Examen du 30 juin 2016, de 9h à 11h.
Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisés. Autres documents et portables interdits.
Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Courbe de Lissajous (11 points)

Soit L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \cos(2t)$ et $y(t) = \sin(3t)$.

(1) Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$ (on pourra étudier les transformations correspondant à $t \to t + \pi$ et $t \to -t$).

(2) Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$ en faisant apparaitre $t = \pi/3$

(3) Déterminer la tangente en L en $t = 0$

(4) Déterminer les points singuliers de L.

(5) Déterminer la tangente à la courbe en $t = \pi/2$.

(6) Déterminer le paramètre $t_0 \in [0, \pi/2]$ correspondant à un point où L admet une tangente horizontale.

(7) A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L. On représentera sur le tracé les points de paramètres $t = -\pi/2, 0, \pi/2$ et le sens de parcours de la courbe pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(8) Comment parcourt-on la courbe pour $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$?

(9) On s'intéresse dans la suite à l'arc de courbe A correspondant à $t \in [-\pi/3, \pi/3]$ et au domaine D situé à l'intérieur de A. Donner sous forme d'une intégrale la longueur de A. Déterminer une valeur approchée de la longueur de A (indiquez la commande utilisée à la calculatrice).

(10) Déterminer l'aire du domaine D à l'intérieur de A (on pourra déterminer l'intégrale curviligne de la forme xdy ou ydx sans donner le détail du calcul de primitive, à condition d'indiquer la commande utilisée à la calculatrice).

(11) En appliquant la formule de Green-Riemann, montrer que $\iint_D x\, dxdy$ se ramène au calcul d'une intégrale curviligne le long de A d'une forme ω que l'on déterminera. Calculer cette intégrale curviligne (on pourra indiquer la commande utilisée à la calculatrice sans donner le détail du calcul de primitive).
En déduire les coordonnées du centre de gravité de D (supposé homogène).

2. Circuit RLC (9 points)

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\frac{q}{C} + Rq' + Lq'' = U\cos(\omega t) \tag{1}$$

où $R \geq 0, L > 0, C > 0, U \geq 0, \omega > 0$ sont des constantes, t le temps, $q(t)$ la fonction inconnue (la charge du condensateur du circuit RLC), $q' = \frac{dq}{dt}, q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$

(1) Quel est l'ordre de cette équation ? Est-elle linéaire ? À variables séparables ?

(2) On suppose dans cette question que $R = 0$ et $U = 0$, on pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Donner la solution générale de l'équation (1). La solution est-elle bornée lorsque $t \to +\infty$?

(3) On suppose dans cette question que $R=0$ et $U=1$. Donner la solution générale de l'équation (1) et indiquer si la solution est bornée lorsque $t \to +\infty$. On distinguera les cas $\omega_0 \neq \omega$ et $\omega_0 = \omega$.

(4) On suppose dans la suite que $R>0$. Montrer que les racines de l'équation $\frac{1}{C} + Rx + Lx^2 = 0$ d'inconnue x sont deux réels strictement négatifs ou deux complexes conjugués de partie réelle strictement négative. En déduire la solution générale de l'équation (1) lorsque $U=0$ et déterminer sa limite lorsque $t \to +\infty$.

(5) On suppose toujours que $R>0$ mais maintenant $U \neq 0$. Déterminer une solution particulière de la forme $q(t) = Qe^{i\omega t}, (Q \in \mathbb{C}, i^2 = -1)$ pour l'équation

$$\frac{q}{C} + Rq' + Lq'' = Ue^{i\omega t} \qquad (*)$$

Calculer $q' = Ie^{i\omega t}, I \in \mathbb{C}$ et en déduire une relation entre I et U (loi d'Ohm complexe).

(6) En déduire une solution particulière de (1) en prenant la partie réelle de la solution trouvée pour (*). Comparer les solutions de (1) avec cette solution particulière lorsque $t \to +\infty$. Peut-on négliger la condition initiale $q(t_0), q'(t_0)$ lorsque $t \to +\infty$?

(7) Quel serait le comportement asymptotique des solutions si R était strictement négatif ?

3. Correction abrégée Lissajous

(1) les 2 transformations laissent x inchangé et changent y en son opposé, donc symétrie par rapport à Ox et réduction de l'étude à $[0,\pi/2]$ (périodicité 2π).

(2) $x' = -2\sin(2t)$ s'annule en 0 et $\pi/2$ et est négatif sinon, $y' = 3\cos(3t)$ s'annule en $\pi/6$ et $\pi/2$ est positif entre 0 et $\pi/6$ et négatif ensuite.

