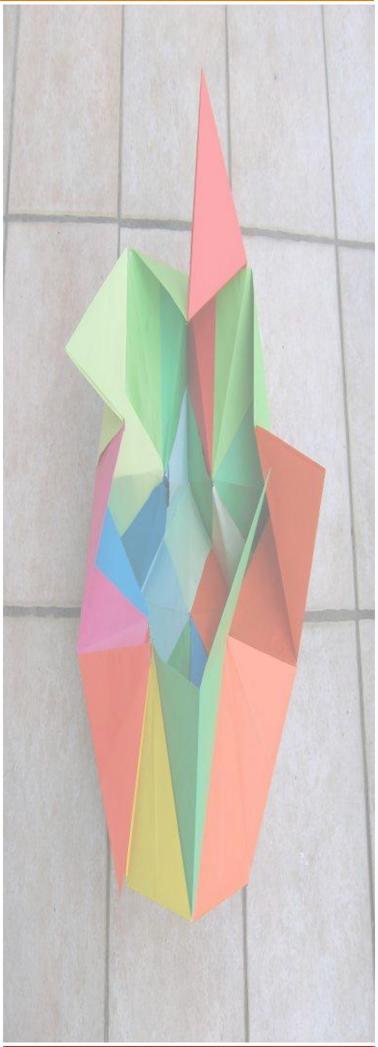



Les polyèdres réguliers convexes et non convexes par pliage (Origami).

[Les polyèdres par Origami.]

Marcel Morales et Alice Morales



2009

EDITION MORALES

Table des polyèdres réguliers convexes

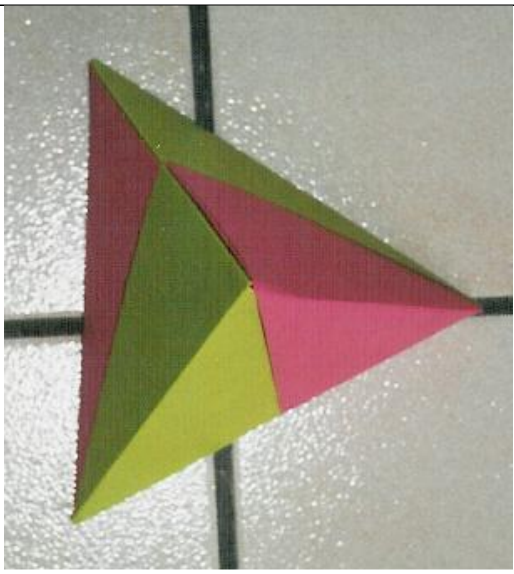
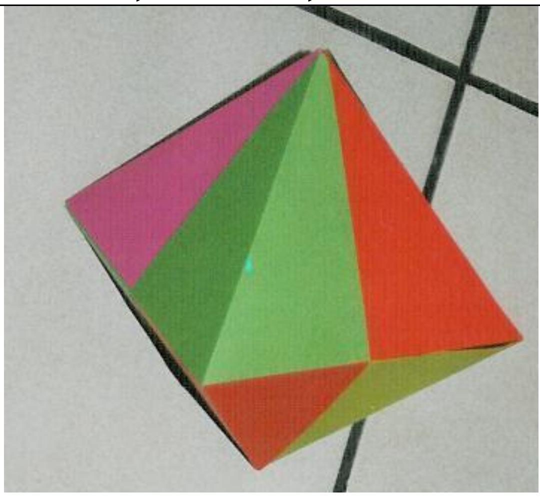
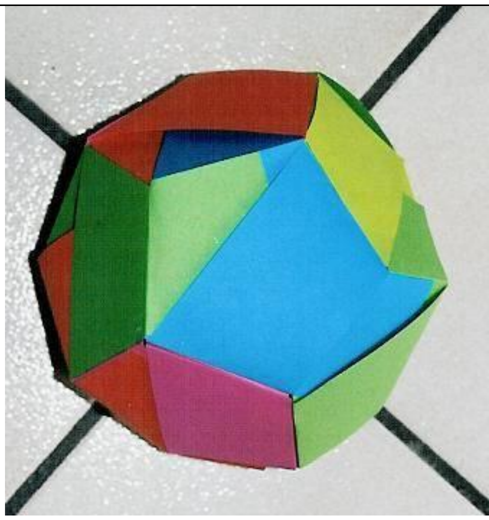
 **Tétraèdre** 2 pièces triangle symétriques (A+B) 4 faces, 6 arêtes, 4 sommets	 **Cube** 6 pièces carrées identiques, 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets
 **Octaèdre** 4 pièces triangle identiques 8 faces, 12 arêtes, 6 sommets	 **Dodécaèdre** 12 pentagones 12 faces, 30 arêtes, 20 sommets
Icosaèdre 10 pièces triangle (5A+5B) 20 faces, 30 arêtes, 12 sommets	

Table des polyèdres qui réguliers non convexes, Polyèdres de Kepler Poinsot.

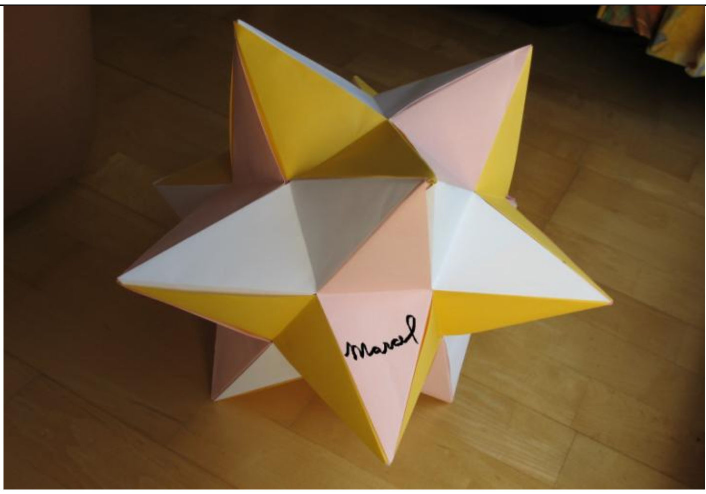
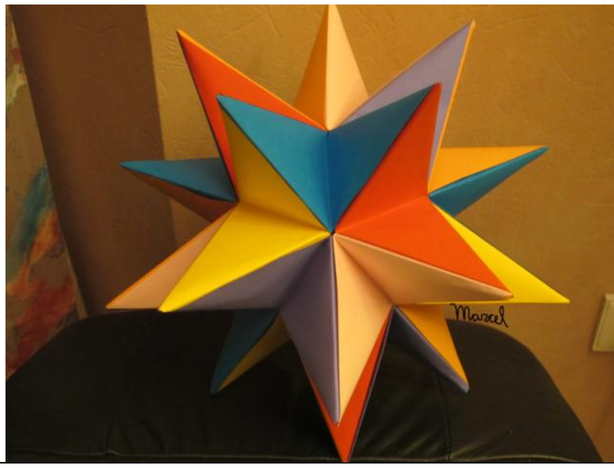
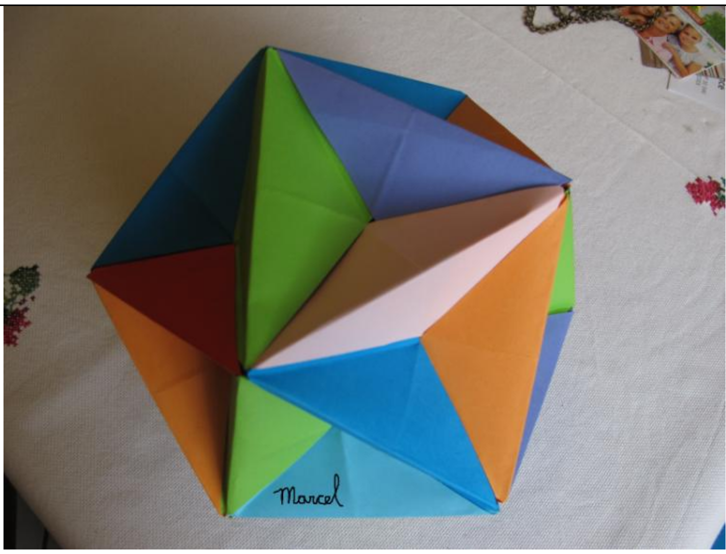
 **Le petit dodécaèdre étoilé** 30 pièces identiques 12 pentagones étoilés **12 faces, 30 arêtes, 20 sommets**	**Le grand dodécaèdre étoilé.** 30 pièces identiques 12 pentagones étoilés **12 faces, 30 arêtes, 20 sommets** 
 **Le grand dodécaèdre** 30 pièces identiques 12 pentagones **12 faces, 30 arêtes, 20 sommets**	**Le grand icosaèdre.** 120 pièces identiques **180 faces, 270 arêtes, 92 sommets** 

Table des polyèdres qui méritent d'être nommés réguliers non convexes

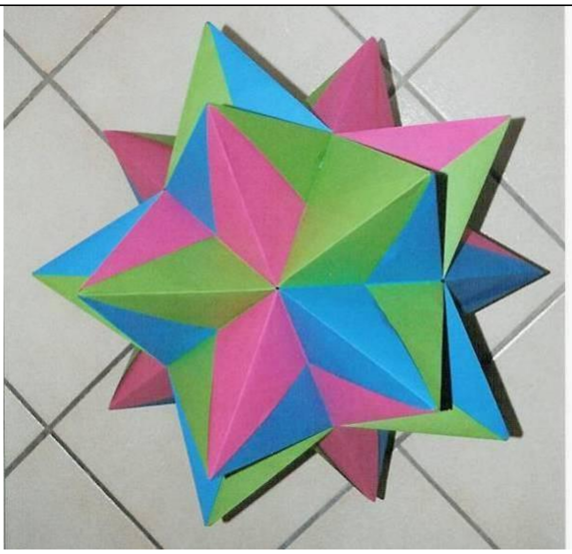
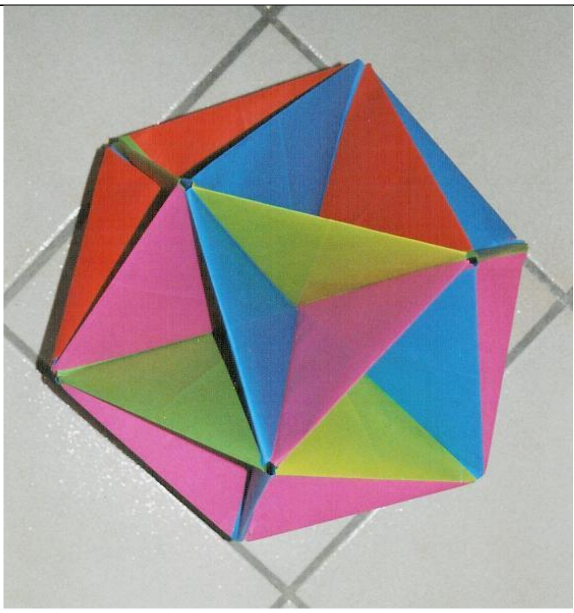
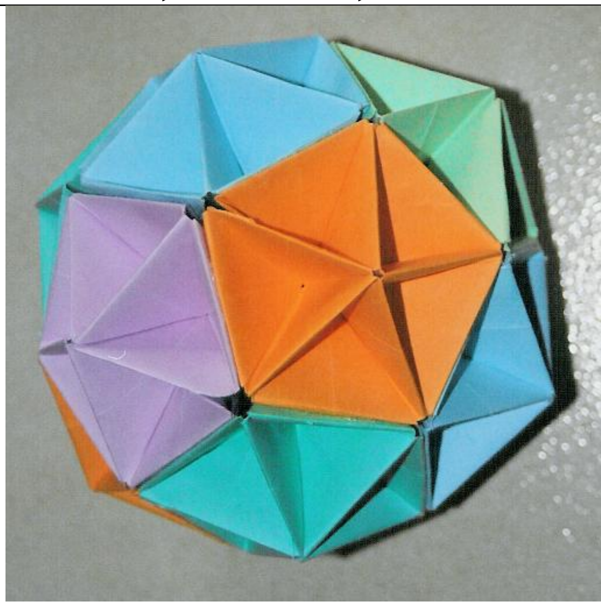
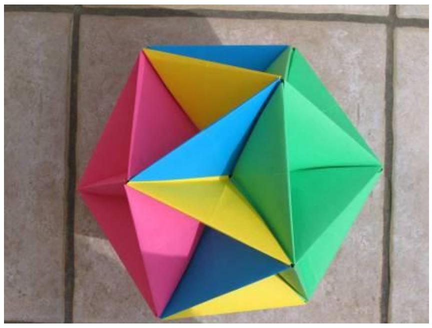
 **Le petit dodécaèdre étoilé** 30 pièces identiques 60 faces, 90 arêtes, 32 sommets	 **Le grand dodécaèdre étoilé.** 30 pièces identiques 60 faces, 90 arêtes, 32 sommets
 **Le grand dodécaèdre** 30 pièces identiques 60 faces, 90 arêtes, 32 sommets	 **Le grand icosaèdre**. 120 pièces identiques 180 faces, 270 arêtes, 92 sommets

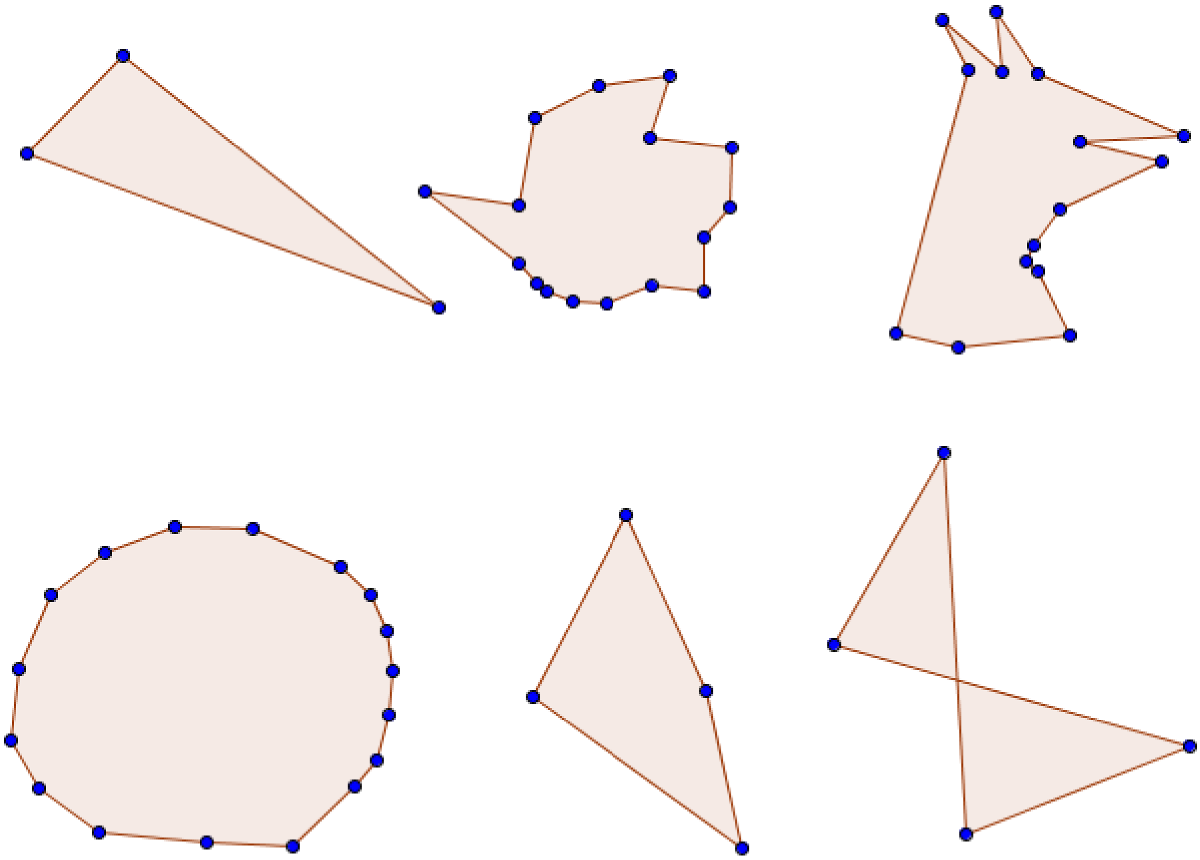
Table des polyèdres réguliers non convexes

Quelques polyèdres pas loin d'être réguliers

Le grand dodécaèdre étoile inversée ou troisième stellation de l'icosaèdre 30 pièces identiques, **60 faces, 90 arêtes, 32 sommets** 	**Le petit dodécaèdre étoilé rectangle** 30 pièces carrées identiques **60 faces, 90 arêtes, 32 sommets** 	**Le grand dodécaèdre rectangle** 30 pièces carrées identiques 60 faces, 90 arêtes, 32 sommets 
Le grand icosaèdre rectangle 120 pièces carrées identiques **180 faces, 270 arêtes, 92 sommets** 	**Stellation finale de l' icosaèdre** 90 pièces carrées identiques. 	**Le ballon d'Epcot** **270 pièces** carrées identiques. 

<u>Un peu de géométrie des polygones</u>.

Un polygone est une figure plane délimitée par des segments de droite, qu’on appelle <u>les côtés</u>, un point se situant à l’extrémité de deux arêtes est un sommet. Voici quelques exemples :



Nous observons des différences entre ces polygones, d’abord le nombre des sommets, ensuite le nombre de côtés, puis dans la forme. Soyons plus précis.

