

# Amortissement d'un prêt

Renée De Graeve

7 juin 2017

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Relation reliant les différents paramètres</b> | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>La fonction Sommes</b>                         | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>La fonction Pret</b>                           | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>La fonction Duree</b>                          | <b>5</b> |
| <b>5</b> | <b>La fonction Taux</b>                           | <b>6</b> |
| <b>6</b> | <b>La fonction Amortissement</b>                  | <b>7</b> |

Amortissement d'un prêt d'une durée  $na$  années à un taux annuel  $ta$  remboursable soit annuellement, soit trimestriellement, soit mensuellement.

## 1 Relation reliant les différents paramètres

Les paramètres sont :

- $P$  : le montant du prêt, qui évolue au cours du temps en fonction des intérêts et des remboursements.
- $t$  : le taux du prêt (annuel ou trimestriel ou mensuel).
- $n$  : le nombre de remboursements.
- $S$  : le montant constant des remboursements.

Je veux connaître le montant constant  $S$  à payer (soit annuellement, soit trimestriellement, soit mensuellement) pour rembourser ce prêt. Ce montant comprend les intérêts dûs et une somme qui participe au remboursement du prêt. On a donc :

$$S = I + R$$

avec  $I$  les intérêts dûs et  $R$  qui rembourse une partie du prêt  $P$ . Après chaque paiement de  $S$  on a :

$I = P \cdot t$  et  $P = P - R$ , donc  $P = P + I - S$  ou encore  $P = P \cdot (1 + t) - S$ .

Si on note par  $P_0, P_1, \dots, P_n$  le montant du prêt après  $0, 1, \dots, n$  remboursements, on a :

- $P_0 = P$ ,
- $P_1 = P \cdot (1 + t) - S$ ,
- $P_2 = P_1 \cdot (1 + t) - S$  ou encore  $P_2 = P \cdot (1 + t)^2 - S \cdot (1 + (1 + t))$ ,
- ...
- $P_n = P \cdot (1 + t)^n - S \cdot (1 + (1 + t) + \dots + (1 + t)^{(n-1)})$  ou encore  
 $P_n = P \cdot (1 + t)^n - S \cdot ((1 + t)^n - 1) / t$ .

On veut que le prêt soit remboursé au bout de  $n$  paiements donc on doit avoir :  $P_n = 0$ .

Après multiplication par  $t$ , la relation liant  $P, t, n, S$  (avec  $P$  le montant initial du prêt) est donc :

$$P \times t(1 + t)^n - S \times ((1 + t)^n - 1) = 0$$

## 2 La fonction Sommes

Donc

$$S = \frac{P \times t(1 + t)^n}{(1 + t)^n - 1} = P \times t \left( 1 + \frac{1}{(1 + t)^n - 1} \right)$$

On définit la fonction `Sommes` de paramètres :

- `P` : le montant du prêt,
- `t` : le taux du prêt : ce taux sera annuel ( $t=ta$ ) ou trimestriel ( $t=ta/4$ ) ou mensuel ( $t=ta/12$ ), selon le nombre `n` de remboursements.
- `n` : le nombre de remboursements (`n` sera soit égal à `na` si on rembourse annuellement, ou égal à  $4*na$  si on rembourse trimestriellement ou égal à  $12*na$  si on rembourse mensuellement).

On définit :

```
Sommes(P,t,n):=round(P*t*(1+1/((1+t)^n-1)),2);
```

```
(P,t,n)->round(P*t*(1+1/((1+t)^n-1)),2)
```

Exemple :

je veux emprunter 10000 euros à un taux annuel `t` de 2/100 pendant 5 ans.

Quels seront mes remboursements ?

Je rembourse annuellement :

```
Sommes(10000,0.02,5)
```

2121.58

Je rembourse trimestriellement :

```
Sommes(10000,0.02/4,5*4)
```

526.66

Je rembourse mensuellement :

```
Sommes(10000,0.02/12,5*12)
```

175.28

### 3 La fonction Pret

Je veux savoir quelle somme `P` je peux emprunter à un taux annuel `ta`, sachant que je suis capable de rembourser annuellement (resp trimestriellement ou mensuellement) une somme `S` pendant `n=na` années (resp  $n=na*4$

trimestres ou  $n=na*12$  mois).

