Examen du 6 janvier 2017, de 13h à 15h.

Calculatrices et résumé de cours manuscrit format A4 recto-verso autorisé. Autres documents et portables interdits.

Ce sujet comporte deux pages. Le barème est indicatif.

1. Forme différentielle (3 points)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la forme différentielle $\omega = (6x - \alpha y)dx + (-x + 2y)dy$.

(1) Déterminer la ou les valeurs de α pour lesquelles la forme ω est fermée.

(2) Pour cette ou ces valeurs de α, la forme ω est-elle exacte ? Si oui, en donner un potentiel.

(3) Pour la ou les valeurs de α pour lesquelles ω admet un potentiel, calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma \omega, \quad \gamma(t) = (\frac{t}{t^2+1}, \frac{1}{t^2+1}), t \in [0,1]$$

2. Équation et système différentiel (7 points)

Pour $\alpha \leq 0$, on considère le système différentiel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+3 & 2 \\ -5 & \alpha-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{on pose } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer y en fonction de x et x' dans la première équation du système, en déduire que x est solution de

$$x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + 1)x = 0 \quad (H)$$

(2) Résoudre l'équation (H). Décrire le comportement asymptotique des solutions $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$ (on distinguera $\alpha = 0$ et $\alpha < 0$)

(3) On ajoute un second membre $\cos(\omega t)$ à (H). Donner la forme attendue d'une solution particulière lorsque $\alpha = 0$, et discuter en fonction de ω si les solutions de l'équation avec second membre sont bornées. Que se passe-t-il si $\alpha < 0$?

(4) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

(5) En déduire la solution générale du système (on pourra observer que la matrice du système est $A + \alpha I_2$, on pourra laisser des exponentielles complexes). Comment se comportent les solutions lorsque $t \to +\infty$?

3. Problème : durée des saisons (10 points)

On modélise l'orbite de la Terre autour du Soleil par une ellipse d'excentricité e et demi-grand axe $a = 1$ (quitte à changer l'unité de longueur), ellipse d'équations paramétriques

$$x(\tau) = \cos(\tau), \quad y(\tau) = \sqrt{1-e^2}\sin(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi]$$

dont le Soleil occupe un foyer $S(e, 0)$.

Attention : τ n'est proportionnel au temps t qui s'écoule lorsque la Terre parcourt l'orbite.

Attention sur certaines calculatrices il faut utiliser pour l'excentricité une autre lettre que `e` *qui vaut* `exp(1)`.

On suppose pour simplifier que la Terre occupe la position la plus proche du Soleil au solstice d'hiver de l'hémisphère Nord $H(1,0)$ et la plus éloignée du Soleil au solstice d'été $E(-1,0)$. On admettra que l'équinoxe de printemps se produit au point P de l'ellipse ayant la même abscisse que le Soleil, donc de paramètre τ tel que $x(\tau)=e$ et $y(\tau)>0$ (l'automne correspondant à $y(\tau)<0$).

(1) Dans cette question, on suppose $e=0.5$. Faire une figure où vous représenterez l'ellipse (on ne demande pas d'en faire l'étude), les points S,H,P,E et le segment SP.

(2) Déterminer le paramètre τ correspondant au point P en fonction de e, en déduire l'ordonnée y_P de P.

(3) On veut calculer l'aire de la zone Z comprise entre SH, SP et l'arc d'ellipse HP. Hachurer Z sur votre figure. En utilisant le théorème de Green-Riemann (ou de Stokes), exprimer l'aire

$$A=\iint_Z dx\, dy$$

à l'aide de l'intégrale curviligne de $\omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$ sur le bord de Z.

(4) Déterminer l'aire de l'intérieur de l'ellipse en ramenant le calcul à celui d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle sur l'ellipse.

(5) Dans cette question, on prendra $e=0.0167$. Déterminer une approximation numérique de A à la calculatrice (indiquer les commandes utilisées).

(6) La loi des aires dit que l'aire balayée par le rayon Soleil-Terre est proportionnelle au temps écoulé. L'aire de l'ellipse correspond donc à une durée de 365 jours. En déduire la durée de l'hiver (temps pour aller de H à P), puis des trois autres saisons.

(7) On se place maintenant en coordonnées polaires centrées en S (l'axe Sx ayant comme angle 0). L'équation polaire de l'ellipse est donnée par

$$r(\theta)=\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta)}$$

Quels sont les valeurs de θ correspondant à H,E,P ?

(8) La loi des aires en coordonnées polaires s'exprime par l'équation différentielle dépendant d'une constante C d'inconnue $\theta(t)$

$$r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}=C \qquad (*)$$

Donner le type de cette équation différentielle.

(9) On suppose qu'à l'instant $t=0$, la Terre est au point H. Déterminer Ct en fonction de θ par une intégrale qu'on ne demande pas de calculer.

(10) On suppose $e=0.0167$. Calculer à la calculatrice une valeur approchée de Ct pour $\theta=2\pi$. En déduire une valeur approchée de C. Calculer une valeur approchée de t pour $\theta=\theta_P$ et retrouver la durée de l'hiver.

(11) (*Bonus*) Déterminer les composantes de la vitesse de la Terre au point de coordonnées polaires $(\theta(t),r(t))$ dans la base orthonormée directe $\{e_r,e_\theta\}$ avec $e_r=(\cos(\theta),\sin(\theta))$. En déduire le lagrangien du système, on prendra comme potentiel $V(r,\theta)=-k/r$. Donner les équations d'Euler-Lagrange et retrouver la loi des aires (*). Déterminer le hamiltonien, est-il une constante du mouvement ?

(12) (*Bonus*) Justifier les coordonnées de l'équinoxe de printemps.