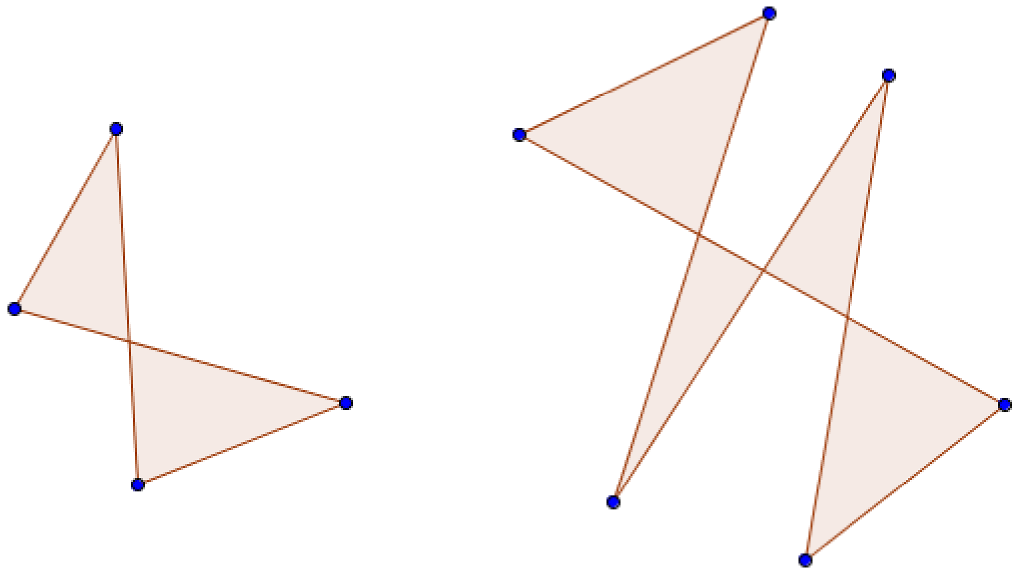
<u>Le nombre de côtés</u> est très important, ainsi nous parlerons de :

- Polygone à trois cotés ou triangle,
- Polygone à quatre côtés ou quadrilatère,

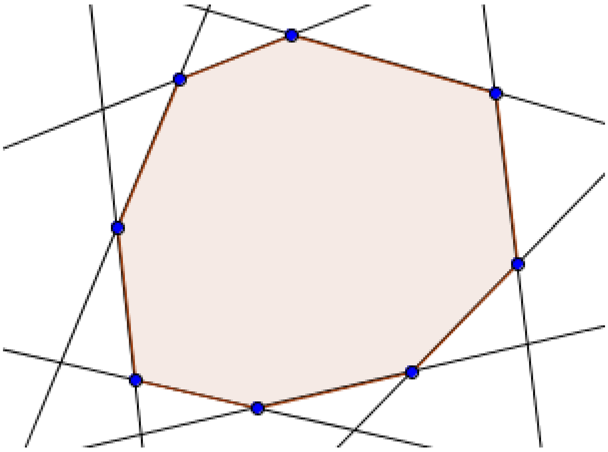
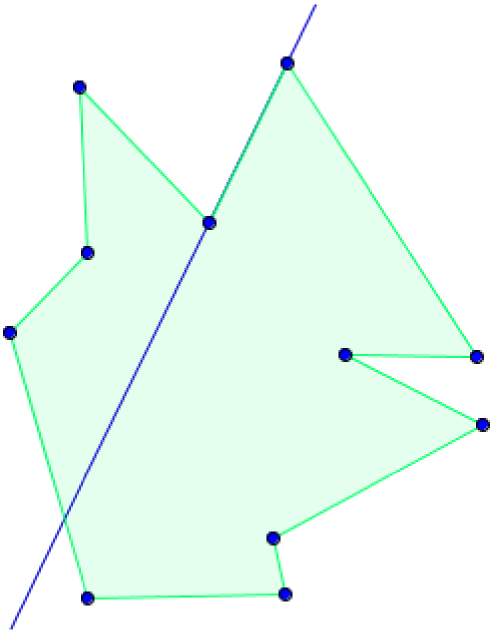
- Polygone à cinq côtés ou pentagone,
- Polygone à six côtés ou hexagone,
- Polygone à sept côtés ou heptagone,
- Polygone à huit côtés ou octogone,
- Polygone à neuf côtés ou ennéagone,
- Polygone à dix côtés ou décagone,
- Polygone à onze côtés ou hendécagone,
- Polygone à douze côtés ou dodécagone,
- Polygone à vingt côtés ou icosagone.

Pour la forme de la figure nous devons distinguer :

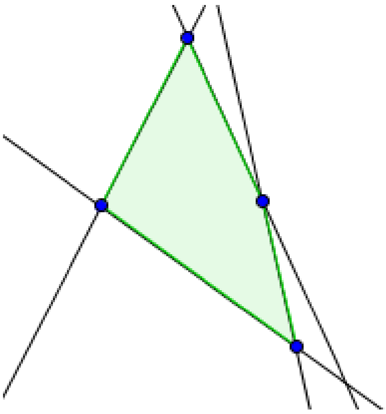
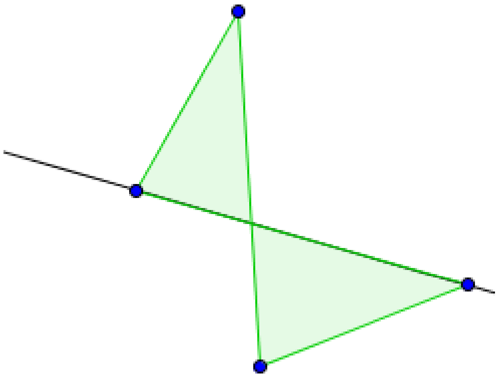
- Les **<u>polygones croisés</u>** dans lesquels deux côtés se rencontrent en un autre point que une extrémité.



- Les polygones convexes : Chaque côté du polygone se prolonge en une droite, cette droite partage le plan en deux régions, si le polygone n'est pas partagé en deux régions alors on dit que le polygone est convexe sinon on dit que le polygone est étoilé.

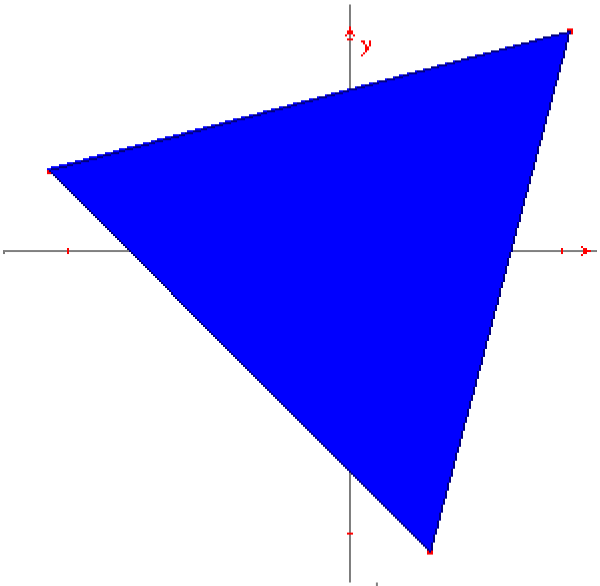



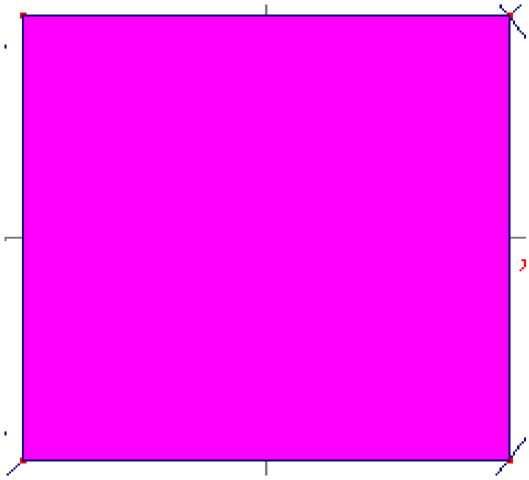
Le polygone de gauche est convexe et celui de droite est étoilé.

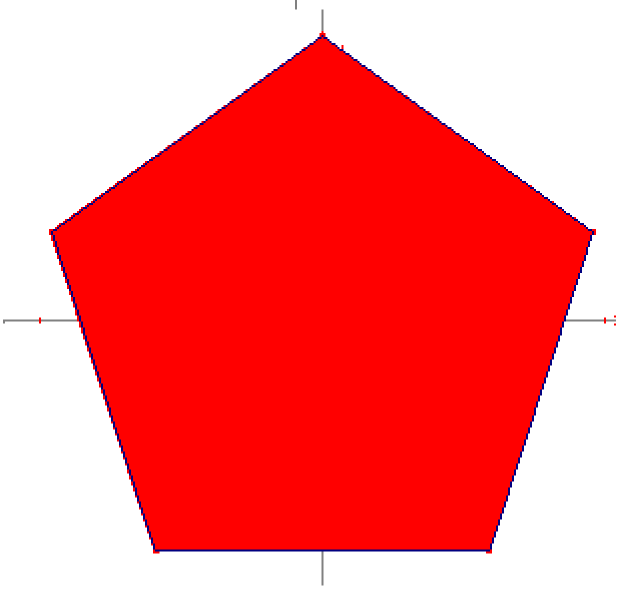



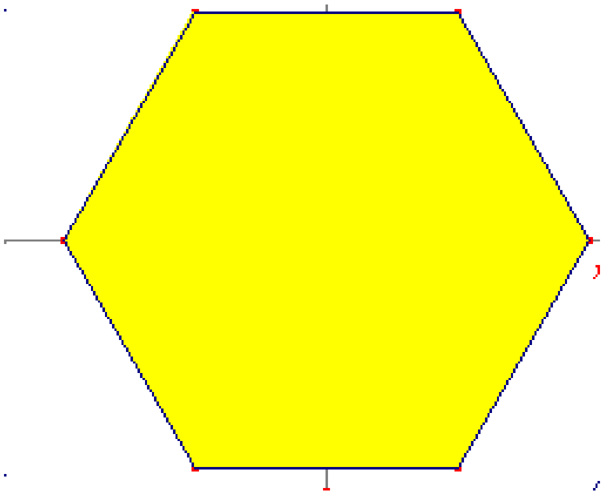
- Les **polygones réguliers**. Dans le langage courant un polygone régulier est un **polygone convexe** dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur, mais nous pouvons parler aussi de polygones réguliers étoilés.

Les polygones réguliers convexes

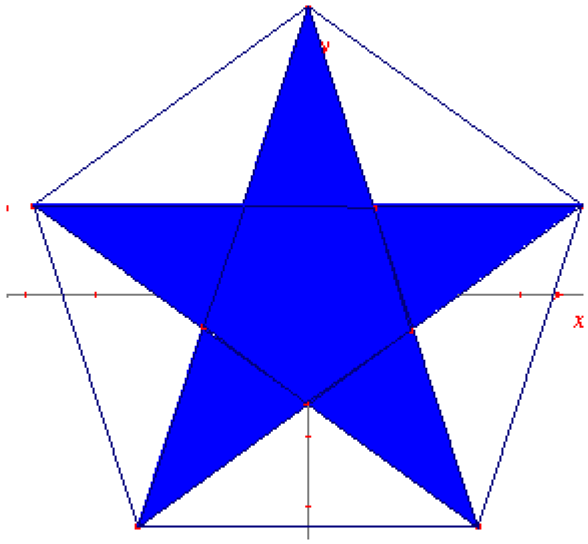


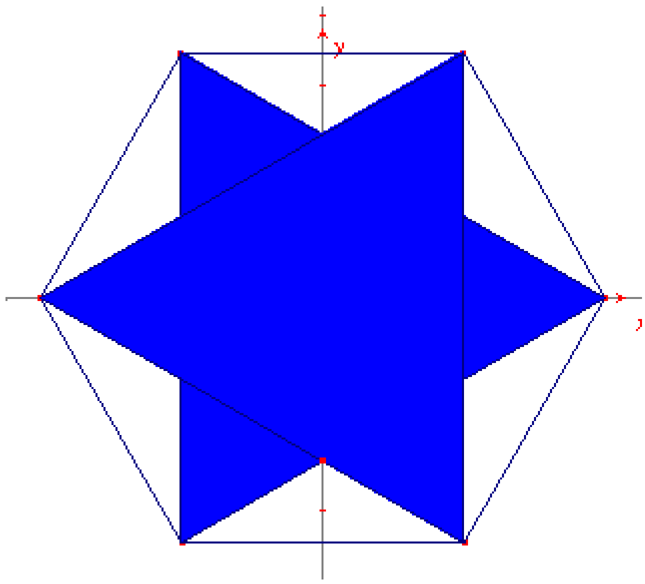


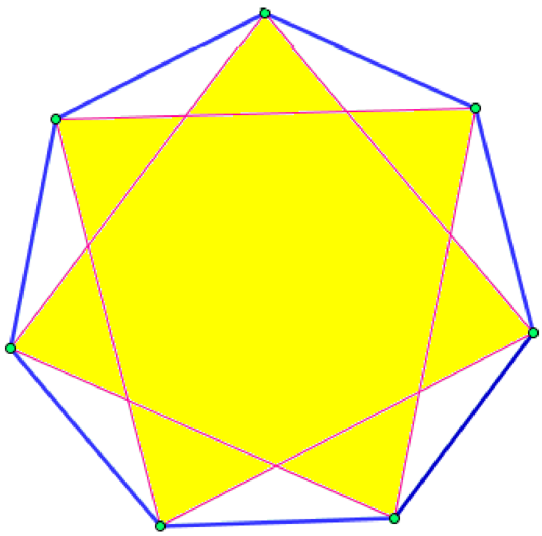




Les polygones réguliers étoilés



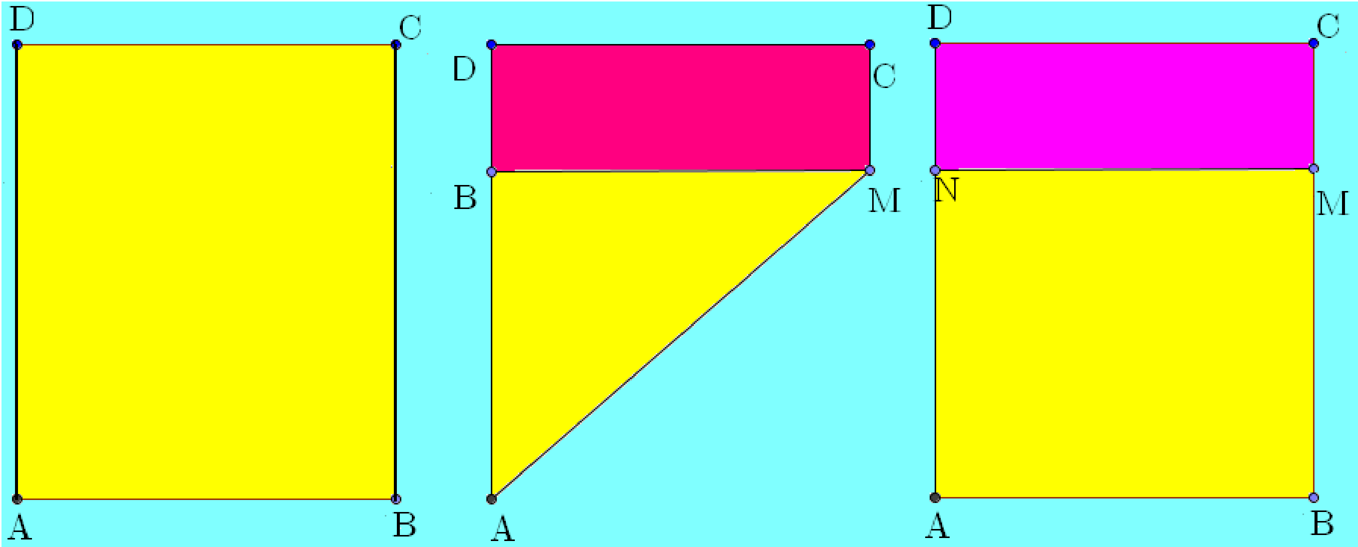




Fabrication de polygones réguliers par pliage

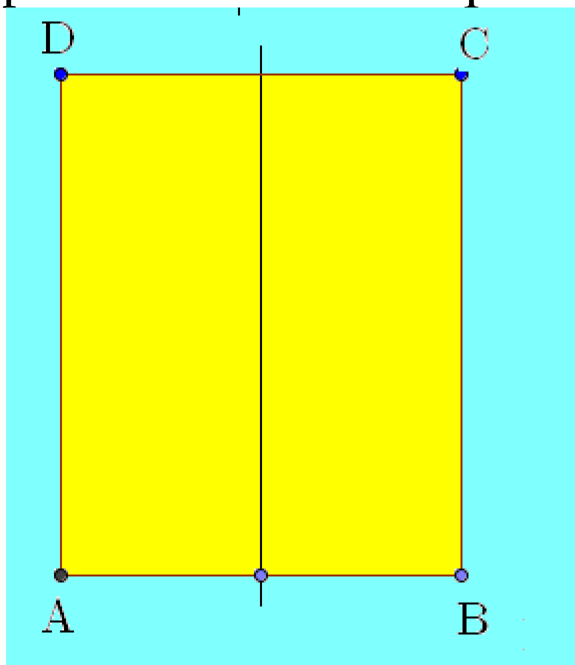
Le carré :

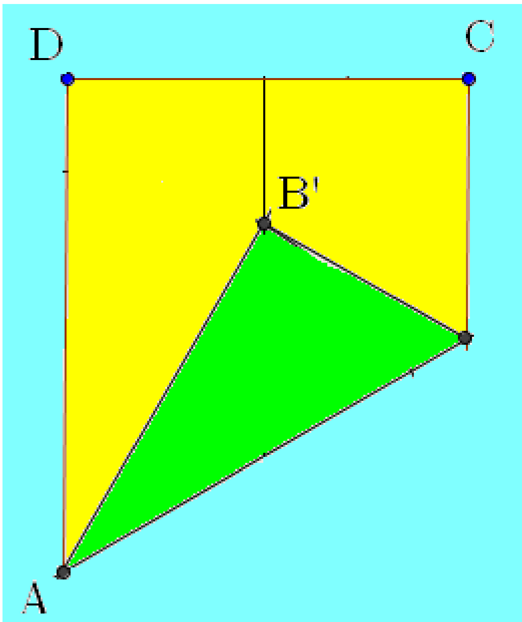
Prendre une feuille rectangulaire ABCD et ramener le côté AB sur le coté AD, plier la feuille et déterminer les point M et N, plier suivant le segment (MN). La figure ABMN est un carré.



