Université Joseph Fourier — Novembre 2014
L3 mathématiques
Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°8

1. Soient p un nombre premier, et G un groupe d'ordre p^2.

1) Justifier que $Z(G)$ est d'ordre p ou p^2. Que peut-on dire si $|Z(G)| = p^2$?

2) On suppose que $|Z(G)| = p$. Soit x un élément de $G \setminus Z(G)$.

a) Quel est l'ordre de x?

b) Montrer que G est produit direct de $Z(G)$ et $\langle x \rangle$; conclure à une contradiction.

3) Conclure que tout groupe G d'ordre p^2 est abélien.

4) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. Soit G un p–groupe, et soit $H \neq G$ un sous–groupe. Montrer l'existence d'un sous–groupe de G d'indice p contenant H.

Indication: Procéder par récurrence sur $|G|$. Si H contient un élément $a \in Z(G)$ non trivial, appliquer l'hypothèse de récurrence à $G/\langle a \rangle$.

Si $H \cap Z(G) = \{1_G\}$, choisir un élément $a \in Z(G)$ d'ordre p (après avoir justifié son existence) et considérer $H' = \langle H, a \rangle$. Si H n'est pas d'indice p, montrer que $H' \neq G$ et contient un élément central.

3. Soient G un groupe fini, p le plus petit diviseur premier de $|G|$, et soit H un sous–groupe distingué de G d'ordre p. Montrer que $H \subset Z(G)$.

Indication: Faire opérer G sur H par conjugaison.

4. Soit p un nombre premier impair, et soit G un groupe d'ordre $2p$.

a) Montrer qu'il existe un unique sous–groupe H d'ordre p, qu'il est distingué dans G, cyclique. On note x un générateur de H.

Dans la suite on suppose que G n'est pas cyclique.

b) Soit y dans $G \setminus H$. Quel est le sous–groupe $\langle x, y \rangle$?

c) Quel est l'ordre de y?

d) A-t-on $yx \in H$? En déduire que $yxy^{-1} = x^{-1}$.

e) Montrer que G est produit semi–direct $H \rtimes \langle y \rangle$ et qu'il est isomorphe au groupe diédral D_p *(NB: pour $n \geq 3$, D_n est par définition le sous–groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ engendré par la rotation r d'angle $2\pi/n$ et la réflexion s d'axe Ox).*

f) Quels sont les groupes d'ordre $2p$, à isomorphisme près ?

5. a) Pour $n = 63$, 56, 45 montrer qu'un groupe d'ordre n n'est pas simple.

b) Montrer que tout groupe d'ordre 45 est abélien. Et si $|G| = 63$?

6. Soit G un groupe d'ordre $3553 = 11 \cdot 17 \cdot 19$.

a) Pour $p = 11, 17, 19$, montrer que G a un unique p–Sylow. On le note H_p.

b) Montrer que $G = H_{11} \odot H_{17} \odot H_{19}$.

c) En déduire que G est cyclique.

7. Soit G un groupe d'ordre 255. On souhaite montrer que G est cyclique.

a) Montrer que G possède un unique sous–groupe H_{17} d'ordre 17.

b) Montrer que G possède un sous–groupe H' d'ordre 85, distingué. Montrer que H' possède un unique 5–Sylow, et en déduire qu'il en est de même pour G. Quelle est la structure de H'?

c) Montrer avec b) que G possède un sous–groupe H'' d'ordre 15, puis que H'' est cyclique.

d) En dénombrant les éléments d'ordre donné dans G, en déduire que G possède un unique 3–Sylow.

e) Conclure pour la structure de G.

8. Soit G un groupe d'ordre pqr, où $p < q < r$ sont premiers. On désigne par N_ℓ le nombre de ℓ–Sylows de G ($\ell = p, q, r$).

a) En considérant les nombres d'éléments d'ordre ℓ (ℓ premier), démontrer l'inégalité:

$$pqr \geq N_p(p-1) + N_q(q-1) + N_r(r-1) + 1 \qquad (*)$$

b) Montrer que si chaque N_ℓ est supérieur à 1, alors $N_r = pq$, $N_q \geq r$, $N_p \geq q$.

c) Montrer qu'on obtient alors une contradiction avec $(*)$. En déduire que G n'est pas simple.

