UGA Mat404 2022

Examen du jeudi 19 mai, 8h30-10h30.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.

Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.

Ce sujet est composé de 4 exercices (barême indicatif non contractuel : 3, 7, 6, 4).

1 Question de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ et $B = (v_1, ..., v_n)$ une base orthonormale de E. Énoncer et justifier la formule donnant les coordonnées d'un vecteur $w \in E$ dans la base B en fonction du produit scalaire.

2 Série de Fourier

Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = t|t|$$

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f sur $[-\pi, \pi]$. On pourra utiliser sans justification (bonus : le justifier) :
$$\int_0^\pi x^2 \sin(nx)\, dx = -\frac{(-1)^n \pi^2}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}$$
3. On considère le produit scalaire défini sur l'espace vectoriel $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ à valeur réelle par :
$$\langle g|h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(t)dt$$
Quelle est la projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions 1, cos et sin (où 1 est la fonction constante égale à 1 et cos et sin sont les fonctions cosinus et sinus) ?
4. En quels points de $[-\pi, \pi]$ la fonction f est-elle égale à son développement en série de Fourier ? Justifier.
5. En calculant $f(\pi/2)$ de deux manières déterminer une relation entre $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
6. On admet que
$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$
en déduire la valeur de $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

   Vérifier la vraissemblance du résultat en calculant une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ à l'aide de la calculatrice.

3 Forme quadratique

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application bilinéaire $\Phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4+\alpha & 2-2\alpha & \alpha \\ 1 & 2-2\alpha & 1+4\alpha & 2-2\alpha \\ 0 & \alpha & 2-2\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'expression de la forme quadratique q associée à Φ.
2. En appliquant la réduction de Gauss, donner la signature et le rang de Φ en fonction de α (on pourra distinguer le cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$). Pour quelles valeurs de α s'agit-il d'un produit scalaire ?
3. Donner une base Φ-orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

4 Matrice de symétrie

Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier que 1 et -1 sont valeurs propres de A
2. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de ϕ
3. *Bonus* : Montrer que ϕ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on déterminera.