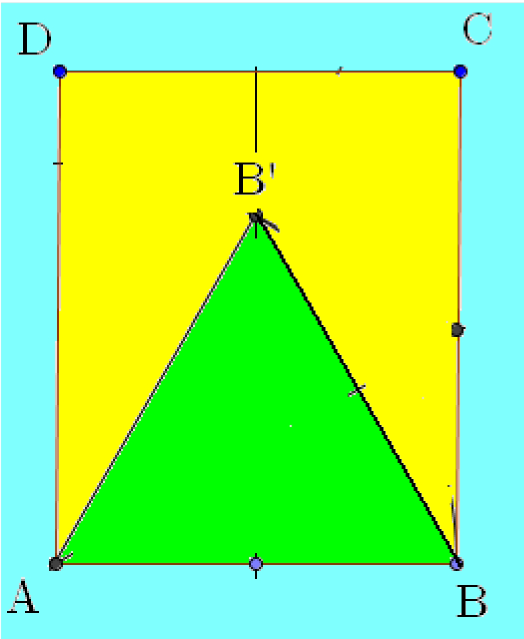
<u>Le triangle équilatéral :</u>

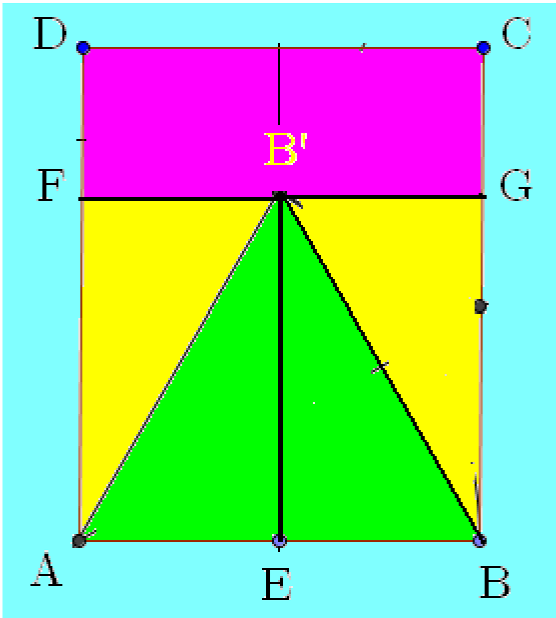
Prendre une feuille rectangulaire, la plier en deux sur la largeur puis plier en ramenant le sommet B sur la droite de pli, on obtient ainsi le point B’ Marquer ce point. Accentuer le pli avec l’ongle.



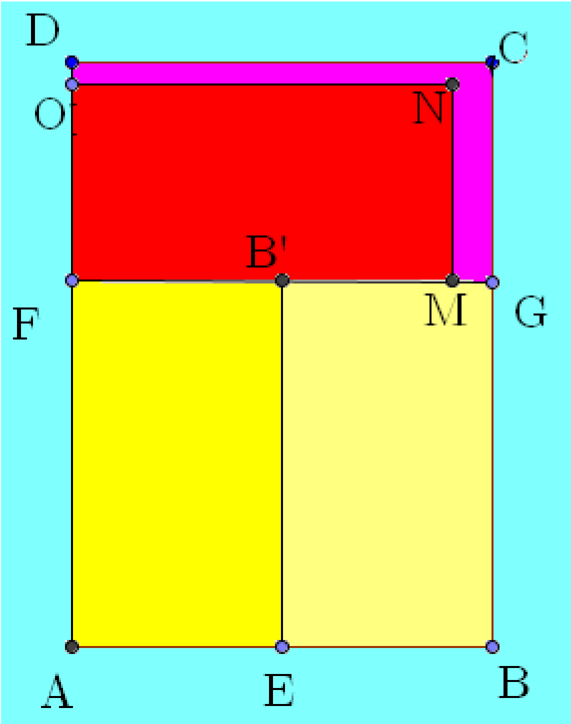


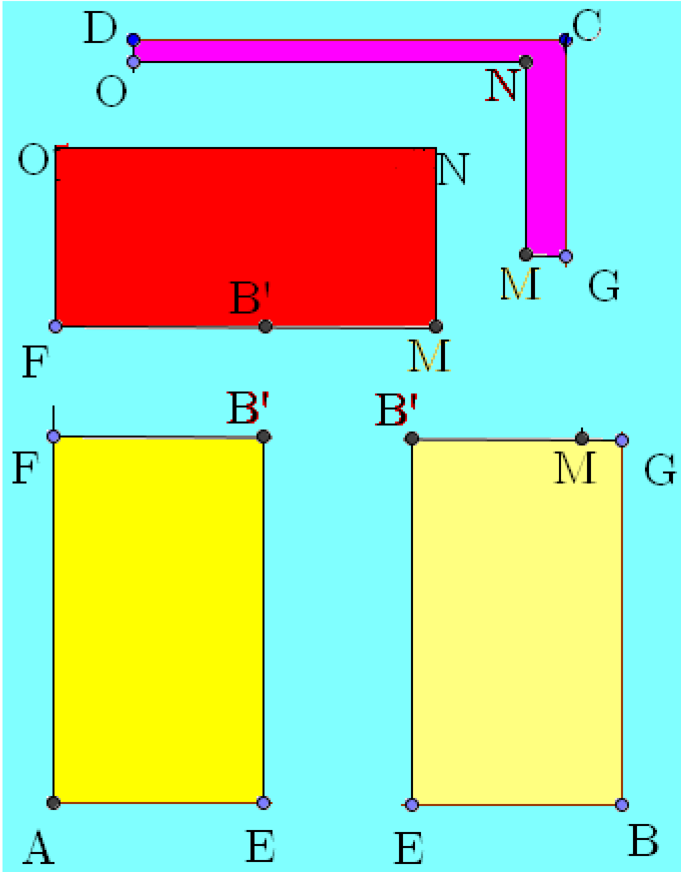
Par deux plis successifs on obtient le triangle équilatérale ABB'. Mais pour réaliser des polyèdres réguliers par pliage nous aurons besoin de feuilles rectangulaires de dimensions bien précises (largeur : *l* et longueur $l\sqrt{3}$) qu'on appelle rectangles de bronze. Les rectangles AEB'F et EBGB' sont des rectangles de bronze.





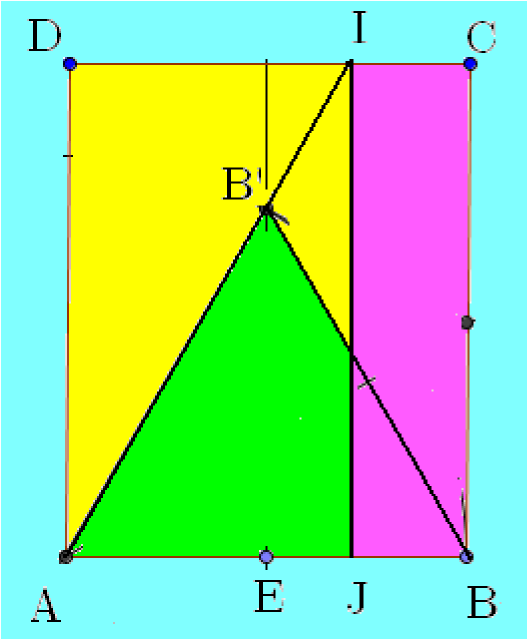
Exemple : avec une feuille A4 : 210x297 mm.
Nous pouvons obtenir 3 rectangles de bronze, ce sont les rectangles AEB'F, EBGB' et FMNO.
Nous donnons les longueurs pour faciliter la découpe de la feuille A4 :
AE=105mm, AF=182mm, FO=105mm, OD=10mm, FM=182mm, MG=22mm.

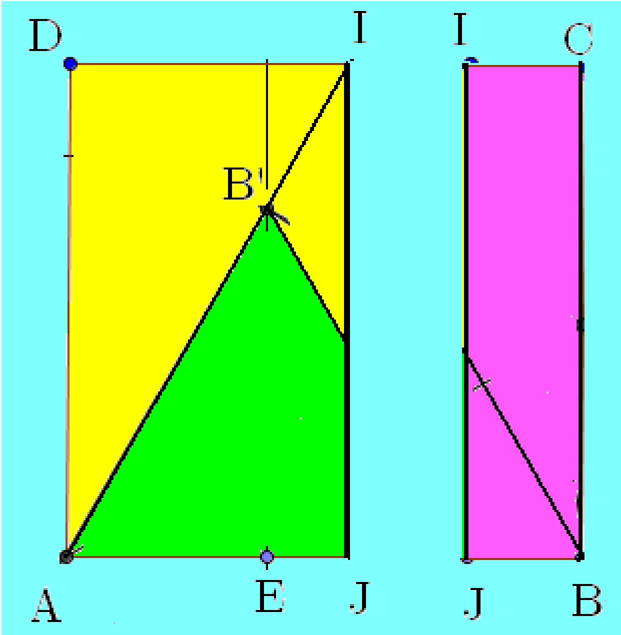




Etant donné une feuille rectangulaire nous pouvons aussi obtenir le plus grand rectangle de bronze à partir de cette feuille de la façon suivante :

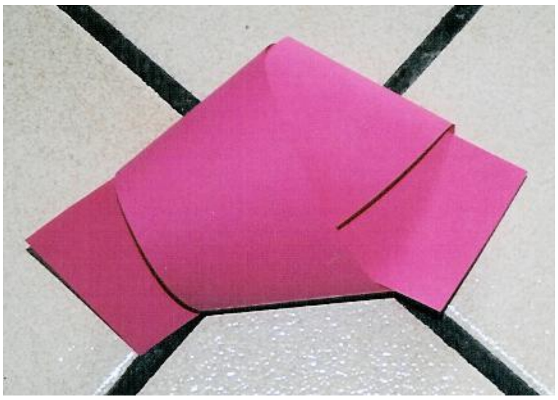
Plier la feuille suivant la droite (AB’) et déterminer le point I puis le point J. Déplier la feuille puis la plier la suivant la droite (JI) et couper la feuille suivant la droite (JI). Le rectangle AJID est un rectangle de bronze et le rectangle JBCI est un ruban qui nous servira à fabriquer un pentagone régulier.

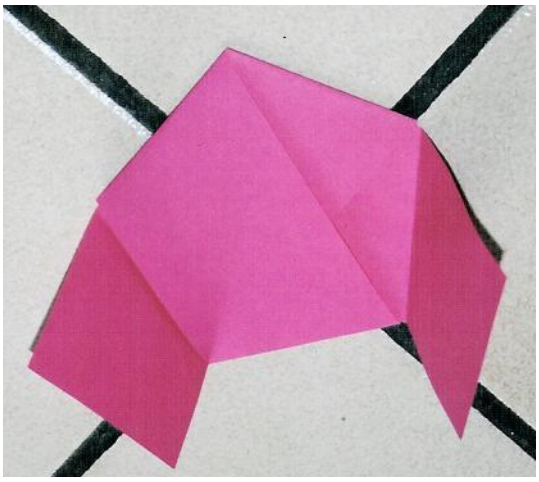




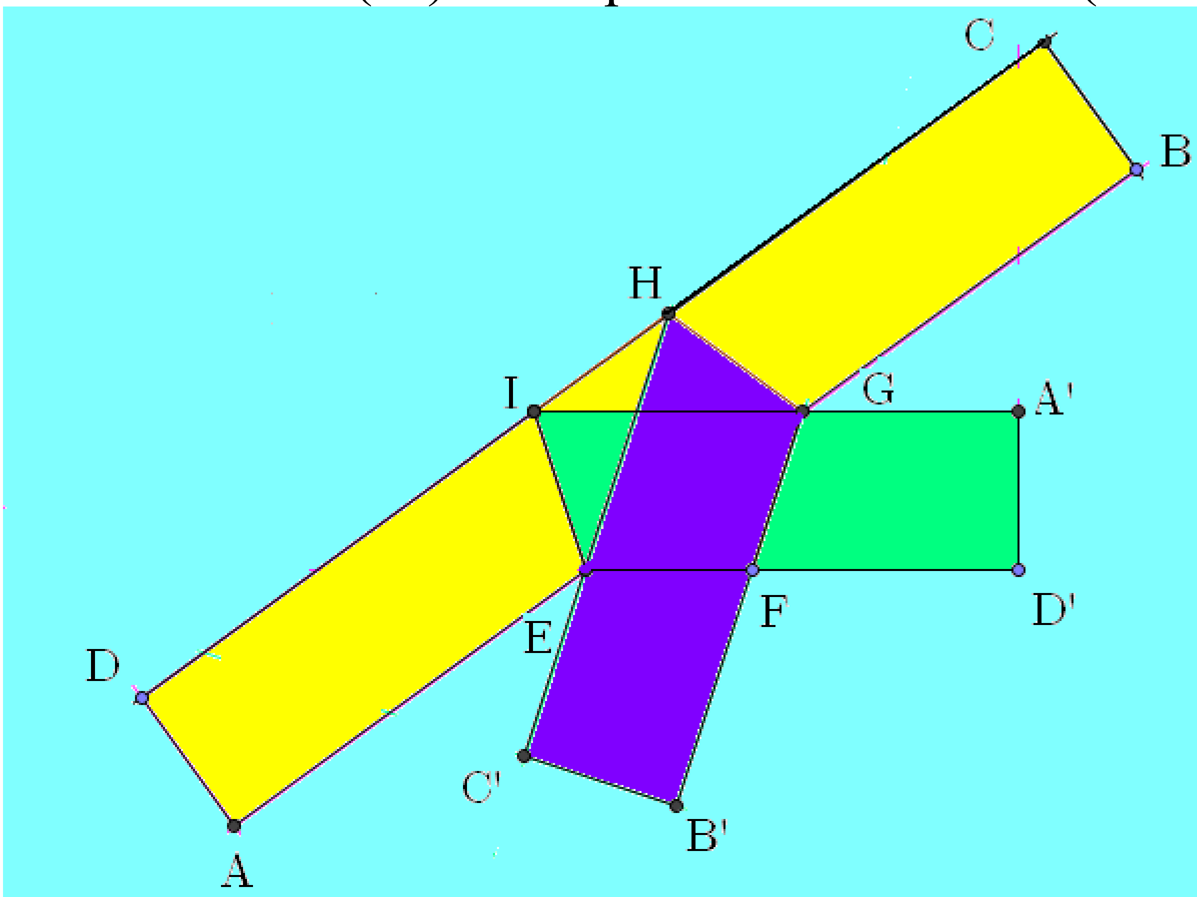
Le pentagone régulier :

Choisir un ruban de papier ABCD, attention la longueur AB doit être au moins 8 fois la largeur BC. Faire un nœud avec le ruban puis tirer délicatement sur les deux extrémités jusqu'à la position limite. Accentuer les plis avec les ongles. De cette façon on obtient un pentagone régulier avec deux languettes, que si l'on désire on peut plier.