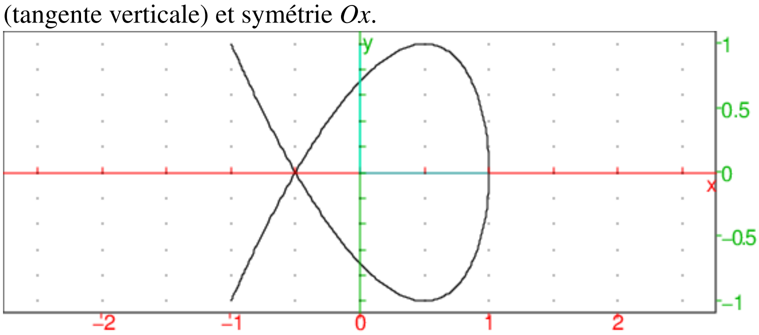
(3) On a donc une tangente verticale en $t = 0$ au point $(1,0)$ ($x' = 0$ et $y' \neq 0$)

(4) Un point singulier en $t = \pi/2$ de coordonnées $(-1,-1)$ et son symétrique par rapport à Ox.

(5) Comme $x'' = 4$ et $y'' = 9$ en $t = \pi/2$ la tangente a pour vecteur directeur $(4,9)$.

(6) Tangente horizontale si $y' = 3\cos(3t) = 0$ donc $t = \pi/6$ dans l'intervalle d'étude, au point $(\frac{1}{2},1)$.

(7) courbe en forme de alpha, on part de $(1,1)$ en $t = -\pi/2$ avec tangente dirigée vers le bas à droite $(4,-9)$, on traverse Ox en $(-\frac{1}{2},0)$ ($t = -\pi/3$) puis tangente horizontale en $(\frac{1}{2},-1)$ ($t = -\pi/6$), puis on remonte (toujours vers la droite) jusqu'en $(0,1)$ (tangente verticale) et symétrie Ox.



(8) on revient sur ses pas.

(9)
$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{4\sin(2t)^2+9\cos(3t)^2}\,dt \approx 5.07...$$

(10)
$$\int_A x\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 3\cos(2t)\cos(3t)\,dt = \frac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2.08...$$

(11) par exemple $\omega = x^2/2dy$,
$$\int_A x\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 3\cos(2t)^2\cos(3t)\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{7} \approx 0.74...$$

Donc
$$x_G = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{3\sqrt{3}}{7}} = \frac{5}{14} \approx 0.36...$$

et $y_G = 0$ par symétrie.

4. CORRECTION ABRÉGÉE RLC

(1) Ordre 2, linéaire (à coefficients constants), n'est pas à variables séparables.

(2) l'équation caractéristique est $1/C + x^2 L = 0$ de solutions $\pm i\omega_0$ donc la solution générale est $x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$, et $x(t)$ est borné.

(3)
$$\frac{q}{C} + Lq'' = \cos(\omega t)$$
Si $\omega \neq \omega_0$, une solution particulière est de la forme $a\cos(\omega t)$ (car pas de derivée première dans l'équation), en remplaçant on trouve :
$$q = \frac{C}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t)$$
et est donc bornée, donc la solution générale avec second membre est aussi bornée. Si $\omega = \omega_0$, il y a résonance. Comme ω est racine simple de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $q_c = ate^{i\omega t}$ pour le second membre $e^{i\omega t}$ et en prendre la partie réelle. On a alors
$$\frac{q_c}{C} + Lq_c'' = 2aiL\omega e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \Rightarrow a = \frac{1}{2iL\omega}$$
puis
$$q = \Re(q_c) = \Re\left(\frac{t}{2iL\omega} e^{i\omega t}\right) = \frac{t}{2L\omega} \sin(\omega t)$$
La solution générale, somme de cette solution particulière non bornée et de la solution générale de l'équation homogène bornée est donc non bornée.

(4) Soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation caractéristique $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$. Si les deux racines sont réelles, comme leur produit est $1/(LC) > 0$ elles sont de même signe, or leur somme vaut $-R/L < 0$ elles sont donc strictement négatives. Si elles sont complexes conjuguées, elles ont la même partie réelle $-R/(2L) < 0$, strictement négative. Donc $e^{r_1 t}, e^{r_2 t} \to_{t \to +\infty} 0$ et la solution générale de l'équation (1) $ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

(5)
$$Q\left(\frac{1}{C} + i\omega R - L\omega^2\right) = U \Rightarrow Q = \frac{U}{i\omega R + \frac{1}{C} - L\omega^2} \Rightarrow I = i\omega Q = \frac{U}{R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

(6) On écrit le complexe $i\omega R + \frac{1}{C} - L\omega^2$ sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$, avec
$$\rho = \sqrt{\omega^2 R^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2} = \omega\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}$$
On a alors
$$\Re(Qe^{i\omega t}) = \Re(\frac{U}{\rho} e^{i(\omega t - \theta)}) = \frac{U}{\rho} \cos(\omega t - \theta)$$
Comme la solution générale de (1) tend vers 0, toutes les solutions se rapprochent les unes des autres pour t assez grand, on peut donc négliger la condition initiale.

(7) Si $R < 0$, le raisonnement de la question 4 donne des racines de partie réelle strictement positives, donc des solutions (non nulles) qui tendent vers l'infini ou oscillent avec des oscillations de plus en plus grandes.