Université Grenoble Alpes Année 2019-2020
Module MAT 307

Examen terminal du 6 Janvier 2020

Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée. Calculatrices autorisées

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée 2h

Exercice 1– [*6 points*]

On considère la courbe polaire $r(\theta) = \sqrt{|\cos(2\theta)|}$.
(N.B. : pour l'usage de la calculatrice, il sera intéressant de donner une définition simplifiée pour les angles tels que $\cos(2\theta)$ *est positif, puis une autre quand ceci est négatif)*

1. Etudier la courbe (domaine de définition, variation et convexité) puis tracer la.
   (N.B. : pour la convexité, il suffit de faire le calcul avec la calculatrice)
   On définit "une boucle" comme la portion de courbe comprise entre deux passages consécutifs par le point $(0,0)$.
2. Après avoir exprimer la longueur de la boucle de droite (c'est à dire contenant le point $(1,0)$) juste comme une intégrale d'une fonction de $\cos(2\theta)$, donner une valeur approchée de cette longueur.
3. En passant en paramétrage $(x(t), y(t)) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, calculer l'aire de la boucle de droite. Donner une valeur approchée du centre d'inertie.

Exercice 2 (*Compétition moutons/lapins*)–[*14 points*]

On considère qu'une population de lapins $x(t)$ est en compétition avec une population de moutons $y(t)$ concernant la même nourriture (herbe). Il est alors classique de modéliser l'évolution des populations par le système suivant :

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

où $f_1(x,y) = x(3-x-2y)$ et $f_2(x,y) = y(2-x-y)$.

1. Montrer qu'il y a quatre solutions stationnaires (c-à-d 4 paires (x,y) tels que $x' = y' = 0$).
2. *Evolution des lapins sans moutons*
   Dans cette partie, nous considérons qu'il n'y a pas de mouton (c-à-d $y = 0$) et l'évolution de la population des lapins est donc donnée par l'équation
   $$(\mathrm{E1}) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t)(3 - x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$
   Pour toute valeur de $x_0 > 0$, résoudre (E1) et donner le comportement quand t tends vers l'infini (donner en particulier l'intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ de définition de x).
3. *Etude du linéarisé autour de la solution stationnaire* $(3,0)$
   (a) Calculer $F_1(x,y) = (x-3)\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(3,0) + y\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(3,0)$
   et $F_2(x,y) = (x-3)\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(3,0) + y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(3,0)$.

(b) Pour tout $x_0, y_0 > 0$, nous allons donc étudier

$$(\mathrm{E2}) \quad \begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) + 9 - 6y_1(t) \\ y_1'(t) = -y_1(t) \\ x_1(0) = x_0, \quad y_1(0) = y_0. \end{cases}$$

Existe-t-il une unique solution $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$? Si oui, sur quel intervalle maximal I inclus dans $\mathbb{R}$ est elle définie ?

(c) En combinant les deux équations, montrer que x_1 vérifie l'équation suivante

$$(\widetilde{\mathrm{E2}}) \quad \begin{cases} x_1''(t) + 4x_1'(t) + 3x_1(t) = 9 \\ x_1(0) = x_0, \quad x_1'(0) = -3x_0 - 6y_0 + 9. \end{cases}$$

(d) Résoudre $(\widetilde{\mathrm{E2}})$, donner la solution de (E2) et étudier le comportement quand $t \to +\infty$.

4. *Etude du linéarisé autour de la solution stationnaire* $(1, 1)$

(a) En posant $x_2(t) = x(t) - 1$ et $y_2(t) = y(t) - 1$ et en remplaçant dans (E)

$$f_1(t, x) \text{ par } \hat{F}_1(x, y) = (x-1)\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1)$$
$$f_2(t, x) \text{ par } \hat{F}_2(x, y) = (x-1)\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1),$$

montrer que le vecteur $Z(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ vérifie l'équation

$$(\mathrm{E3}) \quad Z'(t) + AZ(t) = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Diagonaliser A.

(c) Résoudre (E3) avec $Z(0) = \begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 1 \end{pmatrix}$.

(d) Donner une condition sur x_0 et y_0 pour que $(x_2(t), y_2(t))$ converge vers $(0, 0)$ quand $t \to \infty$. Que se passe-t-il quand cette condition n'est pas vérifiée ?