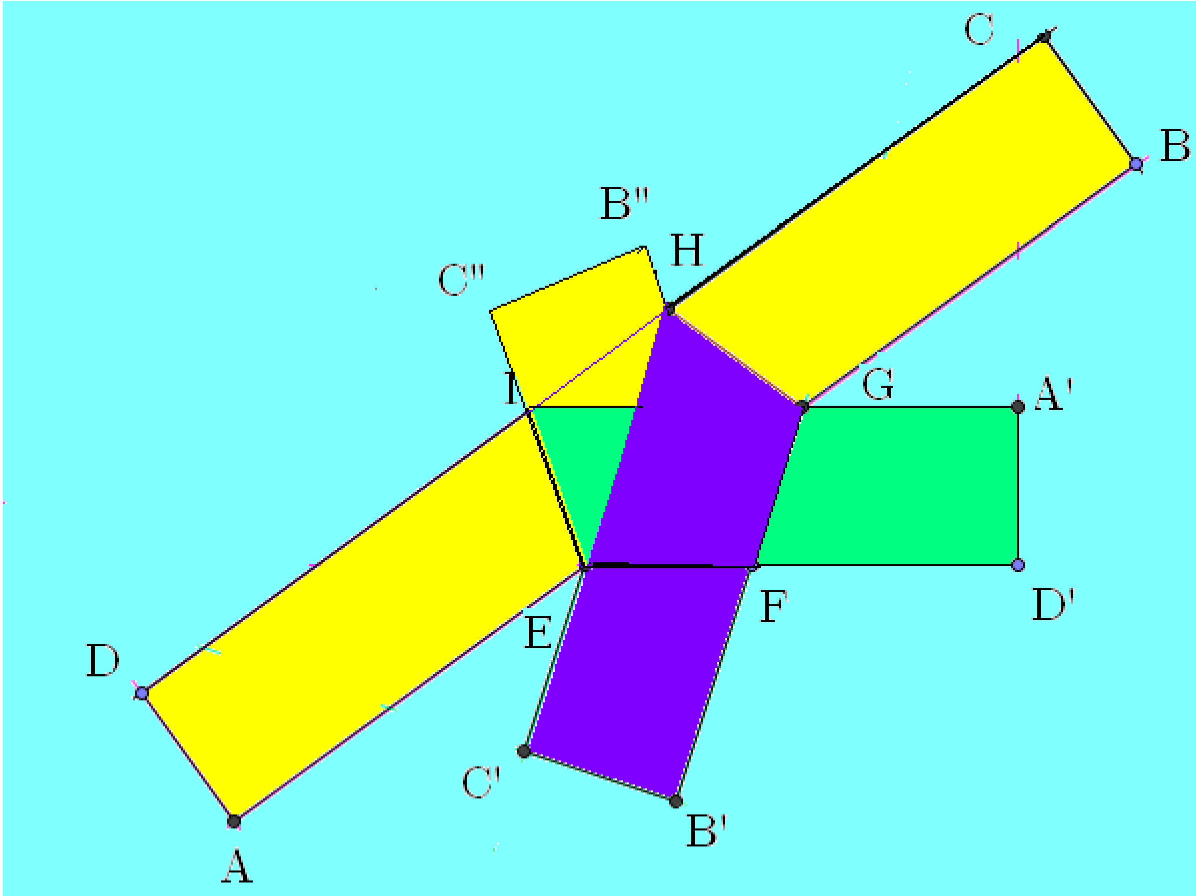




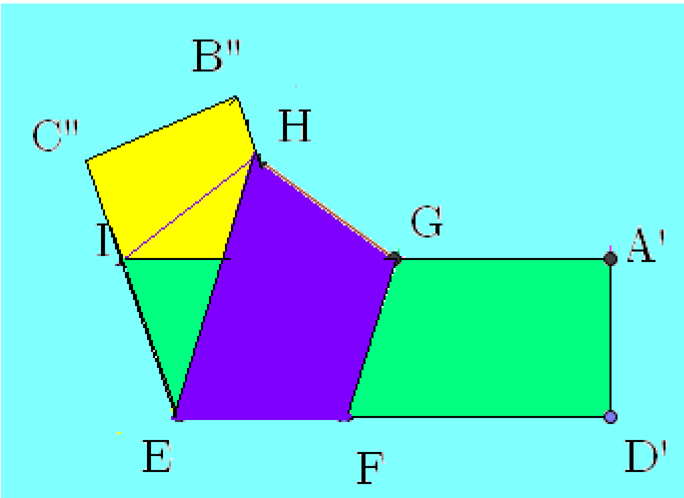
Pour comprendre comment on a obtenu un pentagone régulier faisons la démarche inverse :
Prenons un pentagone régulier EFGHI et construisons le rectangle ABCD, la droite (AB) passant par E et G. La droite (CD) passant par H et I. Faire un pli le long de la droite (GH) signifie faire une symétrie (orthogonale) d'axe la droite (GH). Le quadrilatère BCHG se transforme par la symétrie d'axe la droite (GH) en le quadrilatère C'B'GH (en mauve). De même Le quadrilatère AEID se transforme par la symétrie d'axe la droite (EI) en le quadrilatère D'A'IE (en vert).



Nous retrouvons notre nœud en transformant le quadrilatère C'B'FE par la symétrie d'axe la droite (EF) en le quadrilatère EFB''C''.



Voici notre nœud après effacement des traits auxiliaires :



<u>Un peu de géométrie des polyèdres.</u>

Un polyèdre est un volume dans l'espace délimité par des polygones (**<u>faces du polyèdre</u>**) qui se trouvent dans des plans différents. Les faces se rencontrent sur des segments de droite (**<u>arêtes du polyèdre</u>**), un point se situant à l'extrémité de plusieurs arêtes est un **<u>sommet</u>**.

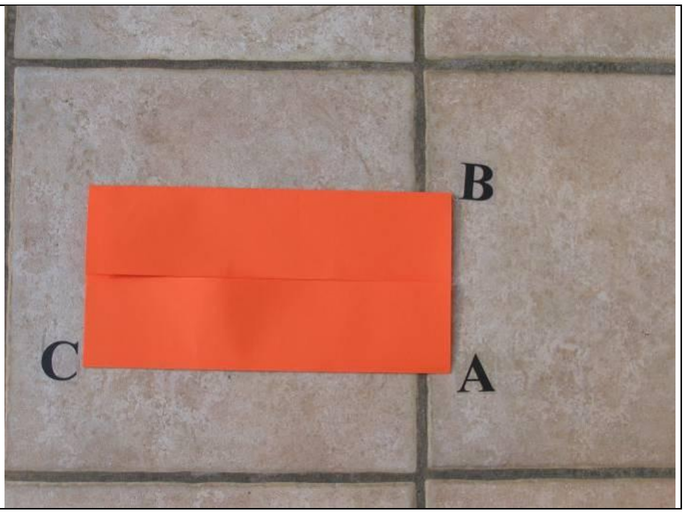
Prenons une face du polyèdre, cette face est contenue dans un plan, ce plan divise l’espace en deux régions. **Un polyèdre est convexe** si pour chacune de des faces le polyèdre se trouve entièrement dans l’une de ces régions. Voici des polyèdres convexes et non convexes :

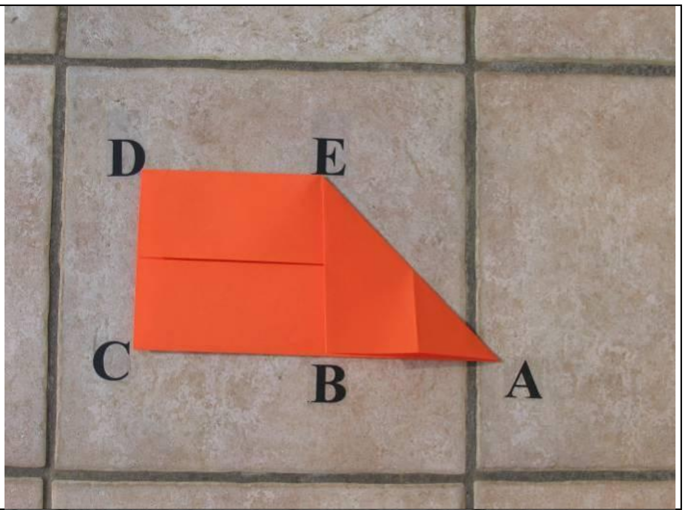
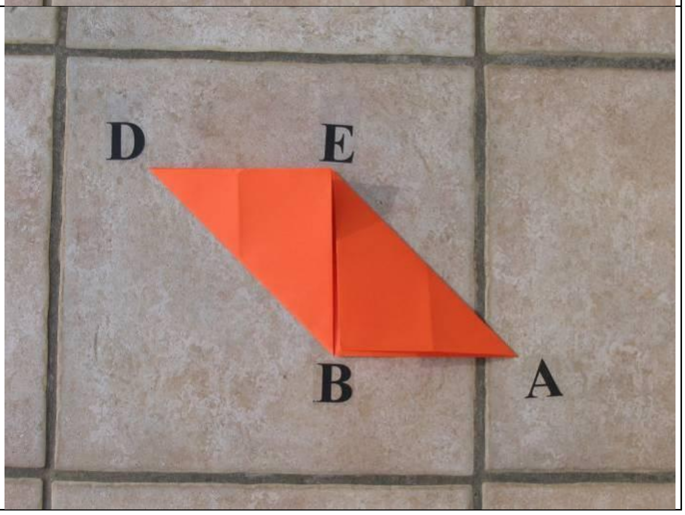
Fabrication du cube par pliage :

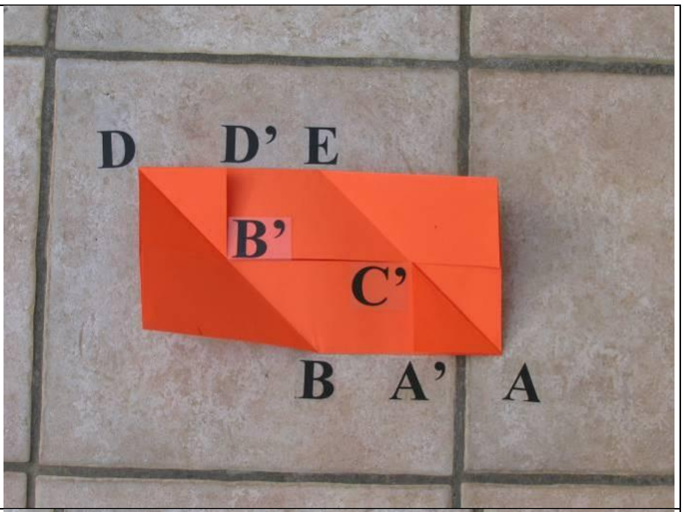
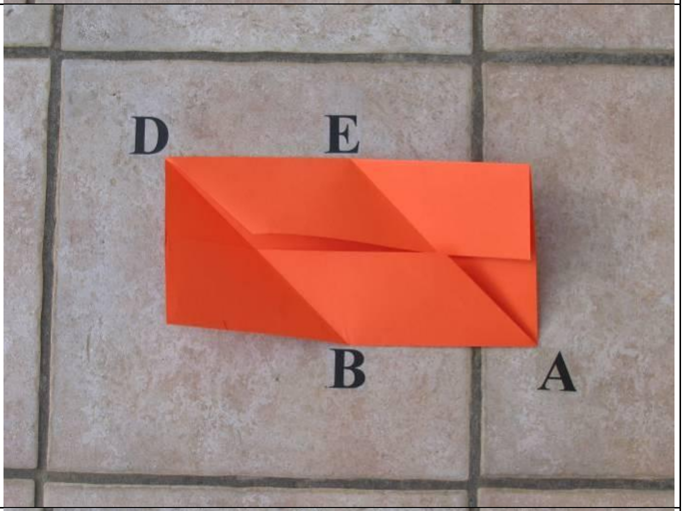
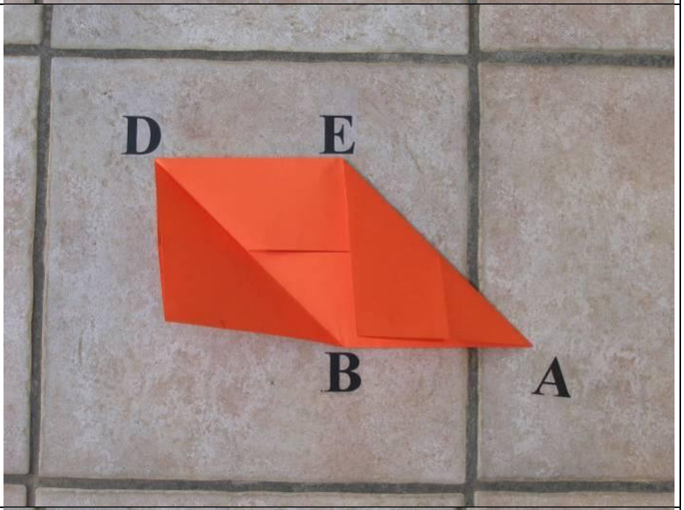
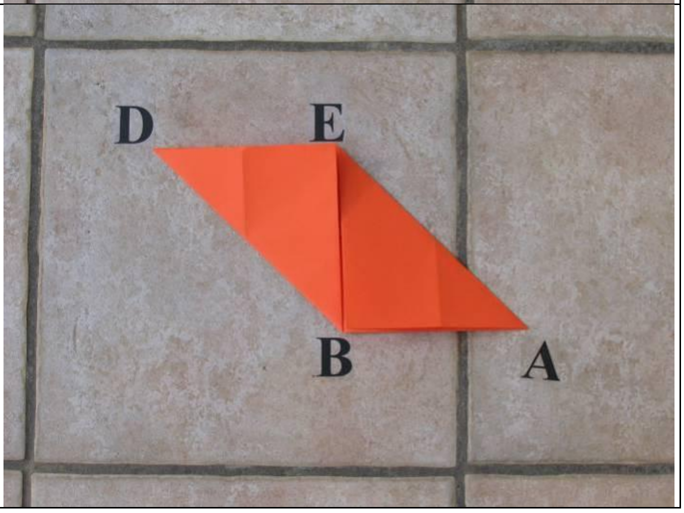
Nous avons besoin de 6 feuilles carrés de mêmes dimensions. Nous prendrons 2 bleus, 2 rouges et deux vertes. Voici comment plier chacune des feuilles :

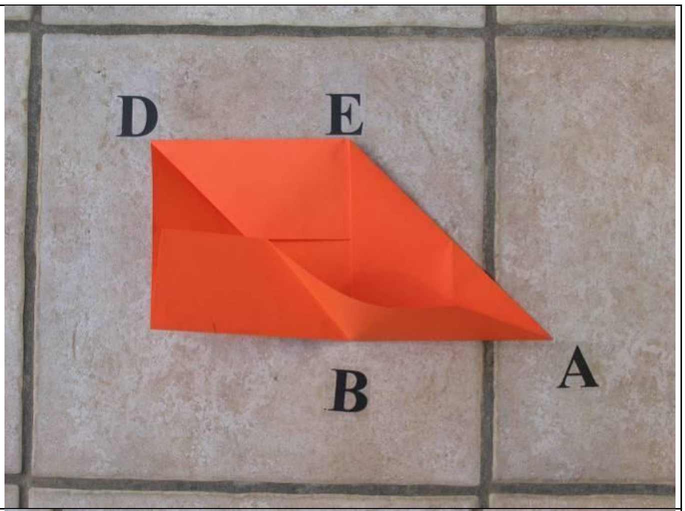
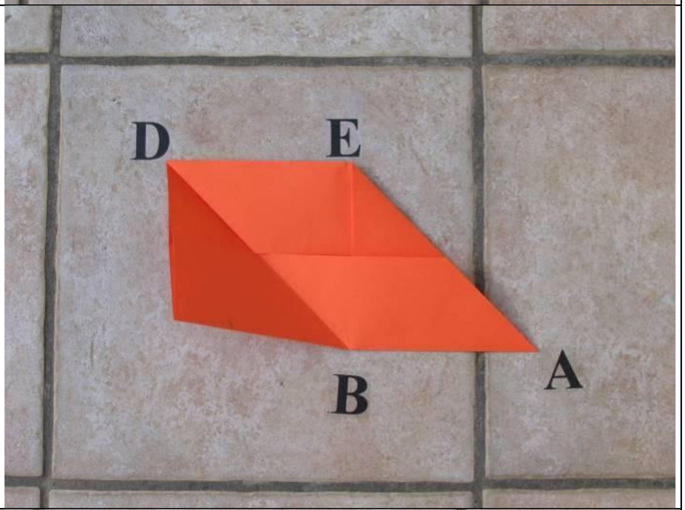
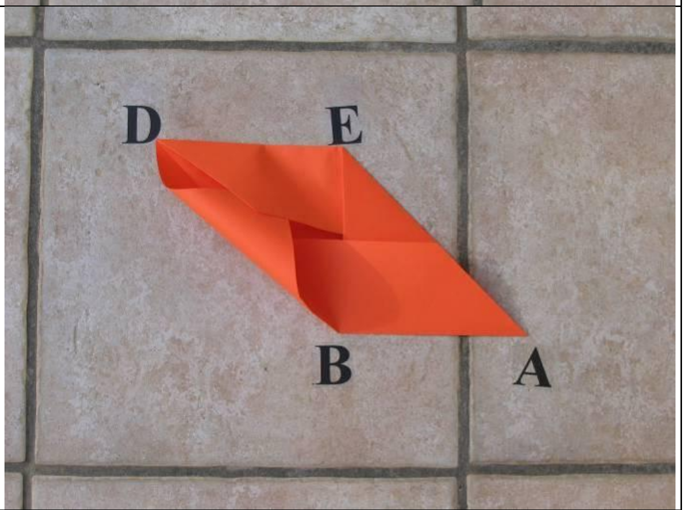
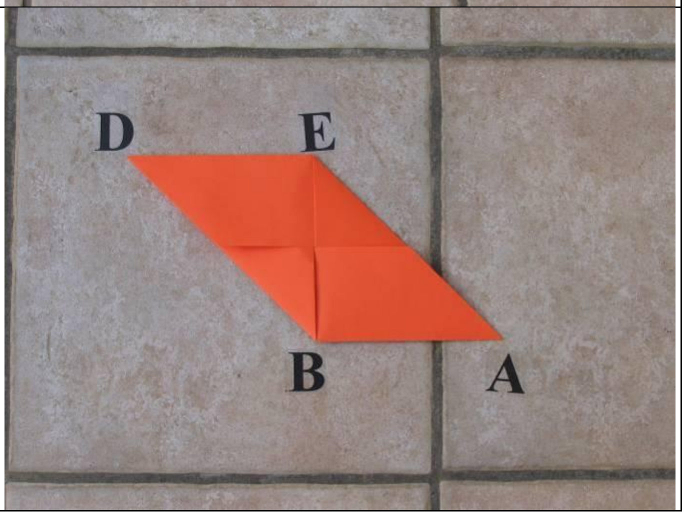
Fabrication de la face carrée de base

