Corrigé du CC du 4 décembre – MAT 354. (1)

Exercice 1.

1) La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$. Le seul problème de définition de I_1 est donc en $+\infty$.

Montrons que I_1 est absolument convergente. Majorons :

$$\left|\frac{\sin(x)\ln(x)}{x^2}\right| \leq \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{puisque } |\sin x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ puisque $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Par <u>théorème de comparaison</u> $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)\ln(x)}{x^2}\right| dx$ est convergente.

Donc <u>I_1 est absolument convergente</u>.

2) $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$. On a donc deux problèmes de définition : en 0^+ et en $+\infty$.

* Etude en 0^+. $\forall x \in [0,1]$, $\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} \geq 0$ et $\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ puisque $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

Donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx$ se comporte comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ qui est convergente. (car $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ et $\frac{1}{2} < 1$)

* Etude en $+\infty$. $\forall x \geq 1$ $\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$. Donc $\int_0^1 \left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| dx$ est convergente puisque $3/2 > 1$.

Par conséquent, <u>I_2 est convergente</u>. Puisque les deux intégrales $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$ sont ACV, elle est même <u>absolument convergente</u>.

②

3) Comme en 2), on a deux problèmes de définition : en 0^+ et en $+\infty$.

* $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sqrt{x}$, donc $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$.

Puisque $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ se comporte comme

$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$, qui est convergente

* Considérons maintenant $\int_1^M \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$, et faisons une IPP.

On a :
$$\int_1^M \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{2x^{3/2}} dx.$$

On a posé
$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}, & u' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{-1}{2x^{3/2}} \\ v' = \sin(x), & v = -\cos(x) \end{cases}$$

Donc
$$\int_1^M \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \cos(1) - \frac{\cos(M)}{\sqrt{M}} - \int_1^M \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}} dx$$

Or $\lim_{M\to+\infty} \frac{\cos M}{\sqrt{M}} = 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}}dx$ est ACV puisque

$$\left|\frac{\cos x}{2x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Donc $\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ existe et est finie : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

converge. Finalement, I_3 est convergente.

4) Remarquons que $x \cdot e^{-\sqrt{\ln x}} = e^{\ln x - \sqrt{\ln x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Donc $\frac{1}{x\, e^{-\sqrt{\ln x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et $\frac{1}{x} = o\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\right)$. Or $x \longmapsto e^{-\sqrt{\ln x}}$

est positive. Par théorème de comparaison, I_4 diverge puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Exercice 2.

1. $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$$

Cette dernière expression est la n-ième somme de Riemann pour la fonction $\frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

D'après le cours, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2).$$

2. On a maintenant

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha \left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = I$ est finie.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^\alpha} = 0$, car $\alpha > 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = 0.$

3. * $\forall x \in [0,1]$ posons $f(x) = \sin x - x$. f est dérivable et $f'(x) = \cos x - 1$ est négative ou nulle. Donc f est décroissante. Or $f(0) = 0$. Donc $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [0,1]$. Donc $\sin(x) \leq x$ $\forall x \in [0,1]$

* De même que précédemment posons $g(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

On a : $g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$

et $g''(x) = -\sin(x) + 1$

Donc $g''(x) \geq 0$ sur $[0,1]$, donc g' est croissante et $g'(0) = 0$

Donc g' est positive et g est croissante. Or $g(0)=0$. Donc g est positive, donc $\forall x \in [0,1]$ $\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$.

Donc finalement :

$$\forall x \in [0,1] \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

4. D'après la question 3, on a :

$\forall k \geq 1$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} \leq \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Donc $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{6k^3} \leq \sum_{n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or (question 1) : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$

et (question 2) : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} = 0$.

Finalement on voit par le th des gendarmes que

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \ln(2)}.$$

Exercice 3

1) La fonction $x \longmapsto \frac{4x}{x^4-1}$ est continue sur $[2;+\infty[$ et positive sur $[2,+\infty[$. De plus, $\frac{4x}{x^4-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x^3}$, donc l'intégrale est convergente.

Par conséquent, (th de comparaison), I est convergente.

2. On cherche a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in [2 ; +\infty[\quad \frac{4x}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}.$$

* Multiplions par $(x-1)$: on obtient :

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1}(x-1) + c + d\,\frac{x-1}{x+1}$$

(on utilise $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$)

Faisons $x = 1$. On obtient $\underline{c = 1}$.

* De même en multipliant par $x+1$ et en faisant $x = -1$, on obtient $\underline{d = 1}$

* On a donc : $\dfrac{4x}{x^4-1} = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$

Faisons alors $x = 0$. On obtient $\underline{0 = b}$

* Reste donc à déterminer a.

On a : $\dfrac{4x}{x^4-1} = \dfrac{ax}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.

Multiplions par x :

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{ax^2}{x^2+1} + \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$$

Et faisons $x \to +\infty$. On obtient alors :

$$0 = a + 2. \qquad \text{Donc } a = -2.$$

<u>Finalement</u> : $\dfrac{4x}{x^4-1} = \dfrac{-2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$

3. On peut maintenant calculer l'intégrale.

$$\int_2^X \frac{4x}{x^4-1}\,dx = \Big[-\ln(1+x^2)\Big]_2^X + \Big[\ln(x-1)\Big]_2^X + \Big[\ln(x+1)\Big]_2^X$$

$$= -\ln(1+X^2) + \ln(X-1) + \ln(X+1) + \ln(5) - \ln(1) - \ln(3)$$

$$= \ln\left(\frac{X^2-1}{X^2+1}\right) + \ln(5) - \ln(3)$$

car $\ln(1+X) + \ln(X-1) - \ln(1+X^2) = \ln\left(\frac{(X+1)(X-1)}{1+X^2}\right)$

$$\xrightarrow[X\to+\infty]{} \ln(5/3).$$

Donc $\underline{I = \ln(5/3)}$