On a la relation :

$$P \times (1+t)^n - S \times ((1+t)^n - 1)/t = 0$$

Donc

$$P = \frac{S \times ((1+t)^n - 1)}{t(1+t)^n} = \frac{S}{t} \times \left(1 - \frac{1}{(1+t)^n}\right)$$

On définit :

$$\text{Pret}(t, n, S) := \text{round}(S/t * (1 - 1/(1+t)^n), 2);$$

$$(t, n, S) \rightarrow \text{round}(S/t * (1 - 1/(1+t)^n), 2)$$

Exemple :

J'ai obtenu un taux annuel  $ta$  de 2/100 pendant 5 ans et je peux rembourser mensuellement une somme comprise entre 175 euros et 200 euros.

Combien puis-je emprunter ?

$$\text{Pret}(0.02/12, 5*12, 175)$$

9984.16

$$\text{Pret}(0.02/12, 5*12, 200)$$

11410.47

## 4 La fonction Duree

Je veux connaître la durée de mon prêt sachant que je veux emprunter une somme  $P$  et je suis capable de rembourser mensuellement une somme  $S$ . Je peux emprunter à un taux annuel  $ta$ . On a la relation où  $n$  est le nombre de mois et  $t := ta/12$  est le taux mensuel :

$$P \times t(1+t)^n - S \times ((1+t)^n - 1) = 0$$

Donc  $(S - tP) \times (1+t)^n = S$  soit :

$$n \ln(1+t) = \ln(S) - \ln(S - tP)$$

On définit :

$$\text{Duree}(P, t, S) := \text{round}((\ln(S) - \ln(S - t \cdot P)) / \ln(1 + t), 2);$$

$$(P, t, S) \rightarrow \text{round}((\ln(S) - \ln(S - t \cdot P)) / \ln(1 + t), 2)$$

Exemple :

je veux emprunter 10000 euros, j'ai obtenu un taux annuel  $t$  de 2/100 et je peux rembourser mensuellement une somme comprise entre 175 euros et 200 euros. Quelle est la durée de mon prêt ?

$$\text{Duree}(10000, 0.02/12, 175)$$

60.1

$$\text{Duree}(10000, 0.02/12, 200)$$

52.25

## 5 La fonction Taux

Je veux connaître le taux  $t$  annuel (resp trimestriel ou mensuel) du prêt. On a  $t := ta$  (resp  $t := ta/4$  ou  $t := ta/12$ ).  $t$  est solution en  $x$  de l'équation  $f(x) = 0$  avec :

$$f(x) = S \times ((1 + x)^n - 1) - P \times (1 + x)^n x$$

Si  $nS > P$ , cette équation a 2 solutions :  $x = 0$  et  $x_0$  avec  $0 < x_0 < 1$ .

En effet  $f$  est continue et dérivable sur  $[0, +\infty[$  et :

$$f'(x) = (1 + x)^{n-1} \times ((nS - P) - x(1 + n)P)$$

donc  $f'(x)$  s'annule en  $a = \frac{nS - P}{(1 + n)P > 0}$  donc  $f(x)$  croît sur  $[0, a]$  ( $f(0) = 0$  donc  $f(a) > 0$ ) et décroît sur  $[a, +\infty[$ . De plus  $f(1) = -2^n(P - S) - S < 0$  donc  $f(x) = 0$  a une seule solution positive  $x_0$  vérifiant  $a < x_0 < 1$ . Donc  $t = x_0$ .

On résout cette équation numériquement avec la fonction :

resoudre\_numerique de Xcas.

On définit :

```
Taux(P,n,S):=round(resoudre_numerique(S*  
((1+x)^(n-1)-P*(1+x)^n*x=0,x=1),5);
```

```
(P,n,S)->round(fsolve(S*((1+x)^(n-1)-P*(1+x)^n*x=0,x=1),5)
```

Exemple :

Si mon prêt est de 10000 euros sur 5 ans avec un remboursement mensuel de 175 euros, le taux annuel de mon prêt est :

```
12*Taux(10000,60,175)
```

0.01932

## 6 La fonction Amortissement

La fonction `Amortissement` a 5 arguments :

- `P` le montant du prêt,
- `ta` le taux annuel du prêt,
- `na` la durée du prêt en années,
- `S` la somme à verser à chaque échéance (on ajuste ici la dernière échéance pour tenir compte des erreurs d'arrondis),
- `periode` qui vaut "m" ou "t" et par défaut "a".

Si on choisit de verser `S` chaque mois (resp trimestre), alors il faut initialiser `periode` avec "m" (resp "t").

Si parmi les 4 arguments `P,ta,na,S`, une des valeurs est inconnue, on lui donne la valeur -1, la fonction `Amortissement` calculera alors sa valeur à l'aide de la formule :

$$S \times ((1 + t)^n - 1) - P \times (1 + t)^n t = 0$$

avec  $n := na * 12$ ;  $t := ta/12$ ; si `periode` vaut "m"

(resp  $n := na * 4$ ;  $t := ta/4$ ; si `periode` vaut "t")

et  $n = na$ ;  $t = ta$ ; si `periode` vaut "a").