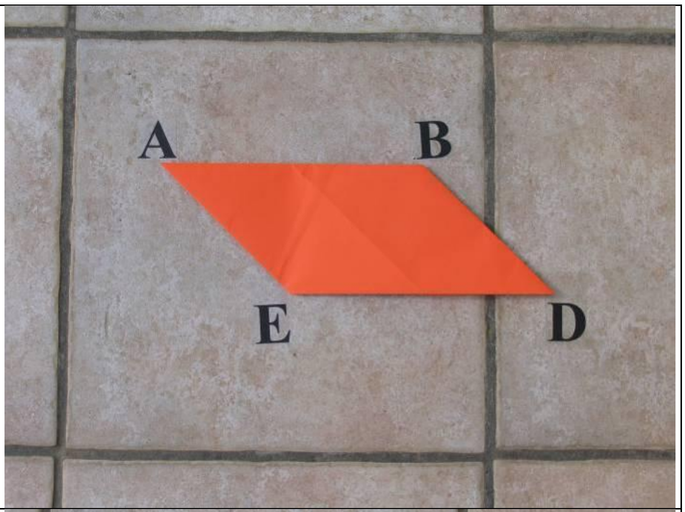
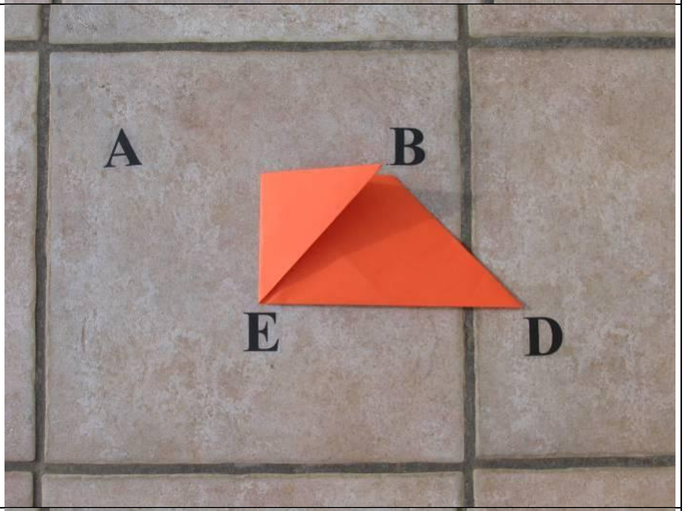
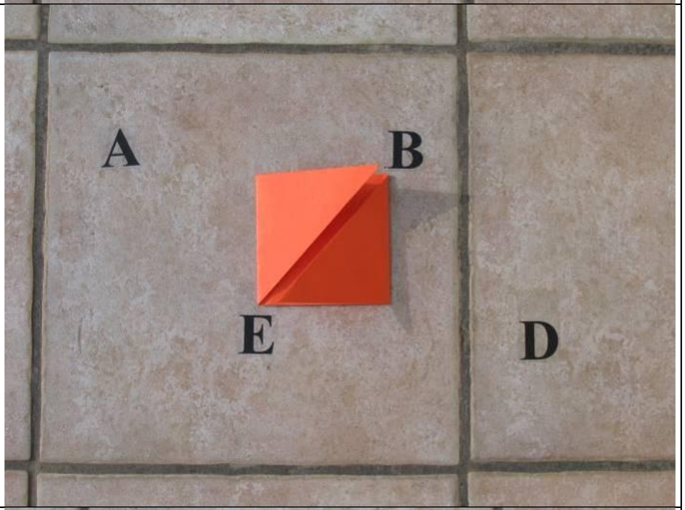
Prendre une feuille carrée.	
Plier la feuille en deux parties égales.	
Plier chacune des deux parties en deux parties égales. Voici la première	

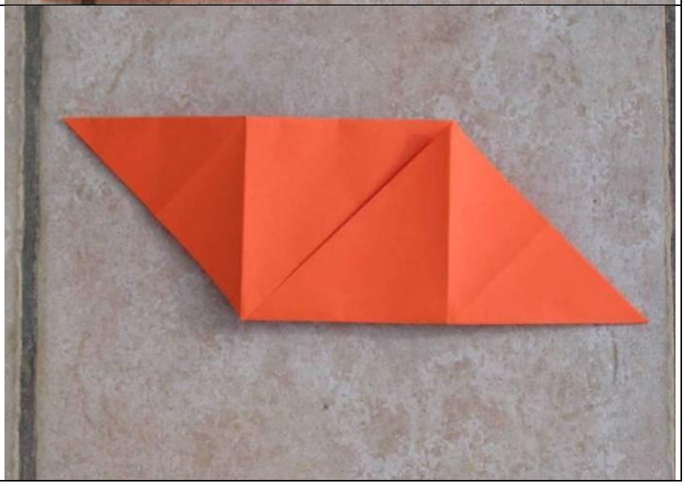
Voici la deuxième.	

Plier la partie supérieure et la partie inférieure du carré Amener le côté vertical droit [AB] sur le côté horizontal bas [CA].	
Puis le coté vertical gauche [CD] sur le côté horizontal haut [DE].	

Ouvrir la feuille pliée. On voit deux petits triangles A'AC et B'D'D.	
Plier les deux petits triangles A'AC et B'D'D vers l'intérieur.	
Plier le grand triangle de droite. On trouve ainsi un triangle BAE.	
Plier le grand triangle de gauche. On trouve ainsi un triangle BED.	

Ouvrir la feuille pliée. Introduire le triangle supérieur à droite dans la fente du milieu.	
Voici le résultat.	
Introduire le triangle inférieur à gauche dans la fente du milieu, (il faut forcer un peu).	
Voici le résultat. On aperçoit les deux fentes qui se croisent en angle droit	

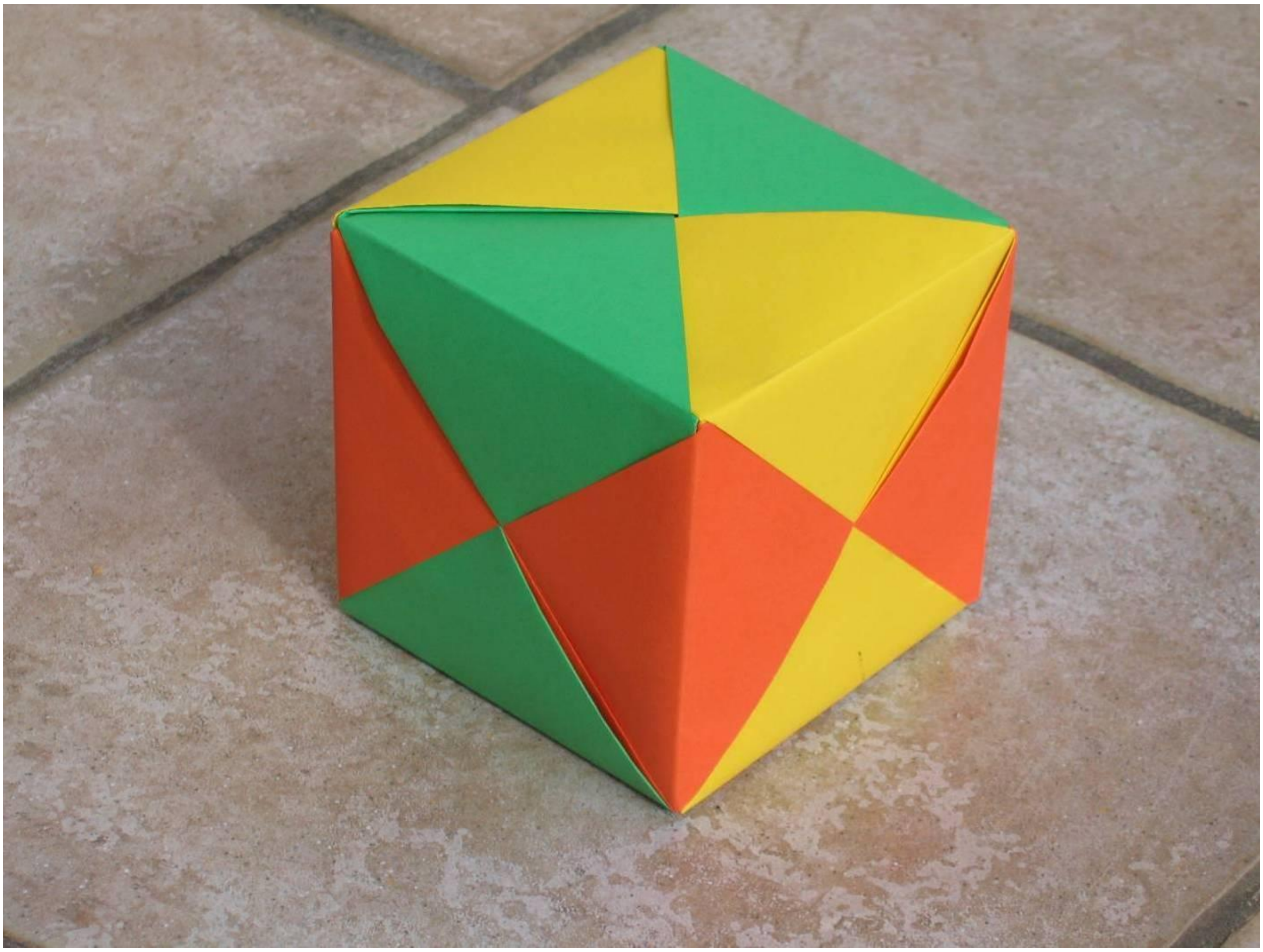
Retourner la feuille (on ne voit plus les fentes).	
Ramener le point A vers le point B en formant un angle droit.	
Ramener le point D vers le point E en formant un angle droit.	
Ouvrir, retourner la feuille voici le résultat. On aperçoit une fente sur le carré du milieu. Nous appellerons languettes les deux triangles.	

Nous pouvons aussi produire une feuille carrée symétrique. Seule la troisième étape change : Plier en angle droit le coin en haut à droite.	
Plier en angle droit le coin en bas à gauche.	
Le reste est similaire: **Voici la feuille carrée symétrique.**	

<u>Montage du cube :</u>

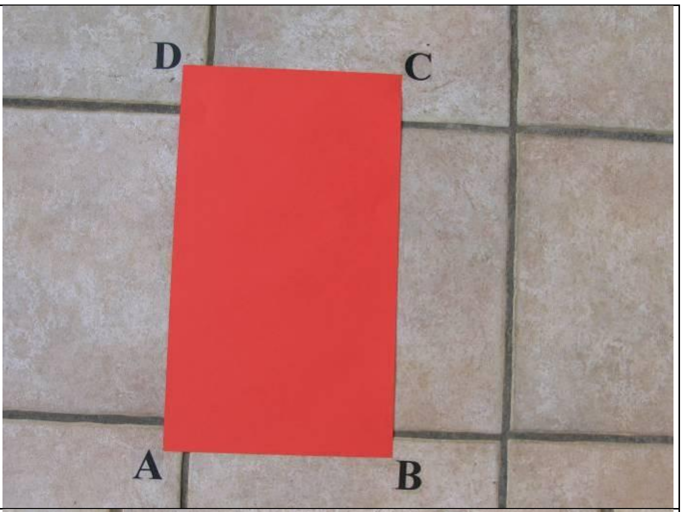
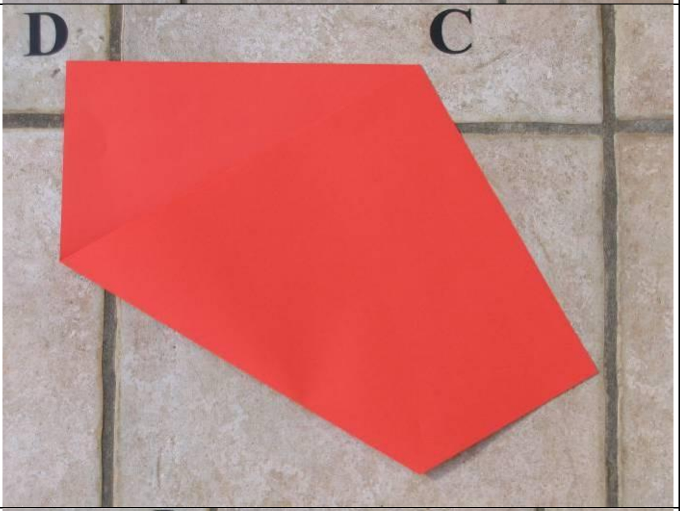
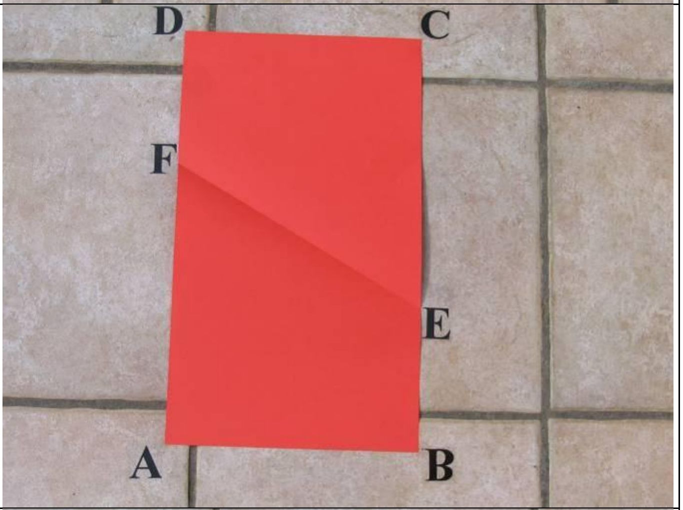
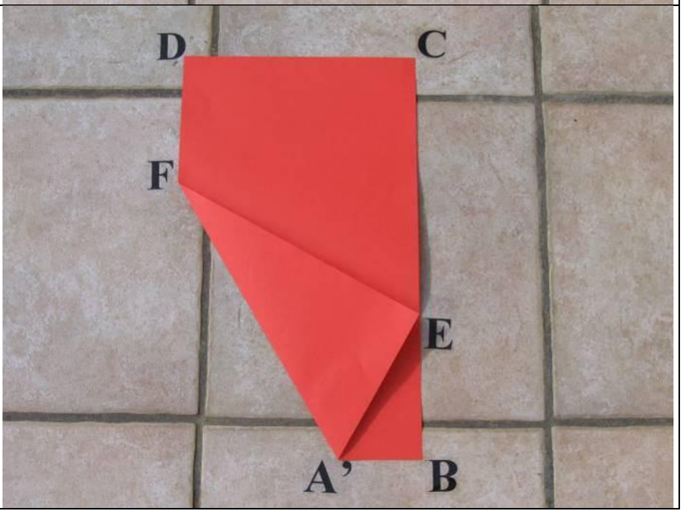
Répéter les étapes ci-dessus avec chacune des 5 autres feuilles carrées. **Les superposer pour vérifier que les 6 feuilles pliées sont identiques. Attention si vous avez un mélange de feuilles carrées et de feuilles symétriques vous ne pourrez pas fabriquer le cube.**

