EXERCICE 2

$D_r = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

1) $r(\theta+\pi) = \dfrac{-\cos(2\theta+2\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}$ si $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Donc $M\left(r(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi),\ r(\theta+\pi)\underbrace{\sin(\theta+\pi)}_{=-\sin(\theta)}\right)$

$M\left(-\cos(2\theta),\ -\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}\sin(\theta)\right)$

On remarque que $r(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi) = r(\theta)\cos(\theta)$

$r(\theta+\pi)\sin(\theta+\pi) = r(\theta)\sin(\theta)$.

Donc les points de paramètre θ et $\theta+\pi$ sont confondus.

2) $r(\theta) = r(-\theta)$. (pas déf en $\frac{\pi}{2}$)

On a montré juste avant qu'on pouvait se restreindre à $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Par parité, on peut se restreindre à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient le reste de la courbe en effectuant une symétrie par rapport à Ox.

3) $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, r est dérivable et :

$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $r'(\theta) = -\dfrac{-2\sin(2\theta)\cos(\theta) + \cos(2\theta)\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$

$= 4\sin(\theta)\cos^2(\theta) - (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\sin(\theta)$

$= \dfrac{4\sin(\theta)\cos^2(\theta) - (2\cos^2(\theta) - 1)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$

$= \dfrac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}$

$= \dfrac{\sin(\theta)(2\cos^2(\theta) + 1)}{\cos^2(\theta)}$

$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\theta) \geq 0$, donc $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $r'(\theta) \geq 0$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$	0		$+$		$\|\|$
r	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$

On calcule $r(0) = 1$

$\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} r(\theta) = +\infty$

grâce à la q5

4) Dans le cas polaire, le vecteur vitesse en θ est défini par :

$\vec{v}(\theta) = r'(\theta)\vec{e_r}(\theta) + r(\theta)\vec{e_\theta}(\theta)$ où $\vec{e_r}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $\vec{e_\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Donc $\vec{v}(0) = r'(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or, $r(0) = -1$ et $r'(0) = 0$.

Donc $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta=0$. Le point de paramètre $\theta = 0$ est $(r(0)\cos(0), r(0)\sin(0))$, donc $(-1, 0)$.

On obtient donc une équation paramétrique de la tangente :

$$\begin{cases} x = 0 \times t - 1 \\ y = -t + 0 \end{cases}$$

Donc la tangente en le point de paramètre $\theta = 0$ est la droite d'équation $x = -1$.

5) Soit $\theta \in D_r$:

$r(\theta) = 0 \iff \dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)} = 0$

$\iff \cos(2\theta) = 0$

$\iff 2\theta \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\iff \theta \in \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

Donc, dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, on a $r(\theta) = 0$ si, et seulement si, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

On utilise ensuite le même raisonnement qu'à la question précédente :

Ici, puisque $r(\frac{\pi}{4}) = 0$, on a $\vec{v}(\frac{\pi}{4}) = r'(\frac{\pi}{4})\vec{e_r}(\frac{\pi}{4})$.

Or, $r'(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{2}$

Donc $\vec{v}(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en le point origine, c'est-à-dire $(0,0)$.

On obtient donc une équation paramétrique de la tangente :

$$\begin{cases} x = 2t + 0 \\ y = 2t + 0 \end{cases}$$

, donc tangente d'équation $y = x$.

Remarque : Pour le calcul de la tangente : lorsque $r(\theta_0) = 0$, la tangente passe par l'origine et fait un angle θ_0 avec l'axe Ox. Cela peut éviter quelques calculs dans ce cas.

6) On étudie une potentielle asymptote en $\theta = \frac{\pi}{2}$:

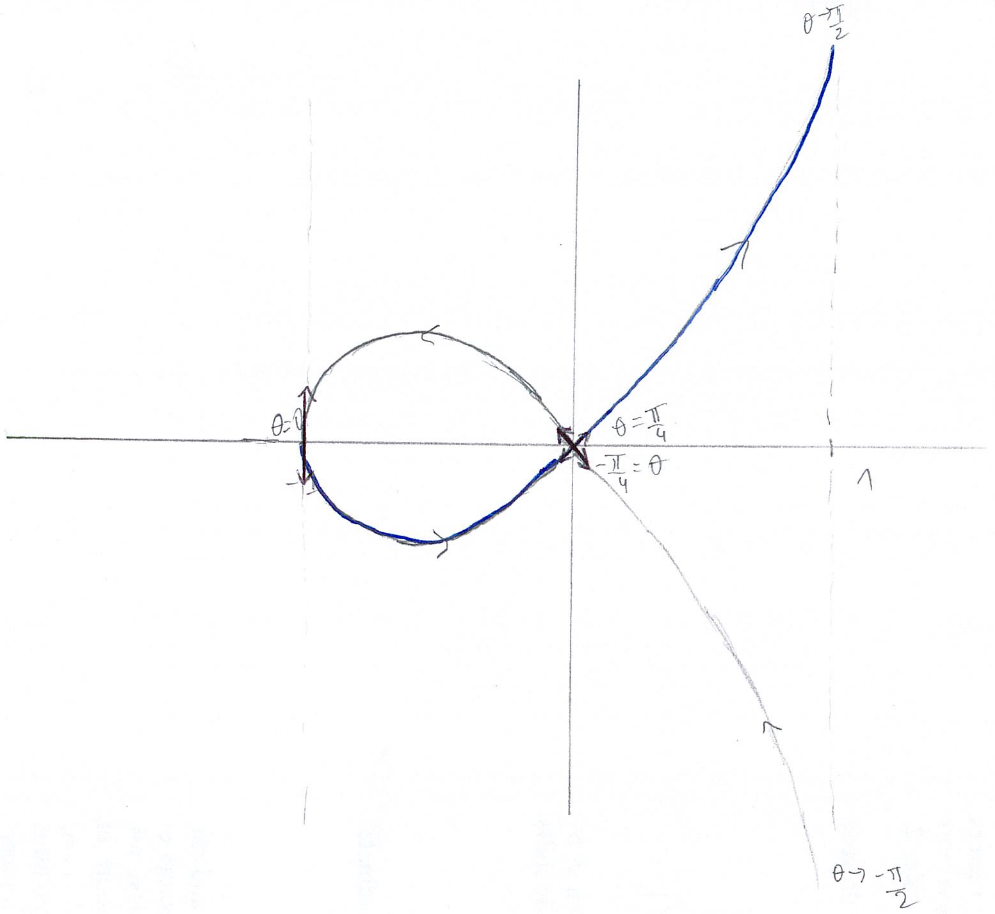
On cherche à calculer la limite (si elle existe) de $r(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$:

On commence par remarquer que $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)$.

Donc $r(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \cos(2\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2}]{} -1$

Donc on a une asymptote d'équation $y \times \cos(\frac{\pi}{2}) - x\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$, c'est-à-dire $x = 1$.

7)



- courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
- symétrie par rapport à O_x