Pour cela on utilise les valeurs des fonctions précédentes.

`Amortissement` renvoie un message et la matrice ayant comme  $(j - 1)$ ième ligne :  $[j, P_j, R_j, I_j, S]$  avec  $j = 1..n$  et

$S = R_j + I_j$  =remboursement +intérêt et  $P_{j+1} = P_j - R_j$  =évolution de  $P$ .

```

fonction Amortissement(P,ta,na,S,periode="a")
  local n,t,j,MA,L,k,c,msg;
  k:=member(-1,[P,ta,na,S]);
  si periode=="m" alors
    n:=na*12;t:=ta/12;c:=12; periode:="mois";
  sinon
    si periode=="t" alors
      n:=na*4;t:=ta/4;c:=4; periode:="trimestre";
    sinon
      n:=na;t:=ta;c:=1;periode:="a"; periode:="an";
    fsi;
  fsi;
  si count_eq(-1,[P,ta,na,S,periode])!=1 alors
    retourne("Mettre 3 arguments parmi P,ta,na,S et -1 pour celui a chercher") ;
  fsi;
  si k==1 alors //P:=Pret(t,n,S)
    P:=round(S/t*(1-1/(1+t)^n),2);
  sinon
    si k==2 alors //t:=Taux(P,n,S)
      t:=round(resoudre_numerique(S*((1+x)^n-1)-P*(1+x)^n*x=0,x=1),5);
      ta:=round(t*c,4);
    sinon
      si k==3 alors //n:=Duree(P,t,S)
        n:=round((ln(S)-ln(S-t*P))/ln(1+t),2);
      sinon //S:=Sommes(P,t,n)
        S:=round(P*t*(1+1/((1+t)^n-1)),2);
      fsi;
    fsi;
  fsi;
  msg:="Pret : "+P+", taux"+char(32)+" annuel : "+ ta + ", par "+ periode + " : ";
  afficher(msg);
  MA:=NULL;
  pour j de 0 jusque n-1 faire
    MA:=MA,[j+1,P,round(S-P*t,2),round(P*t,2),S];
    P:=round(P*(1+t)-S,2);
  fpour;
  MA[n-1]:=MA[n-1]+[0,0,P,0,P];
  return msg,[MA];
ffonction:;

```



Exemples :

Je fais un emprunt sur 3 ans de 10000 euros au taux annuel de 0.01.

Quel est l'amortissement de ce prêt selon que j'opte pour un remboursement annuel ou trimestriel ou mensuel ?

`Amortissement(10000,0.01,3,-1)`

Pret : 10000, taux annuel : 0.01, paran : 3400.22,  $\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 10000 & 3300.22 & 100.0 & 3400.22 \\ 2 & 6699.78 & 3333.22 & 67.0 & 3400.22 \\ 3 & 3366.56 & 3366.56 & 33.67 & 3400.23 \end{array} \right)$

`Amortissement(10000,0.01,3,-1,"t")`

Pret : 10000, taux annuel : 0.01, par trimestre : 846.94,  $\left( \begin{array}{ccccc} 1 & 10000 & 821.94 & 25.0 & 846.94 \\ 2 & 9178.06 & 823.99 & 22.95 & 846.94 \\ 3 & 8354.07 & 826.05 & 20.89 & 846.94 \\ 4 & 7528.02 & 828.12 & 18.82 & 846.94 \\ 5 & 6699.9 & 830.19 & 16.75 & 846.94 \\ 6 & 5869.71 & 832.27 & 14.67 & 846.94 \\ 7 & 5037.44 & 834.35 & 12.59 & 846.94 \\ 8 & 4203.09 & 836.43 & 10.51 & 846.94 \\ 9 & 3366.66 & 838.52 & 8.42 & 846.94 \\ 10 & 2528.14 & 840.62 & 6.32 & 846.94 \\ 11 & 1687.52 & 842.72 & 4.22 & 846.94 \\ 12 & 844.8 & 844.8 & 2.11 & 846.91 \end{array} \right)$

Amortissement(10000,0.01,3,-1,"m")

