Exercice 1

En remplaçant x par 0, 1, 2 puis 4, on obtient le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & d & = & 7 \\ a & + & b & + & c & + & d & = & 3 \\ 2^3a & + & 2^2b & + & 2c & + & d & = & -4 \\ 4^3a & + & 4^2b & + & 4c & + & d & = & 6 \end{array}\right.$$

On peut le résoudre en réduisant la matrice du système

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

par l'instruction `rref` ou `RREF` (selon la calculatrice). On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (-45)/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

donc $a = 11/8$, $b = -45/8$, $c = 1/4$ et $d = 7$, d'où

$$P = \frac{11}{8}x^3 - \frac{45}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 7$$

On peut vérifier sur certaines calculatrices avec l'instruction `LAGRANGE`.

Exercice 2

1. On a :

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

le deuxième se déduisant du premier en remplaçant t pat $-t^2$. Il s'agit de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, on peut donc intégrer terme à terme et on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Le terme général de cette série est le produit de $(-1)^n$ qui est de signe alterné par $a_n = x^{2n+1}/(n!(2n+1))$ qui est positif, majoré par $1/(n!(2n+1))$ pour

$x \in [0,1]$ donc de limite 0. De plus a_n décroit car :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^2}{n+1}\frac{2n+1}{2n+3} < 1$$

Donc la série est alternée.
Si S_k désigne la somme partielle jusque k de la série, on peut donc majorer le reste $F(x) - S_k$ par la valeur absolue du premier terme non sommé :

$$|F(x) - S_k| \leq |a_{k+1}| \leq \frac{1}{(k+1)!(2k+3)}$$

Pour avoir $F(1)$ à 10^{-4} près, il suffit que

$$\frac{1}{(k+1)!(2k+3)} \leq 10^{-4}$$

En testant pour $k = 1, 2, 3, ...$ on trouve que la première valeur de k qui convient est $k = 6$. Le calcul de S_6 donne alors 0.746836... qui est une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-4} près.

2. En appliquant Simpson sur une subdivision, on obtient :

$$\frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1)) \approx 0.747180...$$

Sur 10 subdivisions, on obtient :

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{9}\left(f(\frac{k}{10}) + 4f(\frac{k/10 + (k+1)/10}{2}) + f(\frac{k+1}{10})\right) \approx 0.746824183875$$

3. On calcule les dérivées à la calculatrice, on obtient

$$f^{[4]}(t) = 4(4t^4 + -12t^2 + 3)e^{-(t^2)} \quad f^{[5]}(t) = (-(8(4t^4 + -20t^2 + 15)t))e^{-(t^2)}$$

On peut donc mettre $f^{[4]}(t)$ sous la forme $P(t^2)e^{-t^2}$ avec $P(x) = 4(4x^2 - 12x + 3)$ et $f^{[5]}(t)$ sous la forme $tQ(t^2)e^{-t^2}$ avec $Q(x) = -8(4x^2 - 20x + 15)$.

4. On calcule les racines du polynôme Q de degré 2 en utilisant la fonction `solve` ou `SOLVE`, ce sont $x_1 = (-\sqrt{10} + 5)/2$ et $x_2 = (\sqrt{10} + 5)/2$ qui sont positifs. On s'intéresse à $t \in [0,1]$ donc $x = t^2 \in [0,1]$, on a $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$. Le signe de $Q(t^2)$ est donc négatif sur $[0, \sqrt{x_1}]$ et positif sur $[\sqrt{x_1}, 1]$, de même pour le signe de $f^{[5]}$.

5. Donc $f^{[4]}$ décroit sur $[0, \sqrt{x_1}]$ et croit sur $[\sqrt{x_1}, 1]$. On calcule $f^{[4]}(0) = 12$, $f^{[4]}(1) = -20/e \approx -7.36$ et

$$f^{[4]}(\sqrt{x_1}) = P(x_1)e^{-x_1} = (-16\sqrt{10} + 32)e^{-(-(\sqrt{10})+5)/2} \approx -7.42$$

Le maximum en valeur absolue de $f^{[4]}$ est égal au maximum des valeurs absolues des 3 nombres précédents, c'est donc 12. Finalement :

$$|F(1) - S(h)| \leq \frac{1}{2880}|f^{[4]}(\xi)|h^4 \leq \frac{1}{2880}12h^4 = \frac{h^4}{240}$$

6. Pour $h = 1$, l'erreur est donc majorée par $1/240 \approx 4e-3$, pour $h = 0.1$, elle est majorée par $10^{-4}/240 \approx 4e-7$. Pour avoir une erreur plus petite que 10^{-4} il suffit que
$$\frac{h^4}{240} \leq 10^{-4}$$
soit
$$h \leq 10^{-1} 240^{1/4} \approx 3.94e-1$$
Comme $1/h$ est un entier (c'est le nombre de subdivisions de l'intervalle $[0, 1]$), on en déduit que $h = 1/3$ (3 subdivisions) donne une valeur approchée de $F(1)$ à 10^{-4} près.

7. La majoration
$$|F(x) - S(h)| \leq \frac{h^4}{240}$$
reste valable, car $\xi \in [0, x]$ donc $\xi \in [0, 1]$ (la majoration sur la dérivée quatrième est donc valide) et la taille de l'intervalle est $x \leq 1$. On peut donc conserver $h = 1/3$. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-12} près, le calcul donne $h = 1/255$.

8. Le développement en séries entières est le plus efficace, car on n'a pas besoin de calculer beaucoup de termes dans le développement, même pour une précision de 10^{-12} (il faut alors prendre $k = 14$), et chaque terme calculé ne fait intervenir que des produits et des divisions. Par contre Simpson à 10^{-12} nécessiterait de calculer 511 valeurs de la fonction f, qui nécessitent pour chacun le calcul d'une exponentielle ce qui est plus couteux !