UGA Mat404 2021

Examen du 21 juin, 13h30-15h30.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet est composé de 4 exercices (barême indicatif non contractuel : 4, 5, 5, 6).

Exercice 1

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a \in \mathbb{R}$, considérons l'application

$$\varphi_a : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, (P,Q) \mapsto P(1)Q(1) + P(-2)Q(-2) + P(0)Q(a)$$

1. Justifier brièvement que φ_a est une forme bilinéaire. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, φ_a est-elle symétrique ?
2. On suppose φ_a symétrique. Notons $q_a(P) = \varphi_a(P,P)$ la forme quadratique associée. Montrer que q_a est positive. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$ est-elle un produit scalaire ?

Exercice 2

Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que l'on peut diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ puis diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (indication : on pourra vérifier que 4 est valeur propre de A).
2. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Est-ce un produit scalaire ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ simultanément orthogonale pour le produit scalaire usuel et pour ϕ.

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2. Soit q l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$q(A) = \operatorname{tr}(A^2) + \det(A).$$

(la trace $\operatorname{tr}(B)$ de la matrice B est la somme des éléments diagonaux de B).

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Calculer $q(A)$.
2. En appliquant la méthode de Gauss, décomposer $q(A)$ en sommes et différences de carrés.
3. Donner le rang et la signature de q. Si ϕ désigne la forme billinéaire associée à q, est-ce que ϕ est un produit scalaire ?
4. Donner une base $\mathcal{B}$ qui soit $\phi-$orthogonale. Est ce que $\mathcal{B}$ peut être choisie $\phi-$orthonormale ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$. Aide aux calculs : on pourra utiliser sans justification :

$$\int e^x \sin(nx)\, dx = e^x \left(\frac{\sin(nx)}{n^2+1} - \frac{n\cos(nx)}{n^2+1} \right)$$

   puis y faire le changement de variable $x = -t$.
3. En quels points de $[-\pi, \pi]$ la fonction f est-elle égale à son développement en série de Fourier ? Justifier.
4. Montrer que l'identité de Parseval s'applique et déterminer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$$