Pret : 10000, tauxannuel : 0.01, parmois : 282.08,

|    |         |        |      |        |
|----|---------|--------|------|--------|
| 1  | 10000   | 273.75 | 8.33 | 282.08 |
| 2  | 9726.25 | 273.97 | 8.11 | 282.08 |
| 3  | 9452.28 | 274.2  | 7.88 | 282.08 |
| 4  | 9178.08 | 274.43 | 7.65 | 282.08 |
| 5  | 8903.65 | 274.66 | 7.42 | 282.08 |
| 6  | 8628.99 | 274.89 | 7.19 | 282.08 |
| 7  | 8354.1  | 275.12 | 6.96 | 282.08 |
| 8  | 8078.98 | 275.35 | 6.73 | 282.08 |
| 9  | 7803.63 | 275.58 | 6.5  | 282.08 |
| 10 | 7528.05 | 275.81 | 6.27 | 282.08 |
| 11 | 7252.24 | 276.04 | 6.04 | 282.08 |
| 12 | 6976.2  | 276.27 | 5.81 | 282.08 |
| 13 | 6699.93 | 276.5  | 5.58 | 282.08 |
| 14 | 6423.43 | 276.73 | 5.35 | 282.08 |
| 15 | 6146.7  | 276.96 | 5.12 | 282.08 |
| 16 | 5869.74 | 277.19 | 4.89 | 282.08 |
| 17 | 5592.55 | 277.42 | 4.66 | 282.08 |
| 18 | 5315.13 | 277.65 | 4.43 | 282.08 |
| 19 | 5037.48 | 277.88 | 4.2  | 282.08 |
| 20 | 4759.6  | 278.11 | 3.97 | 282.08 |
| 21 | 4481.49 | 278.35 | 3.73 | 282.08 |
| 22 | 4203.14 | 278.58 | 3.5  | 282.08 |
| 23 | 3924.56 | 278.81 | 3.27 | 282.08 |
| 24 | 3645.75 | 279.04 | 3.04 | 282.08 |
| 25 | 3366.71 | 279.27 | 2.81 | 282.08 |
| 26 | 3087.44 | 279.51 | 2.57 | 282.08 |
| 27 | 2807.93 | 279.74 | 2.34 | 282.08 |
| 28 | 2528.19 | 279.97 | 2.11 | 282.08 |
| 29 | 2248.22 | 280.21 | 1.87 | 282.08 |
| 30 | 1968.01 | 280.44 | 1.64 | 282.08 |
| 31 | 1687.57 | 280.67 | 1.41 | 282.08 |
| 32 | 1406.9  | 280.91 | 1.17 | 282.08 |
| 33 | 1125.99 | 281.14 | 0.94 | 282.08 |
| 34 | 844.85  | 281.38 | 0.7  | 282.08 |
| 35 | 563.47  | 281.61 | 0.47 | 282.08 |
| 36 | 281.86  | 281.86 | 0.23 | 282.09 |

Ma banque me propose un crédit au taux annuel de 2/100 pendant 5 ans. Je veux rembourser 250 euros par mois.

Quel montant puis-je emprunter ?

Quel est le tableau d'amortissement de ce prêt ?

```
msg,TA:=Amortissement(-1,0.02,6,250,"m");;msg;
```

Done, Pret : 16948.64, tauxannuel : 0.02, parmois : 250

La commande précédente affiche le message, mais pas le tableau d'amortissement qui est trop grand au format pdf, les commandes qui suivent affichent les morceaux du tableau.

```
[TA[k]$(k=0..11)]
```

|    |          |        |       |     |
|----|----------|--------|-------|-----|
| 1  | 16948.64 | 221.75 | 28.25 | 250 |
| 2  | 16726.89 | 222.12 | 27.88 | 250 |
| 3  | 16504.77 | 222.49 | 27.51 | 250 |
| 4  | 16282.28 | 222.86 | 27.14 | 250 |
| 5  | 16059.42 | 223.23 | 26.77 | 250 |
| 6  | 15836.19 | 223.61 | 26.39 | 250 |
| 7  | 15612.58 | 223.98 | 26.02 | 250 |
| 8  | 15388.6  | 224.35 | 25.65 | 250 |
| 9  | 15164.25 | 224.73 | 25.27 | 250 |
| 10 | 14939.52 | 225.1  | 24.9  | 250 |
| 11 | 14714.42 | 225.48 | 24.52 | 250 |
| 12 | 14488.94 | 225.85 | 24.15 | 250 |

```
[TA[k]$(k=12..23)]
```

|    |          |        |       |     |
|----|----------|--------|-------|-----|
| 13 | 14263.09 | 226.23 | 23.77 | 250 |
| 14 | 14036.86 | 226.61 | 23.39 | 250 |
| 15 | 13810.25 | 226.98 | 23.02 | 250 |
| 16 | 13583.27 | 227.36 | 22.64 | 250 |
| 17 | 13355.91 | 227.74 | 22.26 | 250 |
| 18 | 13128.17 | 228.12 | 21.88 | 250 |
| 19 | 12900.05 | 228.5  | 21.5  | 250 |
| 20 | 12671.55 | 228.88 | 21.12 | 250 |
| 21 | 12442.67 | 229.26 | 20.74 | 250 |
| 22 | 12213.41 | 229.64 | 20.36 | 250 |
| 23 | 11983.77 | 230.03 | 19.97 | 250 |
| 24 | 11753.74 | 230.41 | 19.59 | 250 |