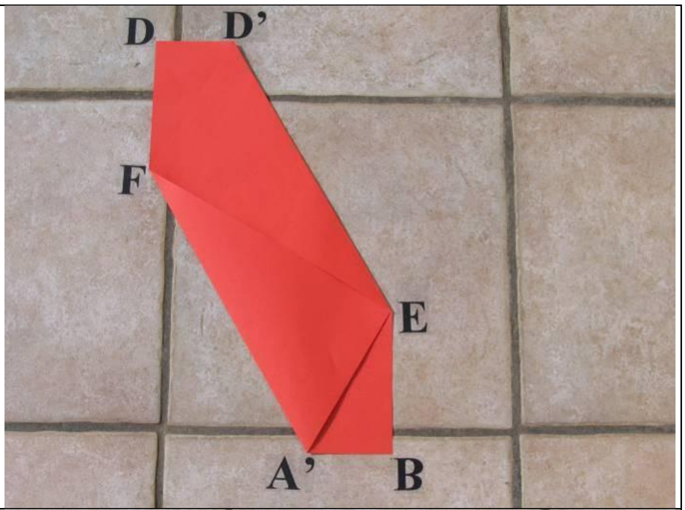
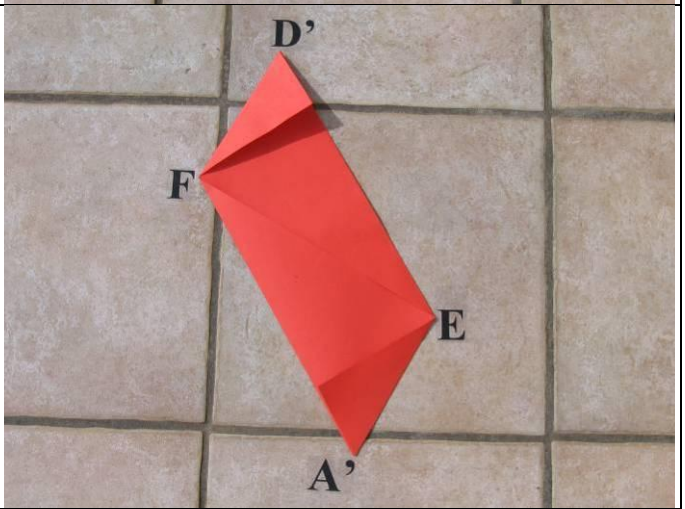
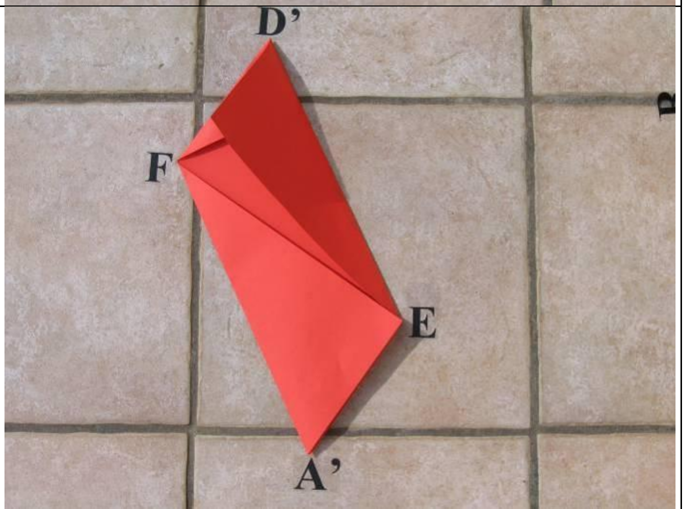
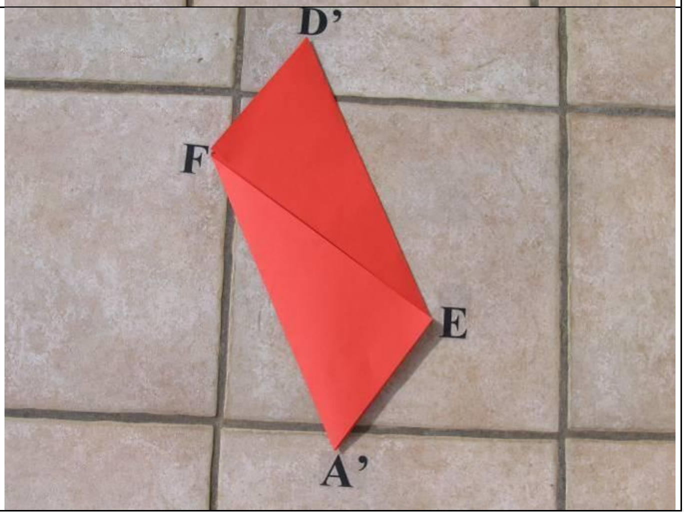
Insérer les languettes des pièces carrées orange dans les fentes des pièces carrées jaune.	

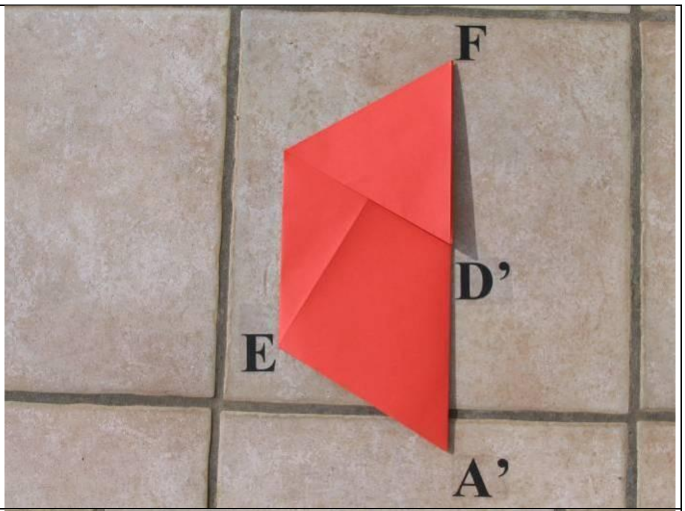
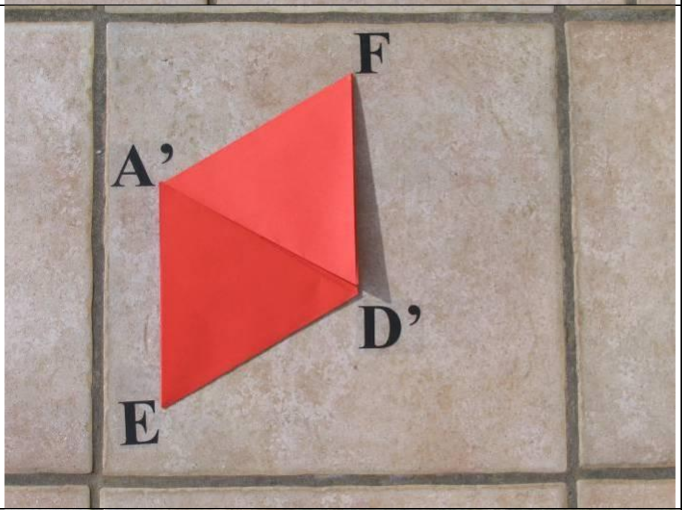
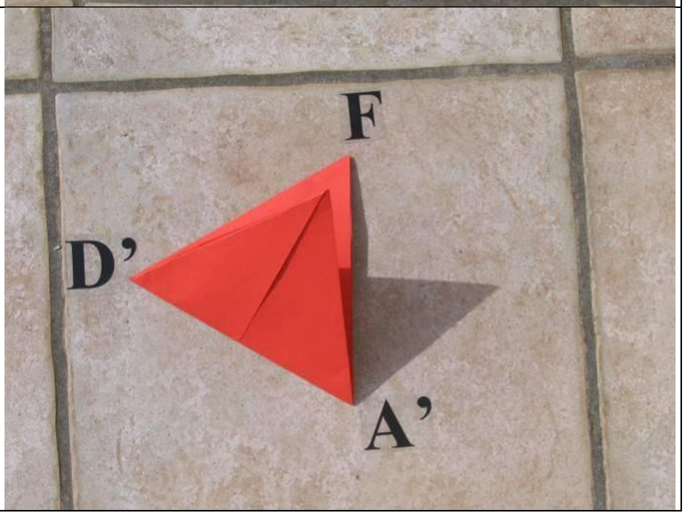


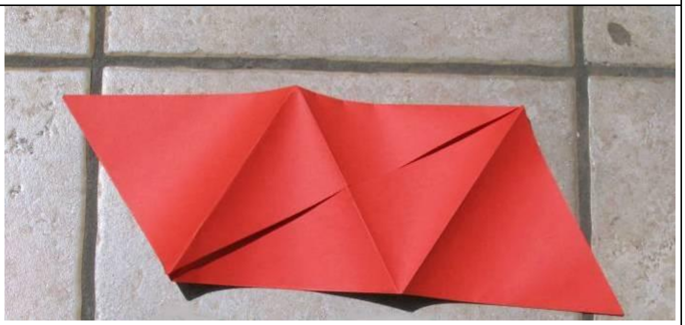
Montage des polyèdres réguliers à face des triangles :

Nous avons besoin des feuilles rectangulaires de bronze.
D’abord nous allons plier cette feuille pour obtenir la **Feuille de base triangle** et ensuite la **Feuille de base triangle symétrique.**
Fabrication de la Feuille de base triangle :

Prendre une feuille rectangulaire de bronze.	
Amener le sommet inférieur droit de la feuille sur le sommet supérieur gauche, plier et accentuer le pli.	
Déplier la feuille, nous voyons apparaître la droite de pli (EF).	
Déplier la feuille et amener le sommet inférieur gauche A vers le point E, en utilisant le pli (EF) comme guide.	

De même amener le sommet supérieur droit C sur point F, en utilisant le pli (EF) comme guide.	
Plier les deux petits triangles D’DF et A’BE.	
Mettre à l’intérieur les deux petits triangles.	
On obtient un parallélogramme.	

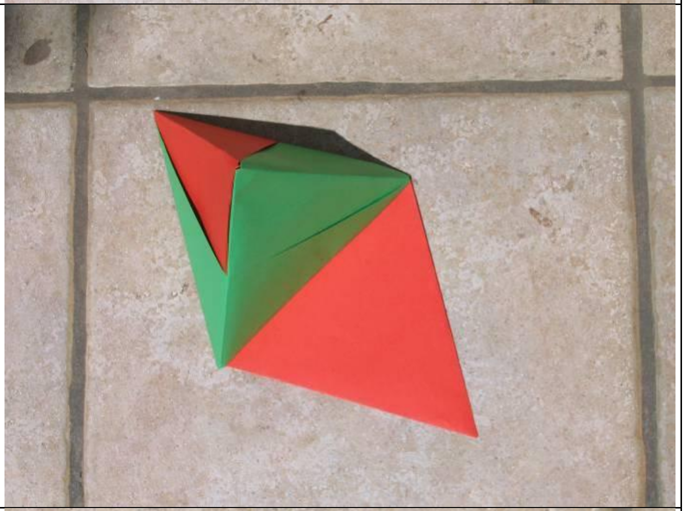
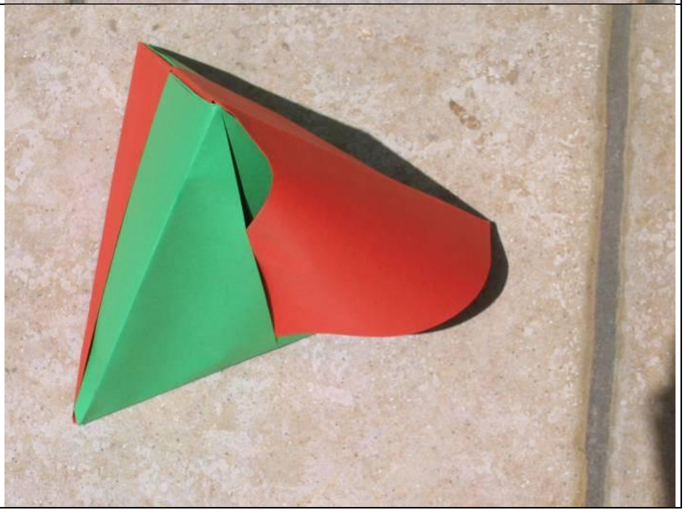
Retourner la feuille, (on ne voit plus la fente). Amener le segment [D’F] sur le segment [A’F]. Nous venons de former un triangle équilatère.	
Amener le segment [EA’] sur le côté vertical gauche. Nous venons de former un triangle équilatère, et aussi un losange.	
Retourner la feuille.	
Plier le losange suivant le segment [A’D’].	

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ouvrir la feuille. On a divisé le parallélogramme en 4 triangles équilatères.</td><td>
<u>Feuille de base triangle</u></td></tr>
</table>

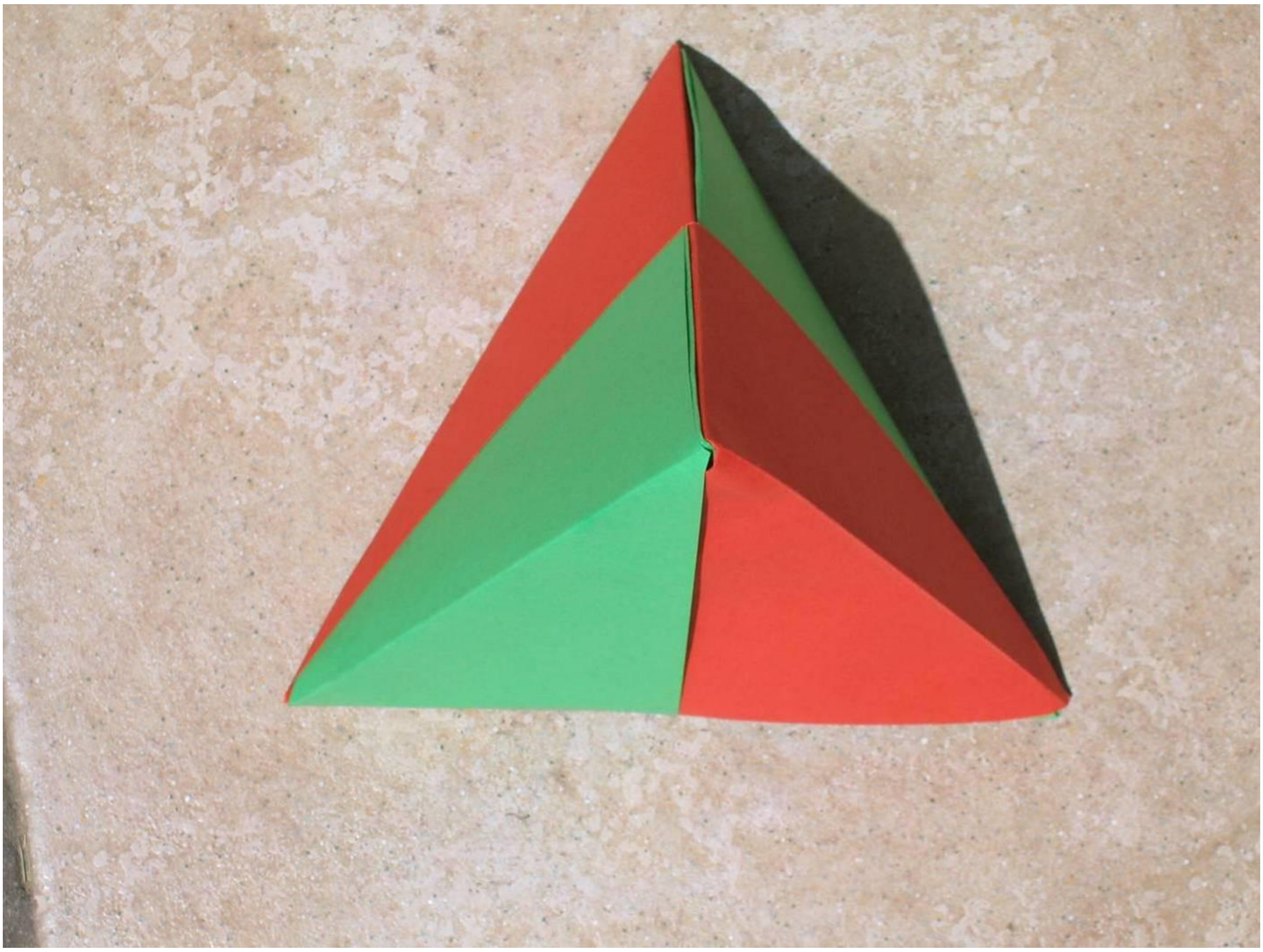
Montage du Tétraèdre :

Il nous faut 2 feuilles rectangulaires de bronze.

<table>
<tr><td>Pour produire le tétraèdre il nous faut une pièce triangle (rouge) et une pièce triangle symétrique (verte).</td><td></td></tr>
<tr><td><u>Voici la façon d’assembler une pièce triangle et une pièce triangle symétrique</u>. Poser les deux pièces (faces avec fente vers vous), faire glisser le triangle de la pièce verte (languette) dans une fente de la pièce rouge.</td><td></td></tr>
</table>

Faire glisser la languette de la pièce verte dans la fente de la pièce rouge.	
Remarquez que nous avons 3 faces du tétraèdre.	
Plier la languette de la pièce orange pour former la quatrième face du tétraèdre.	

Voici le tétraèdre. Ses quatre faces sont identiques et on ne peut les distinguer les unes des autres. Si l'on fait une rotation du tétraèdre on ne voit pas de différence.



