UJF 2012-2013 UE MAT237 Contrôle du 5 novembre 2012 (8h-10h)

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (8pts)

On considère la courbe Γ paramétrée sur $I =]-1,1[$ par $x(t) = \dfrac{t^2}{1-t}, \quad y(t) = \dfrac{t^4}{1-t^2}$.

1) Vérifier que la courbe Γ possède un seul point singulier S. Préciser la tangente en S puis la nature de S [on pourra utiliser un développement limité en ce point].

2) Montrer que Γ admet deux droites asymptotes que l'on déterminera.

3) Etudier la convexité de Γ [on pourra admettre que $\delta = x'y'' - x''y' = -2\,\dfrac{(t^3-6t-8)t^3}{(1-t^2)^3}$].

4) Dresser un tableau de variation de $x(t)$ et $y(t)$ sur $]-1,1[$.

5) Tracer la courbe Γ.

Exercice 2 (12pts)

On considère la courbe plane C dont le point de paramètre $s \in \mathbb{R}$ est $f(s) = (x(s), y(s))$ où

$$x(s) = s - 2\arctan(s) \quad y(s) = \ln(1+s^2).$$

1) Calculer le vecteur vitesse $f'(s) = (x'(s), y'(s))$ (on rappelle que la dérivée de $\arctan(s)$ est $1/(1+s^2)$). En déduire que C est paramétrée par longueur d'arc (c'est-à-dire $||f'(s)|| = 1$).

2) Déterminer le repère de Frenet $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ de C au point $f(s)$.

3) Calculer la courbure signée $\kappa(s)$ au point $f(s)$.

4) Montrer que le centre de courbure en $f(s)$ est $O(s) = (2s - 2\arctan(s), \ln(1+s^2) + (1-s^2)/2)$.

Soit D la développée de C paramétrée par $s \mapsto O(s)$.

Indication : pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser un résultat du cours concernant $\kappa(s)$ (ou $R(s)$ le rayon de courbure de C en s) ou s'en sortir directement à partir de la paramétrisation de D ci-dessus.

5) Déterminer les points singuliers de D et leur nature.

6) Calculer la longueur de D entre $O(1)$ et $O(2)$.

7) Tracer le cercle osculateur $\Gamma(1)$ à C au point $f(1)$ et indiquer comment l'arc des points de paramètre $s \geq 0$ de la courbe C est situé par rapport à $\Gamma(1)$.

Exercice 3 (5pts) Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ par $\omega = 2ydx + xdy$.

1) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

2) Calculer l'intégrale curviligne $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ où γ_1 est l'arc de parabole paramétré par $t \in [0,1] \mapsto (t, t^2)$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$ où γ_2 est l'arc paramétré par $t \in [0, \pi/2] \mapsto (t, \sin t)$.

4) Comparer les résultats. Que retrouve-t-on ? Cette question a été neutralisée.

5) Que peut on dire de la forme $\omega_1 = h(x,y)\omega$ où $h(x,y) = x$?

***

Corrigé du contrôle du 5 novembre 2012

Exercice 1. On a $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{t^4}{1-t^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t(2-t)}{(1-t)^2} \\ y'(t) = \dfrac{2t^3(2-t^2)}{(1-t^2)^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x''(t) = \dfrac{2}{(1-t)^3} \\ y''(t) = \dfrac{2t^2(6-3t^2+t^4)}{(1-t^2)^3} \end{cases}$

1) On a $x'(t) = y'(t) = 0 \iff t = 0$ et $x(t) = t^2(1+o(t))$ et $y(t) = t^4(1+o(t^2))$ ce qui donne $(x(t), y(t)) = (t^2+o(t^2))(1,0)+(t^4+o(t^4)(0,1)$ et donc $p = 2$ et la tangente en $S = (x(0), y(0)) = (0,0)$ est dirigée pas le vecteur $(1,0)$ et $q = 4$ donc S est un point de rebroussement de seconde espèce.

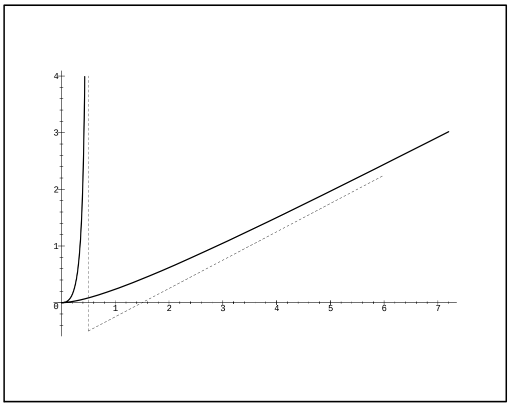
2) Il y a deux branches infinies. Lorsque $t \to -1^+$, $x(t) \to 1/2$ et $y(t) \to +\infty$ d'où l'asymptote verticale d'équation $x = 2$. Lorsque $t \to 1^-$, on constate que $y/x \to 1/2$ et ensuite que $y - x/2 \to -3/4$ ce qui donne pour asymptote la droite d'équation $y = x/2 - 3/4$.

