Contrôle Continu 1

11 mars 2021

Durée: 2 heures   Calculatrice et feuille recto-verso manuscrite A4 autorisées

Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible d'être modifié.
La précision, la concision et la clarté des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation

Exercice I (Noyaux et images, 3 points)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ à coefficients réels. On notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que l'application $f : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto AX \in \mathbb{R}^n$ est linéaire. À quelle condition est elle inversible ?

2) Déterminer le noyau et l'image de f dans le cas où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) Déterminer le noyau et l'image de f dans le cas où $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice II (Forme bilinéaire, 7 points)
Soit $\mathbb{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degrée au plus 1. Soient a,b deux réels, et ϕ : $\mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(P,Q) = P'(a)Q(b) + P(b)Q(a)$ pour $P,Q \in \mathbb{R}_1[X]$.

1) Montrer que ϕ est bilinéaire.

2) On fixe les bases $\mathcal{B}_1 = \{1,X\}$, $\mathcal{B}_2 = \{X - 1, X + 1\}$ de $\mathbb{R}_1(X)$. Déterminer la matrice $M_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(\phi)$.

3) Pour cette question, on fixe $a = 0$ et $b = 1$. Déterminer la matrice $M_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(\phi)$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$. Quelle formule permet de passer de M_1 à M_2 ?

4) Pour quelle valeur de a et b, l'application ϕ est-elle symétrique ?

5) On fixe $a = 1$ et $b = 0$. Déterminer $\ker(\phi)$ et déterminer $\mathrm{Vect}(X)^\perp$ l'orthogonal pour ϕ de $\mathrm{Vect}(X)$.

Exercice III (Forme quadratique, 3 points)
Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z,t) = x^2 - 3y^2 - t^2 + 3z^2 + 2xy - 4yt$$

.

1) Déterminer l'unique application bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$ on ait $q(u) = \phi(u,u)$.

2) Déterminer le rang de q par la méthode de votre choix.

Exercice IV (Algèbre linéaire et Mécanique quantique, 9 points)
Soient U et V deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, $f : U \longmapsto V$ une application linéaire.

1) *Question de cours :* Rappeler les critères permettant de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de U. Montrer que le noyau de f est un sous espace vectoriel de U.

2) Soit $U = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions f indéfiniment dérivables de deux variables à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$f : \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to f(x,t) \in \mathbb{C}$$

Montrer que l'application de dérivée partielle suivante est linéaire : $\frac{\partial}{\partial x} : f \in U \to \frac{\partial f}{\partial x} \in U$

3) En déduire que le Laplacien spatial $\Delta : f \in U \to \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in U$ est linéaire sur U.

4) On se donne h,m deux réels positifs. Déduire de ce qui précède que l'opérateur de Schrödinger S défini ci-dessous est linéaire sur U :

$$S = ih\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\Delta$$

5) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de $S(f) = 0$? [1]

6) On cherche ces solutions sous la forme d'ondes planes. Pour l'opérateur de Schrödinger, les ondes planes représentent des particules libres, de quantité de mouvement $p \in \mathbb{R}$ et d'energie $E \in \mathbb{R}$,

$$f(x,t) = e^{\frac{i}{h}(Et-px)}$$

Quelle relation doivent satisfaire E, p et m pour que f donnée par la formule ci-dessus soit solution de

$$-ih\frac{\partial}{\partial t}f = \frac{h^2}{2m}\Delta f$$

Commenter.

7) Soient $E_1, E_2, E_3 \in \mathbb{R}$ et $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ des réels 2 à 2 distincts. On veut montrer que la famille d'ondes planes $((x,t) \mapsto e^{\frac{i}{h}(E_k t - p_k x)})_{k\in\{1,2,3\}}$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$. Pour ce faire, on considère une combinaison linéaire d'ondes planes

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e^{\frac{i}{h}(E_k t - p_k x)} = 0$$

nulle en tout temps $t \in \mathbb{R}$ et en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que les coefficients λ_1,λ_2,λ_3 satisfont le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1^2 & E_2^2 & E_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

Indice : On pourra dériver successivement et évaluer en une paire (x,t) bien choisie.

8) Notons $M(E_1,E_2,E_3)$ la matrice 3×3 ci-dessus, elle est connue sous le nom de *matrice de Vandermonde* de paramètres E_1,E_2,E_3. On veut montrer que celle ci est inversible, dès que les E_i sont deux à deux distincts. Comment justifier qu'une matrice carrée est inversible à l'aide du déterminant ?

9) Montrer que

$$\det M(E_1,E_2,E_3) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3} (E_j - E_i)$$

10) En déduire que la famille des $((x,t) \mapsto e^{\frac{i}{h}(E_k t - p_k x)})_{k\in\{1,2,3\}}$ est libre.

1. En mécanique quantique, cette propriété est connue sous le nom de *principe de superposition.*