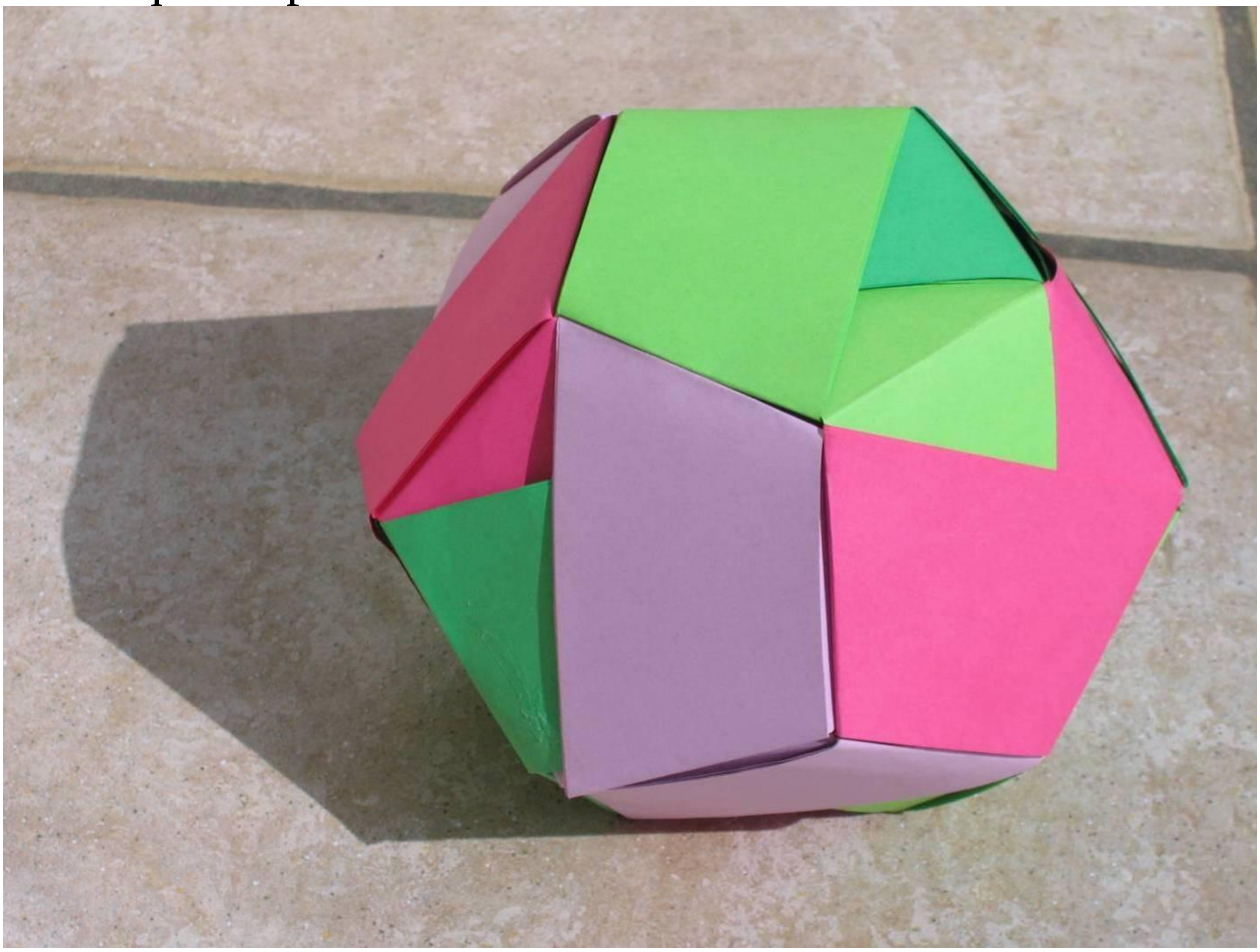
Montage de l'Octaèdre :

C'est un polyèdre régulier convexe avec 8 faces, chaque face est un triangle équilatère. Nous avons besoin de 4 feuilles de bronze pliés de la même façon.

L’Icosaèdre.

Montage du Dodécaèdre :

Le Dodécaèdre est un polyèdre régulier à 12 faces, chaque face est un pentagone régulier. Nous avons déjà vu comment plier un ruban pour obtenir un pentagone régulier. Nous aurons besoin de douze pentagones réguliers avec leurs languettes. Afin de renforcer le Dodécaèdre nous allons prendre 48 rubans et les grouper par quatre. Puis nous allons faire un nœud avec chaque ruban quadruplé.

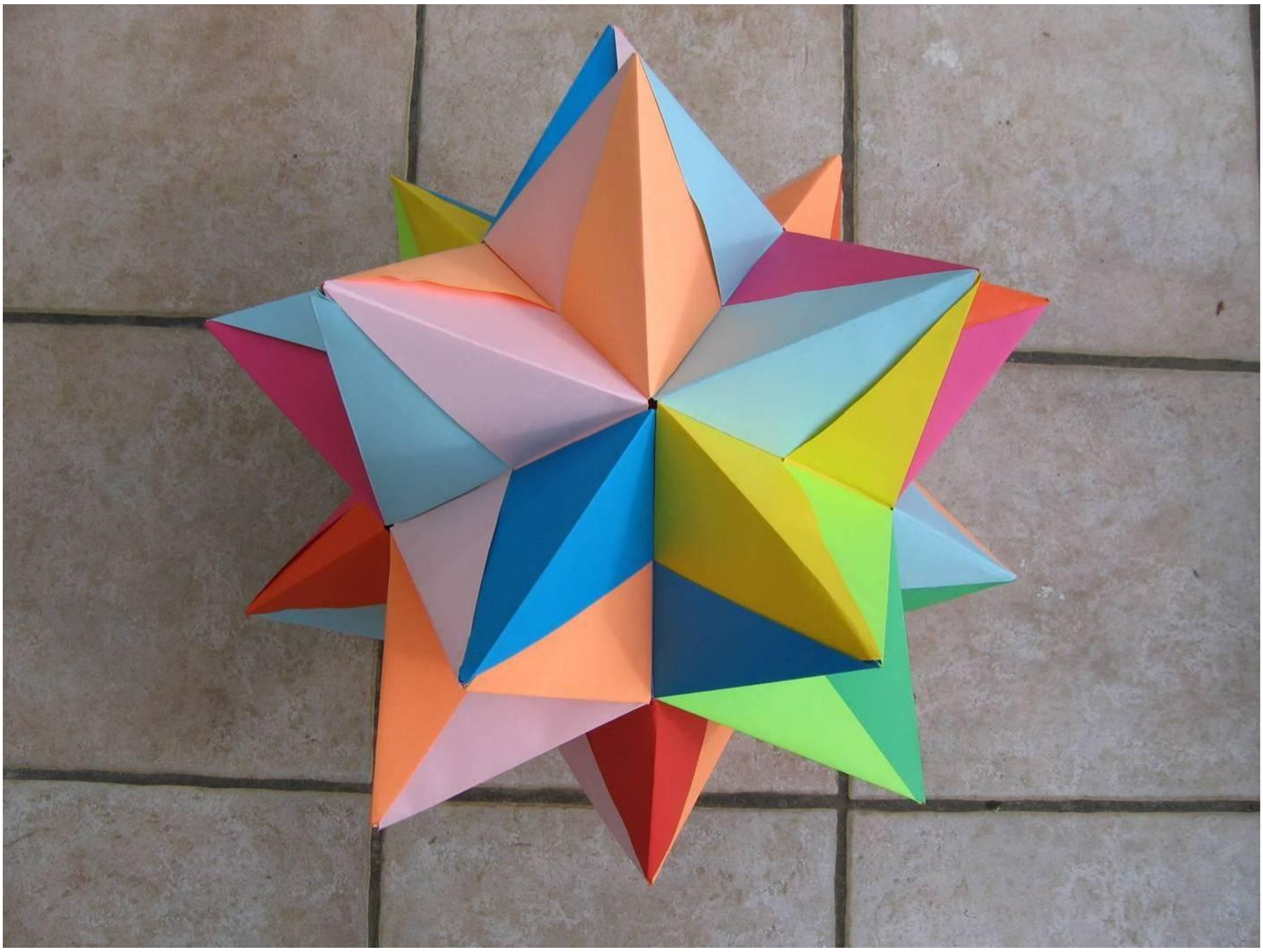


Montage du petit dodécaèdre étoilé:

Nous avons besoin de 30 pièces triangle identiques.

Voici le <u>petit dodécaèdre étoilé</u> sous d'autres vues :

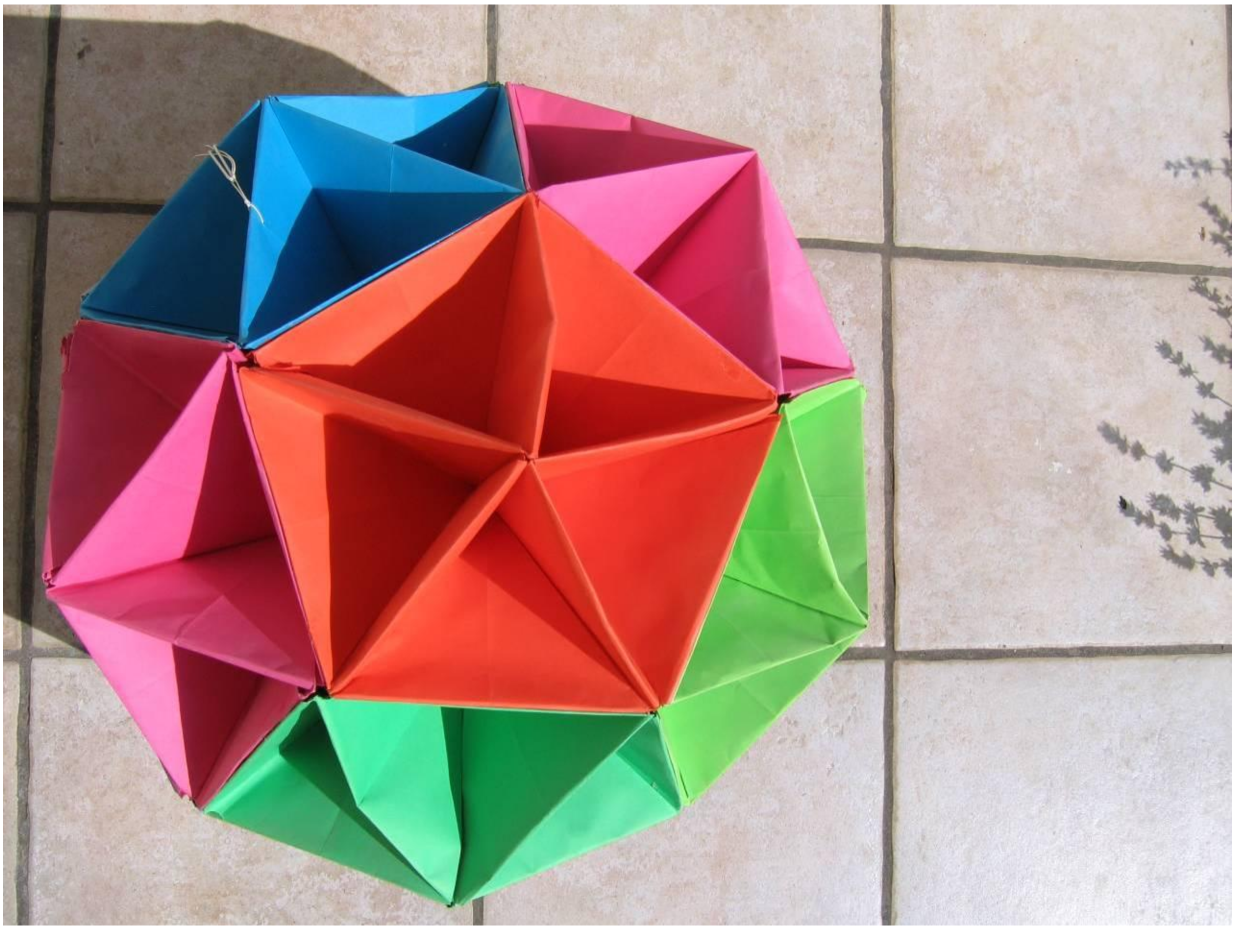
.



<u>Montage du grand dodécaèdre étoilé (régulier):</u>

Montage du grand icosaèdre (régulier):

Nous aurons besoin de 120 feuilles triangles pliées de la même façon. Nous allons les diviser en douze groupes de

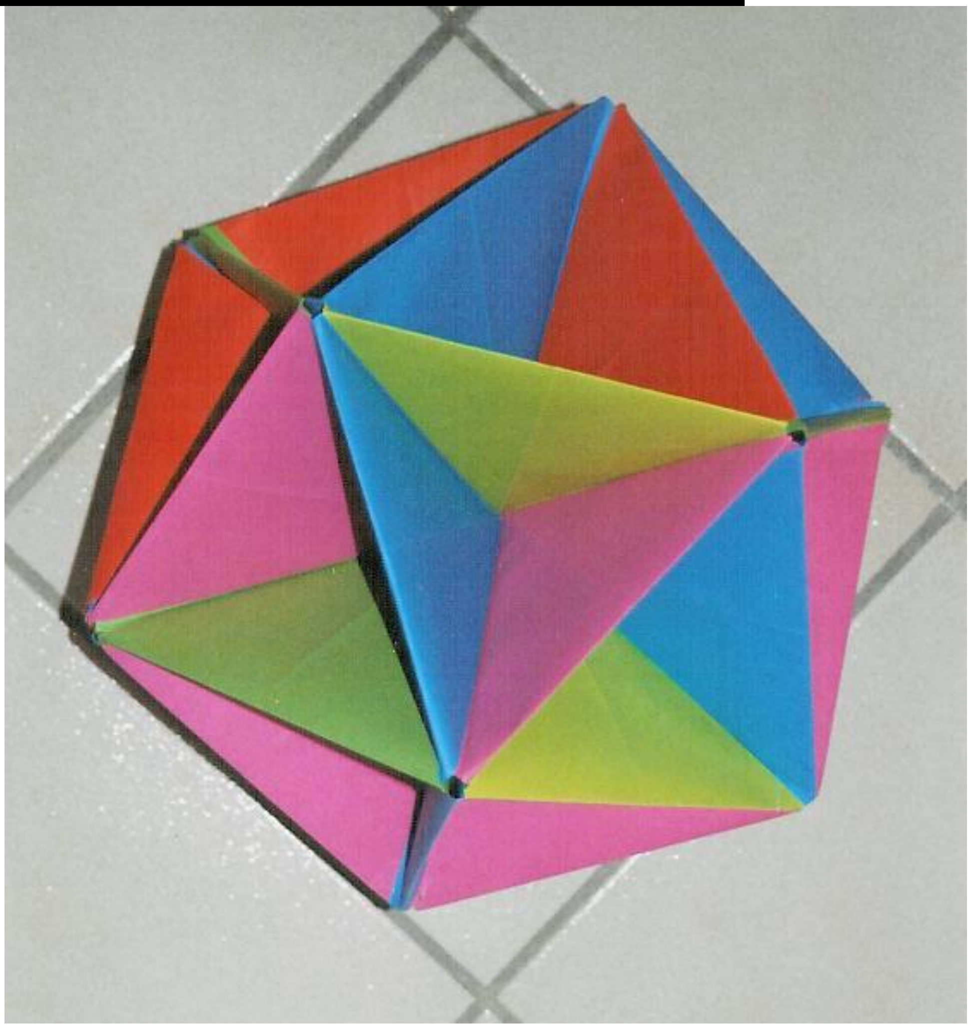


Montage du grand dodécaèdre (régulier):

Nous aurons besoin de 31 feuilles triangles pliées de la même façon.
Nous allons procéder exactement de la même façon que pour monter le grand dodécaèdre rectangle, qui est donné en grand détail plus loin.
Ici nous donnons les premières étapes à titre d'exemple et avec des images tirées d'autres montages, les couleurs ne sont pas respectés.

Pour continuer se référer au montage du ***grand dodécaèdre rectangle.***

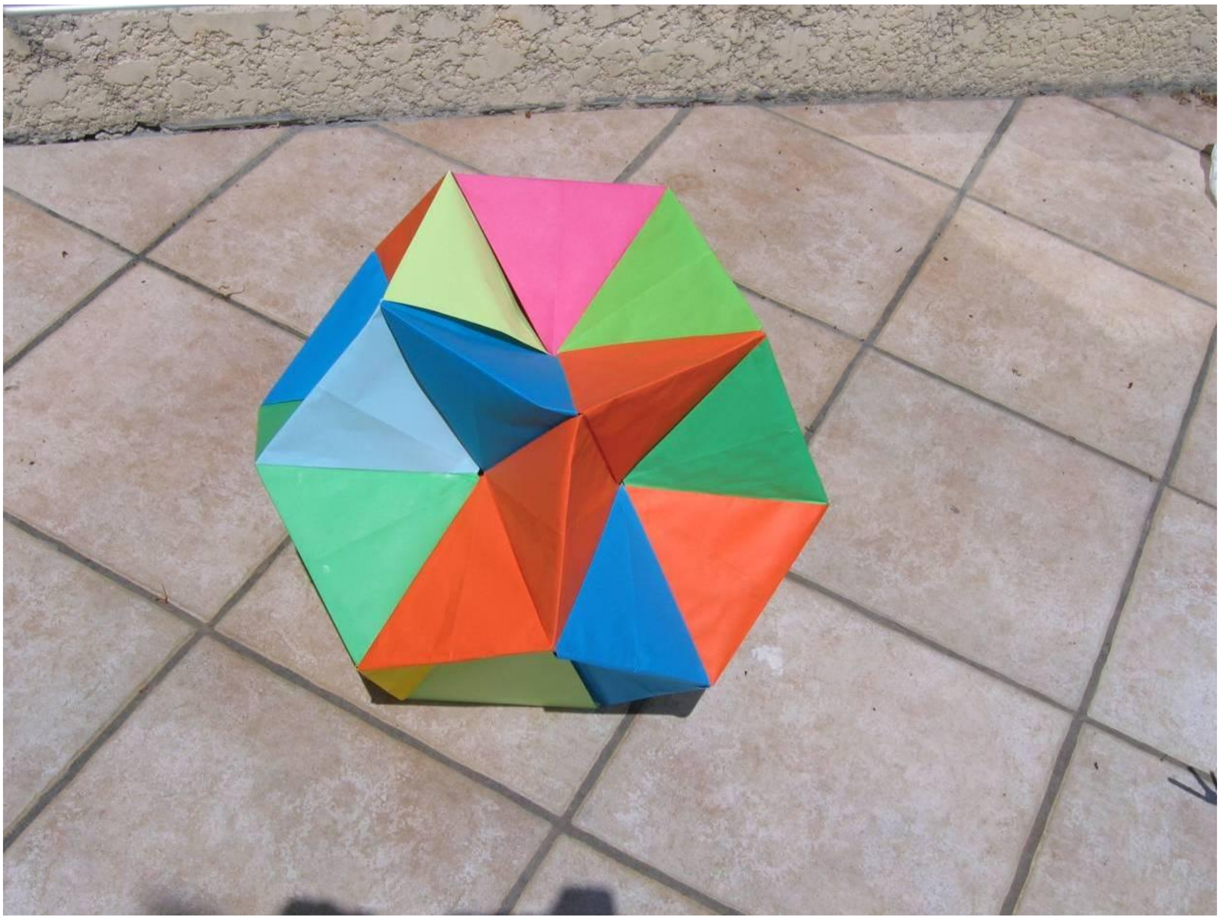
Voici le grand dodécaèdre (régulier):



