gamma = \langle \sigma_1, \sigma_2, I_1\rangle$.

- Le groupe G est d'indice 6 dans Γ : les classes à gauche suivant G dans Γ sont celles de 1, σ_1, σ_2, $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1$ et $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.
- Posons alors $I_2 = EI_1E^{-1}$ et $I_3 = E^{-1}I_1E$, et $G' = \langle I_1, I_2, I_3\rangle$. Le groupe G' est également d'indice 6 dans Γ, les classes étant les mêmes.
- Le triplet (I_1, I_2, I_3) vérifie la condition (1). En effet :

$$\begin{aligned}
R_1R_2 &= \sigma_1 I_1 \sigma_2 \sigma_1 I_1 \sigma_2 = (I_1\sigma_1\sigma_2)^2 \\
&\quad \text{(en utilisant le fait que } I_1 \text{ et } \sigma_1 \text{ commutent).} \\
I_1I_2I_3 &= I_1\sigma_2\sigma_1 I_1 \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 I_1 \sigma_2\sigma_1 \\
&= I_1\sigma_2 (I_1\sigma_1\sigma_2)^2 \sigma_1 \text{ (en utilisant } \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \text{)}
\end{aligned}$$

  Ce dernier mot est conjugué à $(I_1\sigma_1\sigma_2)^3$. En conséquence, $(I_1I_2I_3)^2$ est conjugué à $(R_1R_2)^3$. L'isométrie $(I_1I_2I_3)^2$ est donc non-elliptique, et vérifie donc la condition (1).

□

9.3 Exemples

9.3.1 Les groupes triangulaires idéaux complexes

Les groupes triangulaires complexes ont été étudié par Goldman et Parker dans [7], puis par R. E. Schwartz dans [13, 14, 16]. Voir également [12]. Il sont définis de la manière suivante. Soit (p_1, p_2, p_3) un triangle idéal. Soit R_k la symétrie par rapport à la droite complexe $(p_{k+1}p_{k+2})^{\mathbb{C}}$. Le groupe triangulaire associé est engendré par R_1, R_2 et R_3. Il est entièrement défini par la donnée des trois points, et peut être vu comme une généralisation au cadre hyperbolique complexe du groupe Γ engendré par les réflexions par rapport à trois géodésiques deux à deux asymptotiques du demi-plan de Poincaré. Au contraire de Γ, qui est rigide dans PSL(2,$\mathbb{R}$), il existe à PU(2,1) près une famille à un paramètre de groupes triangulaires complexes idéaux, donnée par l'invariant de Cartan du triangle idéal $p_1p_2p_3$.

R. E. Schwartz a prouvé dans [14, 16] le résultat suivant, conjecturé et démontré dans une version partielle par Goldman et Parker dans [7].

Théorème 3 (Schwartz). *Le groupe triangulaire idéal complexe $\langle R_1, R_2, R_3\rangle$ est discret si et seulement $R_1R_2R_3$ est non-elliptique.*

Comme nous l'avons vu dans la discussion suivant la proposition 3, les triangles idéaux admettent une symétrie d'ordre trois. Le triplet (R_1, R_2, R_3) est donc également symétrique. Dans ce cas, le produit R_1R_2 est parabolique et le théorème 2 s'applique donc. Par ailleurs, on peut calculer les coordonnées du groupe triangulaire lagrangien obtenu ainsi.

Proposition 10. *Soit $G = \langle R_1, R_2, R_3 \rangle$ un groupe triangulaire complexe idéal, tel que les trois points fixes de des produits R_kR_{k+1} forment un triangle d'invariant de Cartan $\mathbb{A}$. Alors G est commensurable à un groupe triangulaire lagrangien satisfaisant (1), et dont les coordonnées sont*

$$(0, \pi/2, 0, \pi/2, 0, \pi/2, \mathbb{A}).$$

9.3.2 L'espace des modules du groupe modulaire dans PU(2,1)

L'espace des modules des représentations discrètes, fidèles et préservant le type du groupe modulaire PSL(2,$\mathbb{Z}$) dans PU(2,1) a été complètement décrit par Falbel et Parker dans [4], qui fait suite aux travaux [2] et [8]. Il s'agit du seul exemple de groupe (infini) de type fini dont on connaisse toutes les représentations discrètes, fidèles et préservant le type dans PU(2,1).