3) $\delta = x'y'' - x''y' = -2\,\dfrac{(t^3-6t-8)t^3}{(1-t^2)^3}$ est du signe de t car $h(t) = t^3 - 6t - 8$ reste négatif sur $[-1,1]$, du fait que $h'(t) = 3t^2 - 6 < 0$ sur $[-1,1]$ et $h(-1) = -3 < 0$.

4) Tableau de variation pour $t \in]-1,1[$:

t	-1		0		1
x'	$-3/4$	$-$	0	$+$	$+\infty$
x	$1/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5)



La courbe Γ

Exercice 2.

1) $x'(s) = \dfrac{s^2-1}{1+s^2}$ $y'(s) = \dfrac{2s}{1+s^2}$ d'où $x'^2(s)^2 + y'^2(s) = \dfrac{(s^2-1)^2+4s^2}{(1+s^2)^2} = \dfrac{s^4+2s^2+1}{(1+s^2)^2} = 1$ donc C est paramétrée par longueur d'arc.

2) $\vec{t}(s) = \left(\dfrac{s^2-1}{1+s^2}, \dfrac{2s}{1+s^2}\right)$ et $\vec{n}(s) = \left(\dfrac{-2s}{1+s^2}, \dfrac{s^2-1}{1+s^2}\right)$.

3) Par définition, la courbe C étant paramétrée par longueur d'arc, la courbure signée $\kappa(s)$ vérifie $\vec{t}'(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$ (1ère formule de Frenet) or on a $\vec{t}'(s) = \left(\dfrac{4s}{(1+s^2)^2}, \dfrac{2(1-s^2)}{1+s^2)^2}\right) = -\dfrac{2}{1+s^2}\vec{n}(s)$ d'où $\kappa(s) = -\dfrac{2}{1+s^2}$.

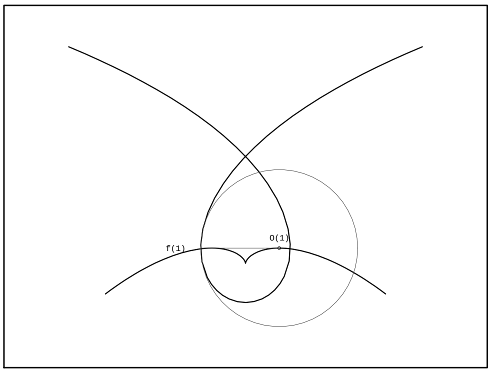
4) $O(s) = f(s) + \rho(s)\vec{n}(s)$ où $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ est le rayon de courbure signé. Donc

$$O(s) = \big(s-2\arctan(s), \ln(1+s^2)\big) - \frac{1+s^2}{2}\Big(-\frac{2s}{1+s^2}, \frac{s^2-1}{1+s^2}\Big) = \Big(2s-2\arctan(s), \ln(1+s^2)+\frac{1-s^2}{2}\Big).$$

5) Les points singuliers de D correspondent aux zéros de $\kappa'(s) = \dfrac{4s}{(1+s^2)^2}$ donc seul $O(0) = (0, 1/2)$ est singulier sur D. De plus $\kappa''(s) = 4\dfrac{1-3s^2}{(1+s^2)^3} \Rightarrow \kappa''(0) = 4$ donc $f(0)$ est un sommet non dégénéré de C et d'après le cours $O(0)$ est un point de rebroussement de 1ère espèce.

6) D'après le cours (ou par calcul direct) la longueur L de D entre $O(1)$ et $O(2)$ est $L = |R(2) - R(1)| = \dfrac{1+2^2}{2} - \dfrac{1+1^2}{2} = \dfrac{3}{2}$.

7) Le cercle osculateur $\Gamma(1)$ à C au point $f(1)$ est le cercle de centre $O(1) = (2-\pi/2, \ln 2)$ et de rayon $R(1) = 1$. Comme la fonction $K(s) = \dfrac{2}{1+s^2}$ est strictement décroissante sur $[0, \infty[$, d'après le cours, l'arc C' des points de paramètre $0 \leq s \leq 1$ de la courbe C est intérieur à $\Gamma(1)$ et l'arc C'' des points de paramètre $s \geq 1$ de la courbe C est extérieur à $\Gamma(1)$.



Exercice 3 Soit ω la forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ par $\omega = 2ydx + xdy$.

1) ω n'est pas *fermée* car

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x).$$

ce qui implique que ω n'est pas exacte non plus.

2) On a $I_1 = \displaystyle\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 2t^2dt + td(t^2) = \int_0^1 2t^2dt + 2t^2dt = \Big[\frac{4t^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$ si γ_1 est l'arc de parabole paramétré par $t \in [0,1] \mapsto (t, t^2)$.

3) On a $I_2 = \displaystyle\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\pi/2} 2\sin t dt + td(\sin t) = \int_0^{\pi/2} 2\sin t dt + \int_0^{\pi/2} t\cos t dt =$

$\displaystyle\Big[-2\cos t\Big]_0^{\pi/2} + \Big[t\sin t\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1 + \frac{\pi}{2}$ si γ_2 est l'arc $t \in [0, \pi/2] \mapsto (t, \sin t)$.

4) Neutralisée

5) La forme $\omega_1 = h(x,y)\omega = 2xydx + x^2dy = d(x^2y)$ est exacte.

***