UGA Mat404 2020

Contrôle continu du mercredi 11 mars, 7h30-9h30.

Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrices autorisées.
Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.
Ce sujet comporte 2 pages, le barême est indicatif et tiendra compte de la longueur du sujet.

Exercice 1 (4 pts)

Soit V l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. Soit $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P,Q) = P(1)Q(0) - P(0)Q(1)$$

1. Comparer $\varphi(Q,P)$ et $\varphi(P,Q)$. Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de V.
3. Montrer que $B' = (X, X-1, (X-1)^2)$ est une base de V.
4. Déterminer dans l'ordre de votre choix la matrice N de φ dans la base B', la matrice de passage P de la base B vers la base B' et la matrice $Q = {}^tPMP$.

Exercice 2 (8 points)

On se place dans V l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la forme $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$\phi(f,g) = \int_0^2 f(t)g(t)\, dt$$

1. Comparer $\phi(f,g)$ et $\phi(g,f)$. Montrer que ϕ est bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
2. Soit W le sous-espace vectoriel de V engendré par les fonctions $f_0 : t \to 1$, $f_1 : t \to t-1$, $f_2 : t \to (t-1)^2$. Montrer que $B = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de W.
3. Vérifier que f_1 est ϕ-orthogonale à f_0 et f_2.
4. Calculer la matrice M de la forme ϕ restreinte à W dans la base B.
5. Déterminer un réel c tel que f_0 soit ϕ-orthogonal à $f_2 - cf_0$. En déduire une base B' de W qui est ϕ-orthogonale.
6. Déterminer la matrice de ϕ dans la base B'.
7. Soit q la forme quadratique associée à ϕ (on a donc $q(f) = \phi(f,f)$ pour $f \in W$). Soit a,b,c les coordonnées de f dans la base B. Exprimer q en fonction de a,b,c.
8. Réduire par la méthode de Gauss l'expression de q en fonction de a,b,c.
9. En déduire le rang, la signature de q et une base q-orthogonale de W.

Exercice 3 (7 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel et soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

1. Donner la forme bilinéaire φ dont la matrice dans la base canonique est M.
2. Calculer le noyau de la forme bilinéaire φ et donner son rang.

3. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Selon les valeurs du paramètre a, donner une base de l'orthogonal pour φ de F.
4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles $v \in F^{\perp}$?
5. Donner la forme quadratique q associée à la forme bilinéaire φ.
6. Par l'algorithme de Gauss, réduire la forme quadratique q (on pourra distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).
7. En déduire, selon les valeurs de a, la signature de q.

Exercice 4 (5 points)

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit φ une forme bilinéaire sur V telle que $\varphi(x,x) = 0$ pour tout $x \in V$.
   Pour $x, y \in V$, développer $\varphi(x+y, x+y)$.
   En déduire que φ est antisymétrique (c'est à dire que l'on a $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$ pour tout $(x,y) \in V^2$).
2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que φ vérifie pour tous vecteurs x et y de V

   $$\text{si } \varphi(x,y) = 0 \text{ alors } \varphi(y,x) = 0 \quad (*)$$

   On suppose dans cette question qu'il existe $z_0 \in V$ tel que $\varphi(z_0, z_0) \neq 0$.
   (a) Soit $x \in V$. On pose $a = \varphi(z_0, x)$ et $b = \varphi(z_0, z_0)$.
   Montrer que $\varphi(z_0, bx - az_0) = 0$. En déduire que $\varphi(z_0, x) = \varphi(x, z_0)$.
   (b) Soit $(x,y) \in V^2$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(z_0, dz_0 + y) \neq 0$, puis qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(cz_0 + x, dz_0 + y) = 0$ (on ne demande pas de calculer c et d).
   Développer $\varphi(cz_0 + x, dz_0 + y)$ et $\varphi(dz_0 + y, cz_0 + x)$. En déduire que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
3. En conclure que si φ est une forme bilinéaire sur $V \times V$ vérifiant la condition $(*)$, alors φ est soit antisymétrique, soit symétrique.