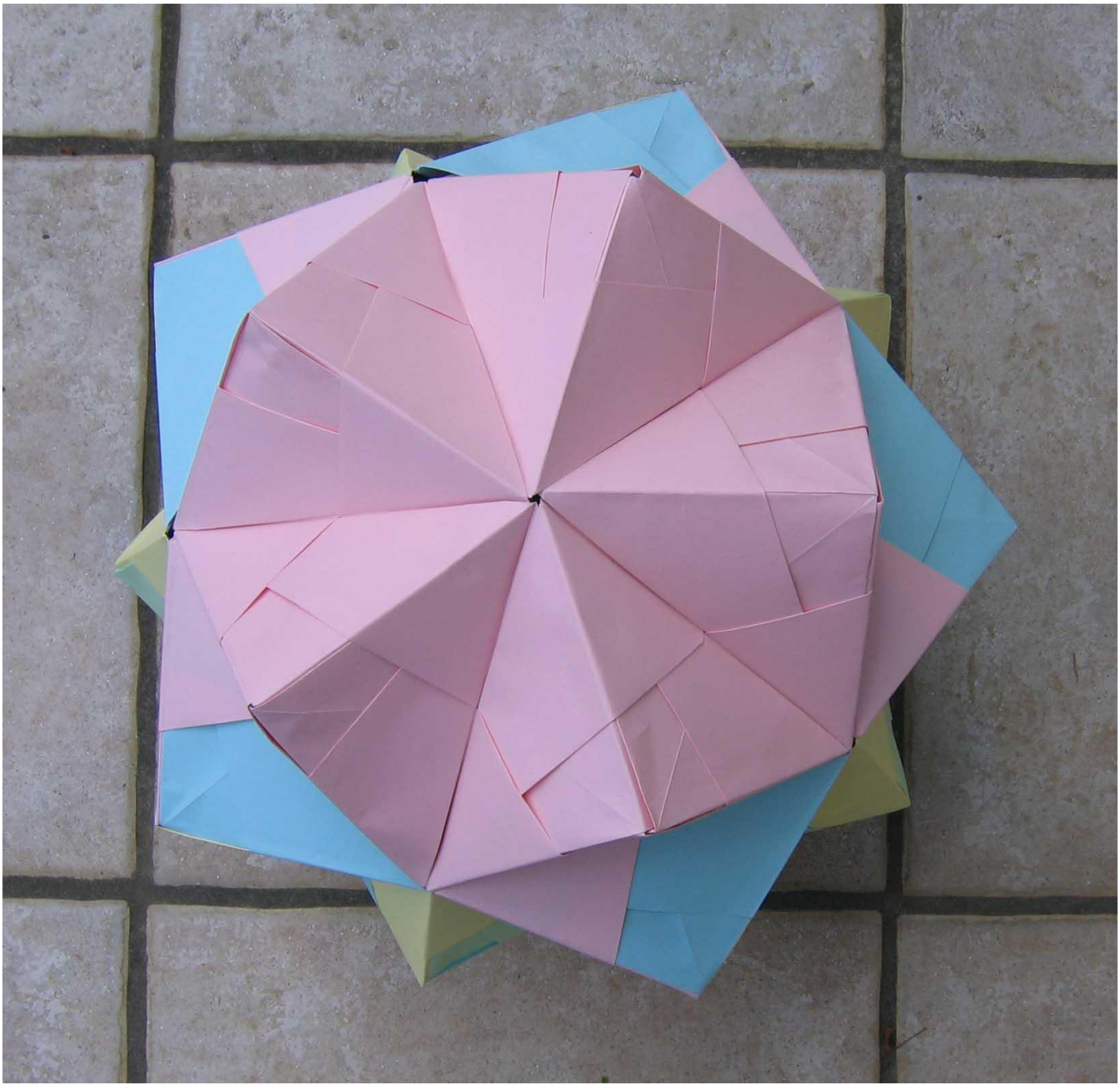
Et à titre d’exemple voici un ***grand dodécaèdre rectangle. Voyez-vous la différence ?***

Montage du grand dodécaèdre étoilé inversé ou troisième stellation de l’icosaèdre :

Nous aurons besoin de 30 pièces triangle identiques.

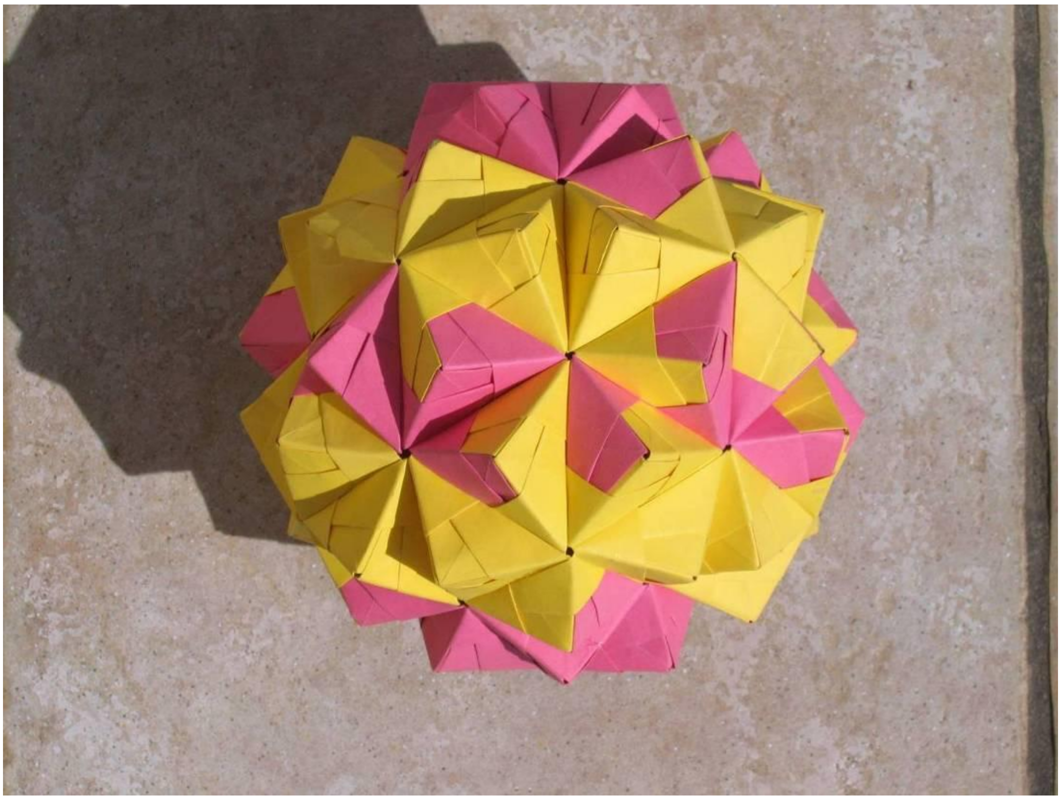


<u>Fabrication de polyèdres avec des faces des triangles</u>
jaunes et 5 bleus.



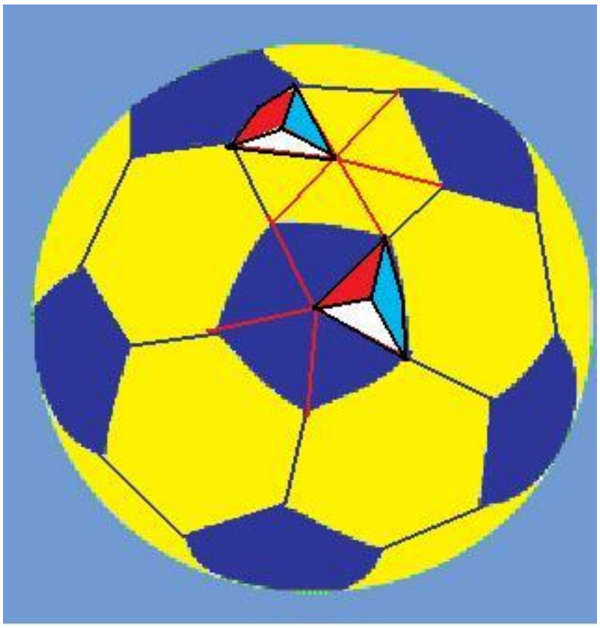
Montage du grand dodécaèdre rectangle:

-



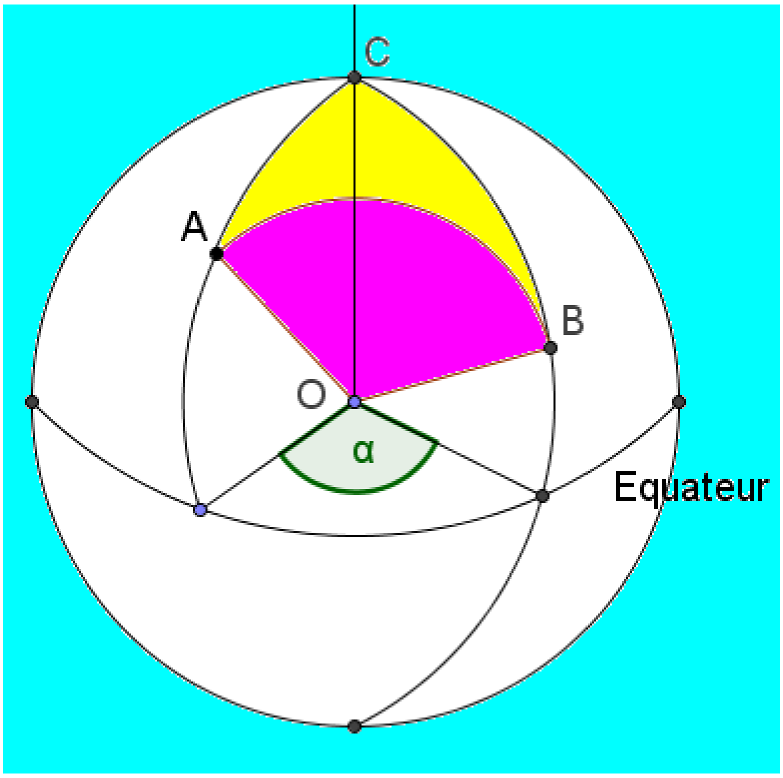
Le ballon de Epcot.

Il s’obtient à partir d’un polyèdre ballon de foot (ou l’Icosaèdre tronqué). Un ballon de foot est composé de 20 hexagones et 12 pentagones. Autour de chaque pentagone il y a six hexagones et autour de chaque hexagone il y a 3 pentagones et 3 hexagones. Le ballon d’Epcot s’obtient à partir du ballon de foot en divisant chaque hexagone du polyèdre ballon de foot en six triangles et sur chaque triangle on construit une pyramide. De même chaque pentagone du polyèdre ballon de foot est divisé en cinq triangles, puis on construit cinq pyramides. Dans le dessin on montre une pyramide dans un hexagone et une dans un pentagone.



Sur le ballon d'Epcot nous avons mis en évidence deux hexagones et deux pentagones. Pour fabriquer par pliage le ballon d'Epcot, il nous faut 270 pièces carrées spéciales. On commence par assembler 5 pyramides comme expliqué dans le montage du petit dodécaèdre étoilé rectangle. Après il faut compléter pyramide par pyramide en tenant compte de la géométrie du ballon de foot expliqué ci-dessus.

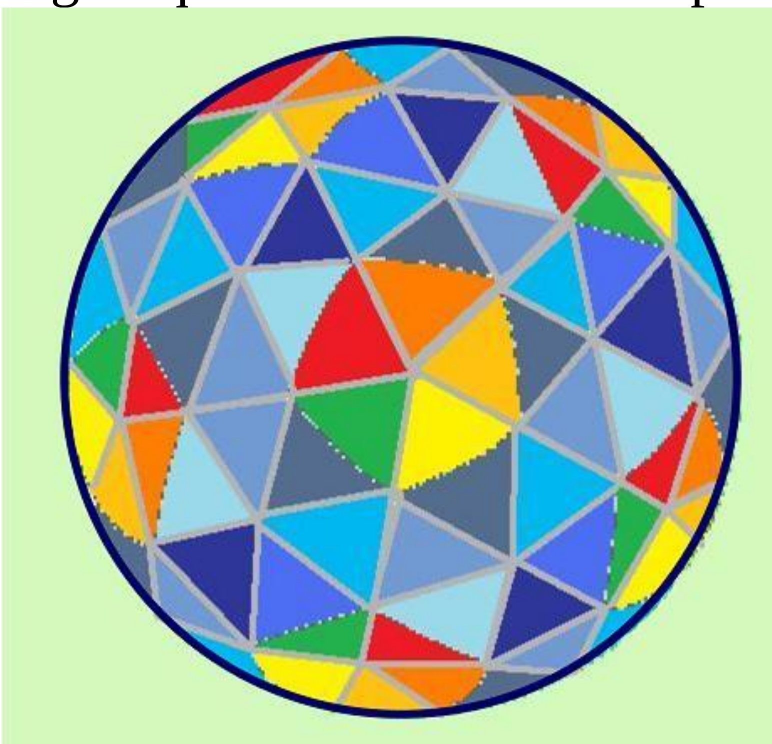
Un peu de géométrie de la sphère que nous allons supposer de rayon un. Il faut distinguer la sphère de la boule, la sphère est uniquement la surface sur la boule. Nous allons expliquer en nous basant sur le dessin :
Le centre de la sphère est le point O. Tout plan qui passe par O coupe la sphère en un « grand cercle » et divise la sphère en deux « hémisphères ». Dans la figure ci-dessous on a prix deux points, par exemple B et C, le plan qui contient les points O, B, C coupe la sphère en un grand cercle, dont nous avons dessiné la moitié. Nous avons de même tracé des portions du grand cercle passant par A, B et aussi par A, C. Nous obtenons ainsi sur la sphère un « triangle sphérique » ABC, de sommets A, B, C. Comme dans un triangle dans un plan nous pouvons parler d'angles, l'angle ACB est l'angle α du morceau de lune. Ce triangle a 3 côtés AB, BC et AC.



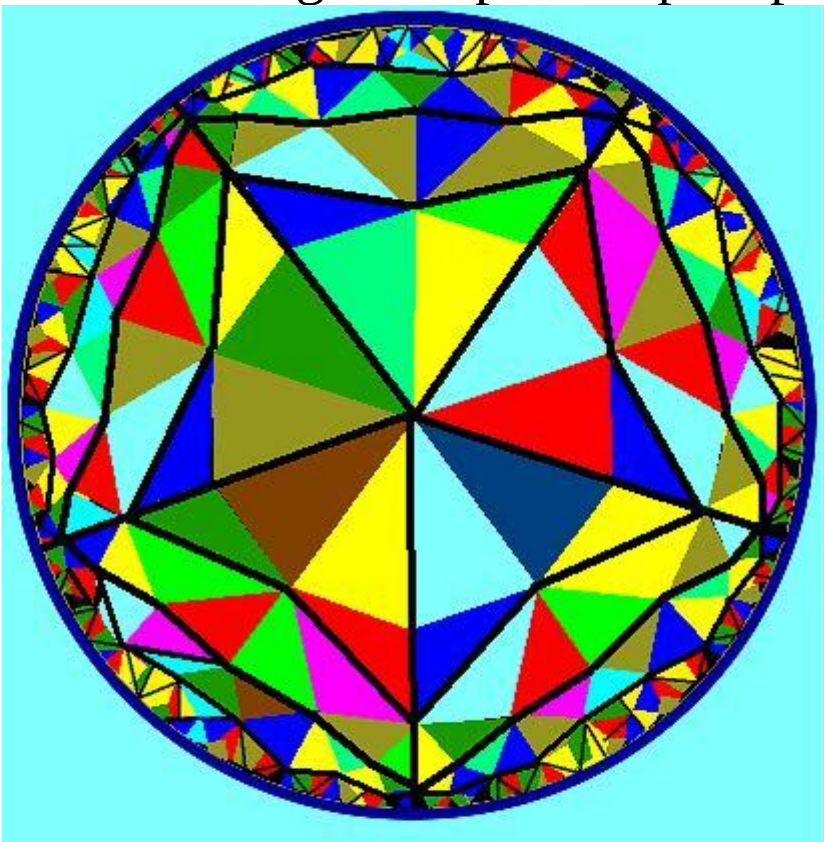
Nous avons des propriétés importantes :

1. L’aire de la sphère (de rayon un) est 4π.
2. L’aire d’un triangle sphérique ayant des angles α, β, γ est $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

<u>Une triangulation de la sphère</u> est une division de la sphère en triangles qui ne se chevauchent pas.



Voici pour donner une idée, un exemple de triangulation du disque avec des triangles de plus en plus petits.



Formule d'Euler :

Pour une triangulation de la sphère soit F le nombre de triangles, E le nombre des côtés des triangles et V le nombre des sommets alors :

$$F-E+V=2.$$

En particulier pour tout polyèdre ayant F faces, E arêtes et V sommets, qui donne une triangulation de la sphère nous avons

$$F-E+V=2.$$