Modélisation

Contrôle continu du 20 octobre 2017, de 13h15 à 15h15.

Documents et calculatrices autorisés.

Les exercices sont indépendants.

1. Prix d'un billet de train (5 points)

Le prix plein tarif d'un billet dépend de la distance en kilomètre b selon une expression affine par morceaux donnée par le tableau suivant (tarification nationale SNCF) :

1 à 16km	$0.7781+0.1944\times b$
17 à 32km	$0.2503+0.2165\times b$
33 à 64km	$2.0706+0.1597\times b$
65 à 109km	$2.8891+0.1489\times b$
110 à 149km	$4.0864+0.1425\times b$
150 à 199km	$8.0871+0.1193\times b$
200 à 300km	$7.7577+0.1209\times b$

(1) Calculer le prix d'un billet plein tarif St Etienne-Grenoble, et comparer avec la somme des prix d'un billet St Etienne-Lyon et d'un billet Lyon-Grenoble. On prendra comme distance 58km pour St Etienne-Lyon et 129km pour Lyon-Grenoble.

(2) Quelle est l'allure de la représentation graphique du prix en fonction de la distance ?

(3) Calculer le prix d'un billet St Etienne-Grenoble avec 25% de réduction, d'un billet St Etienne-Lyon avec 25% de réduction et d'un billet Lyon-Grenoble avec 50% de réduction.

(4) Un étudiant muni d'une carte de réduction Jeune désire faire le trajet St Etienne-Grenoble un dimanche soir en partant de St Etienne à 19h13, avec un changement à Lyon, départ à 20h14. Le dimanche, la carte de réduction donne 25% de réduction sur le prix du billet plein tarif pour un trajet commencé entre 15h et 20h, et 50% de réduction pour un trajet commencé après 20h. L'étudiant a-t-il intérêt à acheter deux billets ou un seul ?

(5) Écrire un algorithme de calcul de prix du billet plein tarif sous la forme d'une fonction prenant en argument la distance b et le taux de réduction.

(6) *Bonus* Modifier l'algorithme précédent en ajoutant en argument la matrice de 7 lignes et 3 colonnes contenant en première colonne la borne supérieure du kilométrage, en deuxième colonne l'ordonnée à l'origine et en troisième colonne la pente de l'application affine du tableau ci-dessus.

2. D'après bac S 2016 Nouvelle Calédonie.

2.1. **D'après l'exercice 5 non spécialité (5 points).** Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note $u_0 = 1$ le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude. Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année.

(1) Déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}

(2) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

(3) Peut-on trouver une valeur de c telle que la suite (u_n) converge vers 100 000 ? Si oui, donner l'expression de u_n en fonction de n.

(4) Proposer un modèle continu correspondant à ce modèle discret.

2.2. **D'après l'exercice 5 spécialité (6 points).** On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5.1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour. Donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0.9\,(u_{n+1} - u_n).$$

(1) Déterminer u_2 et u_3. Écrire un algorithme permettant de déterminer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

(2) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1.9 & -0.9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.

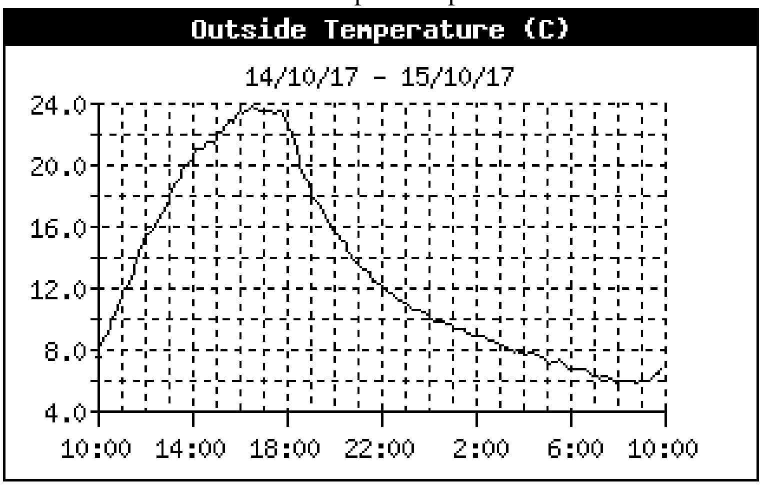
(b) Diagonaliser la matrice A et en déduire que :

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0.9^{n+1} + 10 & 10 \times 0.9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0.9^n + 10 & 10 \times 0.9^n - 9 \end{pmatrix}$$

(3) Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

3. Modélisation de l'évolution de la température (5 points)

On a relevé au Versoud la température pendant 24h :



L'heure t figure en abscisse (quadrillage toutes les heures), et la température T en ordonnée. Ainsi à 18h, il faisait environ 23 degrés, à 22h environ 12 degrés, et le minimum relevé était de 6 degrés.

(1) Modéliser la température nocturne par un modèle d'évolution linéaire (continu ou discret) que vous détaillerez quantitativement (par exemple on pourra justifier qu'avec un pas de temps de 2h entre 18h et 8h, l'écart de température modélisé entre 2 mesures successives devrait se comporter comme une suite géométrique).

(2) Votre modèle est-il de bonne qualité ?

(3) Comment pourrait-on modéliser l'évolution de la température diurne, en admettant que le rayonnement solaire varie comme $\max(0, c + d\sin(2\pi \frac{t-t_0}{24}))$ avec $c = -0.69$ et $d = -0.13$ (t_0 est un décalage tenant compte de l'heure d'été et de la longitude du Versoud).