Rappel développements limités:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(|x|^k)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2k})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2k+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^k + \underset{x \to 0}{o}(|x|^k)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(|x|^k).$$

Rappels équivalents:

$u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n$ signifie que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang
(càd. il existe n_0 t.q. $v_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$)
et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

- Si $u_n \overset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $u_n' \underset{n\to\infty}{\sim} v_n'$, alors

$$u_n \cdot u_n' \overset{n\to\infty}{\sim} v_n v_n'$$

$$\frac{u_n}{u_n'} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{v_n}{v_n'}$$

(les équivalents se comportent bien par rapport au produits/quotients).

- En général, $u_n \sim v_n$ et $u_n' \sim v_n'$ n'implique pas que $u_n + u_n' \sim v_n + v_n'$
(les équivalents ne se comportent <u>pas</u> bien par rapport aux sommes/différences)

<u>exemple</u>: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$ car $\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{n^2+n}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$$-\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

mais $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$

n'est pas équivalent à

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)+\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}.$$

- en général, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} f(v_n)$

Sans des hypothèses sur f.

Par exemple: $n^2+n \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$

mais $$\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}}=\frac{e^{n^2}\cdot e^{n}}{e^{n^2}}=e^{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

càd e^{n^2+n} n'est pas du tout équivalente à e^{n^2}.