9. Montrer qu'un groupe abélien fini est produit direct interne de ses divers sous–groupes de Sylow. Est-ce le cas si le groupe n'est plus abélien ? Et si tous les sous–groupes de Sylow sont distingués?

10. Soient p, q deux nombres premiers distincts, $p < q$. Soit G un groupe d'ordre pq. On note H_ℓ un ℓ–Sylow de G ($\ell = p, q$).

1) Montrer que l'on a nécessairement $N_q = 1$, et que $N_p = 1$ ou q. Montrer que si $N_p = q$, alors nécessairement $p \mid q - 1$.

2) Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_\theta \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour un certain morphisme $\theta : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

3) On suppose que $p \nmid q - 1$. Montrer que $G = H_p \odot H_q$, puis que G est cyclique.

4) On suppose que $p \mid q-1$.

a) On suppose que θ est trivial. Montrer que G est cyclique.

b) On suppose θ non trivial. Montrer que $\theta(\tilde{1})$ est de la forme $\mu_{\overline{m}}$, où $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}$ est d'ordre p. Considérons un autre θ' non trivial, tel que $\theta'(\tilde{1}) = \mu_{\overline{m'}}$.

Montrer que $\theta' = \theta \circ \alpha$, où α est un automorphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ que l'on précisera. En déduire que les produits semi–directs correspondants sont isomorphes.

5) Quels sont les groupes d'ordre pq, à isomorphisme près ?

11. Soient p, q deux nombres premiers distincts. Soit G un groupe d'ordre pq^2.

1) On suppose $q > p$. Montrer que $N_q = 1$.

2) On suppose $p > q$.

a) Montrer que $N_p = 1$ ou $N_p = q^2$.

b) On suppose que $N_p = q^2$. Montrer qu'alors on a $p = 3$, $q = 2$. En comptant les éléments de G, montrer que $N_q = 1$.

3) Conclure qu'un groupe d'ordre pq^2 n'est pas simple.

4) Montrer qu'il existe exactement 5 classes d'isomorphisme de groupes d'ordre 12 (cf. 13. et F7, 8. et 9.)

12. Soient G un groupe fini, p un nombre premier divisant $|G|$, et soit X_p l'ensemble des p–sous–groupes de Sylow de G. On note N_p le cardinal de X_p.

a) Montrer que l'application $(g, S) \mapsto gSg^{-1}$ de $G \times X_p$ dans X_p définit une action de G sur X_p qui est transitive.

b) Si S est un p–Sylow, on pose $N_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$.

Montrer que $N_G(S)$ est un sous–groupe de G, et que S est distingué dans $N_G(S)$.

c) En déduire que $N_p = \frac{|G|}{|N_G(S)|}$, où S est un p–Sylow de G.

d) Soit $\varphi_p : G \to S(X_p)$ le morphisme de groupes associé à l'action de G sur X_p définie en a). Vérifier que φ_p est non trivial si $N_p > 1$, et que l'on a

$$\ker(\varphi_p) = \bigcap_{S \in X_p} N_G(S).$$

13. Soit G un groupe d'ordre 12. En 3), on utilisera les résultats de l'exercice 12. Voir aussi l'exercice 11, 2) à 4).

1) On suppose dans cette question que G admet un unique 3–Sylow S et un unique 2–Sylow T. Montrer que $G = S \odot T$. En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

2) On suppose maintenant que $N_3 > 1$. Justifier que $N_3 = 4$.

a) Montrer que pour tout 3–Sylow S, $N_G(S)$ est un 3–Sylow. **../...**

b) Montrer que deux 3–Sylows distincts s'intersectent trivialement.

c) En déduire que le morphisme φ_3 défini en 10. est injectif et que G est isomorphe à un sous–groupe d'ordre 12 de S_4.

d) Conclure que $G \simeq A_4$. Quel est le nombre et la structure des 2–Sylows de G?

$\diamond \diamond \diamond$