Examen du lundi 22 octobre 2018, de 8h à 10h.
Résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Calculatrices autorisées. Autres documents et portables interdits. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Courbe en paramétriques : 12 points

Étude et tracé de la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = t - 1 + \frac{1}{1+t}, \quad y(t) = t + 2 + \frac{4}{t-2}$$

(1) Donner le domaine et déterminer l'existence éventuelle de symétries,

(2) Déterminer les branches infinies.

(3) Calculer x' et y'. Déterminer les valeurs de t annulant x' ou/et y'. La courbe admet-elle des tangentes horizontales, verticales ?

(4) La courbe admet-elle des points singuliers ? Si oui, indiquer la tangente en ces points et déterminer s'il s'agit de points de rebroussement. Bonus : en donner la nature.

(5) Dresser le double tableau de variations puis faire le tracé de la courbe en indiquant le sens de parcours.

(6) Dans cette question, on pourra au choix faire les calculs à la main ou utiliser la calculatrice en indiquant les instructions utilisées. La courbe admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, les calculer.

(7) Déterminer le repère de Frenet au point de paramètre $t = 1$ et en faire la représentation sur la courbe.

(8) Déterminer la longueur de l'arc de courbe entre les points de paramètre $t = 0$ et $t = 1$ sous la forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à simplifier.
En donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice en prenant bien garde de mettre 0.0 (au lieu de 0) ou 1.0 (au lieu de 1) comme bornes d'intégration pour forcer le calcul approché. Attention, le calcul exact de l'intégrale fait crasher les Casio par manque de mémoire, et le calcul approché est assez long sur les TI.

(9) Calculer le cercle osculateur au point de paramètre $t = 1$ (centre et rayon). Rajouter son tracé sur la courbe.

2. Lemniscate de Bernoulli : 8 points

Une lemniscate de Bernoulli est l'ensemble des points M vérifiant la relation :

$$d(M,F) \times d(M,F') = d(O,F)^2$$

où F et F' sont deux points fixes et O leur milieu. Les points F et F' sont appelés les foyers de la lemniscate, et O son centre.
Dans cette exercice, on pose $F = (d,0), F' = (-d,0)$ avec $d > 0$.

(1) Montrer qu'en coordonnées cartésiennes (l'axe des abscisses étant OF), la lemniscate de Bernoulli a pour équation :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2\,(x^2 - y^2).$$

(2) En déduire qu'en coordonnées polaires, la lemniscate de Bernoulli admet pour équation :

$$r(\theta)^2 = 2d^2 \cos(2\theta).$$

En déduire que les points de la lemniscate sont dans le domaine angulaire $-\frac{\pi}{4} \leq \theta\,[\mathrm{mod}\,\pi] \leq +\frac{\pi}{4}$, et le représenter graphiquement sur un dessin en hachurant cet espace.

(3) Déterminer les symétries de la lemniscate : montrer qu'on peut se limiter à l'étude de la branche $r(\theta) = \sqrt{2}d\sqrt{\cos(2\theta)}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.

(4) Déterminer les points réguliers et les points singuliers sur cette branche.

(5) Déterminer la direction de la tangente en $\theta = 0$.

(6) Étudier les changements de convexité de cette branche (une réponse avec l'aide de la calculatrice est suffisante pour cette question).

(7) Tracer cette branche pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (indiquer le sens de parcours).

(8) En déduire par (3)(7) la trace de lemniscate de Bernoulli complète sans indiquer le sens de parcours.