[TA[k]\$(k=24..35)]

|    |          |        |       |     |
|----|----------|--------|-------|-----|
| 25 | 11523.33 | 230.79 | 19.21 | 250 |
| 26 | 11292.54 | 231.18 | 18.82 | 250 |
| 27 | 11061.36 | 231.56 | 18.44 | 250 |
| 28 | 10829.8  | 231.95 | 18.05 | 250 |
| 29 | 10597.85 | 232.34 | 17.66 | 250 |
| 30 | 10365.51 | 232.72 | 17.28 | 250 |
| 31 | 10132.79 | 233.11 | 16.89 | 250 |
| 32 | 9899.68  | 233.5  | 16.5  | 250 |
| 33 | 9666.18  | 233.89 | 16.11 | 250 |
| 34 | 9432.29  | 234.28 | 15.72 | 250 |
| 35 | 9198.01  | 234.67 | 15.33 | 250 |
| 36 | 8963.34  | 235.06 | 14.94 | 250 |

[TA[k]\$(k=36..47)]

|    |         |        |       |     |
|----|---------|--------|-------|-----|
| 37 | 8728.28 | 235.45 | 14.55 | 250 |
| 38 | 8492.83 | 235.85 | 14.15 | 250 |
| 39 | 8256.98 | 236.24 | 13.76 | 250 |
| 40 | 8020.74 | 236.63 | 13.37 | 250 |
| 41 | 7784.11 | 237.03 | 12.97 | 250 |
| 42 | 7547.08 | 237.42 | 12.58 | 250 |
| 43 | 7309.66 | 237.82 | 12.18 | 250 |
| 44 | 7071.84 | 238.21 | 11.79 | 250 |
| 45 | 6833.63 | 238.61 | 11.39 | 250 |
| 46 | 6595.02 | 239.01 | 10.99 | 250 |
| 47 | 6356.01 | 239.41 | 10.59 | 250 |
| 48 | 6116.6  | 239.81 | 10.19 | 250 |

[TA[k]\$(k=48..59)]

|    |         |        |      |     |
|----|---------|--------|------|-----|
| 49 | 5876.79 | 240.21 | 9.79 | 250 |
| 50 | 5636.58 | 240.61 | 9.39 | 250 |
| 51 | 5395.97 | 241.01 | 8.99 | 250 |
| 52 | 5154.96 | 241.41 | 8.59 | 250 |
| 53 | 4913.55 | 241.81 | 8.19 | 250 |
| 54 | 4671.74 | 242.21 | 7.79 | 250 |
| 55 | 4429.53 | 242.62 | 7.38 | 250 |
| 56 | 4186.91 | 243.02 | 6.98 | 250 |
| 57 | 3943.89 | 243.43 | 6.57 | 250 |
| 58 | 3700.46 | 243.83 | 6.17 | 250 |
| 59 | 3456.63 | 244.24 | 5.76 | 250 |
| 60 | 3212.39 | 244.65 | 5.35 | 250 |

[TA[k]\$(k=60..71)]

|    |         |        |      |        |
|----|---------|--------|------|--------|
| 61 | 2967.74 | 245.05 | 4.95 | 250    |
| 62 | 2722.69 | 245.46 | 4.54 | 250    |
| 63 | 2477.23 | 245.87 | 4.13 | 250    |
| 64 | 2231.36 | 246.28 | 3.72 | 250    |
| 65 | 1985.08 | 246.69 | 3.31 | 250    |
| 66 | 1738.39 | 247.1  | 2.9  | 250    |
| 67 | 1491.29 | 247.51 | 2.49 | 250    |
| 68 | 1243.78 | 247.93 | 2.07 | 250    |
| 69 | 995.85  | 248.34 | 1.66 | 250    |
| 70 | 747.51  | 248.75 | 1.25 | 250    |
| 71 | 498.76  | 249.17 | 0.83 | 250    |
| 72 | 249.59  | 249.59 | 0.42 | 250.01 |