Théorème 4 (Falbel,Parker,[4]). *L'espace des modules dans PU(2,1) de représentations discrètes, fidèles et préservant le type de PSL(2,$\mathbb{Z}$) comporte six composantes connexes. Quatre d'entre elles sont des points, et correspondent à des représentations rigides, les deux autres sont des segments.*

L'une des deux composantes de dimension un entre dans le cadre des triplets symétriques de symétries complexes. Il s'agit de la composante décrite dans [4] (l'autre composante de dimension 1 apparaissait déjà dans [2] et [8]). Le groupe modulaire possède un sous-groupe d'indice trois engendré par trois demi-tours de $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$. Dans [4], ces trois demi-tours s'envoient par les représentations dans PU(2,1) sur des triplets symétriques de symétries complexes, dont les produits deux à deux sont loxodromiques, et tels que le produit triple $R_1R_2R_3$ est parabolique. Le théorème 2 s'applique donc ici encore. Les coordonnées du groupe triangulaire obtenu ainsi sont calculables, mais s'avèrent peu exploitables.

Références

[1] M. Deraux, E. Falbel, and J. Paupert. New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space. *Acta Math.*, 194 :155–201, 2005.

[2] E. Falbel and P.V. Koseleff. A circle of modular groups in PU(2,1). *Math. Res. Let.*, 9 :379–391, 2002.

[3] E. Falbel and P.V. Koseleff. Rigidity and flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry. *Topology*, 41, 2002.

[4] E. Falbel and J. Parker. The moduli space of the modular group. *Inv. Math.*, 152, 2003.

[5] E. Falbel and V. Zocca. A Poincaré polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. reine angew. Math.*, 516 :133–158, 1999.

[6] W. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry.* Oxford University Press, Oxford, 1999.

[7] W. Goldman and J. Parker. Complex hyperbolic ideal triangle groups. *Journal für dir reine und angewandte Math.*, 425 :71–86, 1992.

[8] N. Gusevskii and J.R. Parker. Complex hyperbolic quasi-fuchsian groups and Toledo's invariant. *Geom. Ded.*, 97 :151–185, 2003.

[9] G. D. Mostow. A remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pac. J. Math.*, 86 :171–276, 1980.

[10] J. Parker and I. Platis. Open sets of maximal dimension in complex hyperbolic quasi-fuchsian space. *J. Diff. Geom*, 73 :319–350, 2006.

[11] A. Pratoussevitch. Traces in complex hyperbolic triangle groups. *Geometriae Dedicata*, 111 :159–185, 2005.

[12] H. Sandler. Traces on $\mathrm{SU}(2,1)$ and complex hyperbolic ideal triangle groups. *Algebras groups and geometries*, 12 :139–156, 1995.

[13] R. E. Schwartz. Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups. *Acta Math.*, 186 :105–154, 2001.

[14] R. E. Schwartz. Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis. *Ann. of Math. (2)*, 153 :533–598, 2001.

[15] R. E. Schwartz. Complex hyperbolic triangle groups. *Proc. Int. Math. Cong.*, 1 :339–350, 2002.

[16] R. E. Schwartz. A better proof of the Goldman-Parker conjecture. *Geometry and Topology*, 9, 2005.

[17] P. Will. *Groupes libres, groupes triangulaires et tore épointé dans PU(2,1)*. Thèse de l'université Paris VI.

[18] P. Will. Traces, cross-ratios and 2-generator subgroups of PU(2,1). *Preprint* disponible sur `www.math.jussieu.fr/ will`

[19] P. Will. The punctured torus and Lagrangian triangle groups in PU(2,1). *J. reine angew. Math.*, 602 :95–121, 2007.