UJF L3 mathématiques | Octobre 2015
Mat35b Algèbre A, groupe 2

**Feuille d'exercices n°7**

**1.** Soit $G$ cyclique d'ordre $n$. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**2.** Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Établir une bijection entre les sous–groupes de $G/H$ et les sous–groupes de $G$ qui contiennent $H$ (utiliser le morphisme canonique $\pi\colon G \to G/H$).

b) Application: déterminer tous les sous–groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (cf. F4, exo8).

**3.** a) La projection canonique $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ passe-t-elle au quotient par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? par $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ? par $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ?

b) Généralisation pour $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ? ($n \geq 2$)

**4.** a) Décrire tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, puis de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

b) Décrire tous les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, puis de manière générale de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) Quelle est la structure du groupe $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (cf. TD2, 8.a)?

**5.** a) Montrer que le groupe $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

b) Montrer que le groupe $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Quels sont les éléments d'ordre fini de $\mathbb{T}$?

c) Montrer que le groupe $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{+*}$.

d) À quel groupe connu les groupes suivants sont-ils isomorphes:

i) $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ; ii) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z})$ ; iii) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$?

**6.** Soient $G$ un groupe, et $H$ un sous–groupe du centre de $G$.

a) Montrer que $H$ est distingué dans $G$, et abélien.

b) On suppose que $G/H$ est un groupe cyclique. Montrer que $G$ est abélien.

**7.** Pour $G = D_4$ puis $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, déterminer tous les sous–groupes distingués de $G$ et identifier chaque groupe quotient $G/H$ à un groupe connu.

**8.** a) Soient $G_1, G_2$ deux groupes, et soient $H_i$ un sous–groupe distingué de $G_i$ ($i = 1, 2$). Montrer que $H_1 \times H_2$ est distingué dans $G_1 \times G_2$, et que l'on a un isomorphisme

$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \simeq G_1/H_1 \times G_2/H_2.$$

b) Soient $G$ un groupe, et $H$, $K$ deux sous–groupes distingués de $G$. On note $\pi_K$ la projection canonique $G \to G/K$. *On suppose que* $K \subset H$. On note *alors* parfois $\pi_K(H) = H/K$.

Montrer que $\pi_K(H)$ est un sous–groupe distingué de $G/K$ et que l'on obtient un isomorphisme

$$(G/K)/(H/K) \xrightarrow{\sim} G/H.$$

En utilisant 2.a), étant donné un quotient de $G/K$, dire à quel quotient de $G$ il est isomorphe.

**9.** Soit $G$ un groupe. On note $D(G)$ le sous–groupe de $G$ engendré par les éléments

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1},\ x, y \in G,$$

dits *commutateurs*. $D(G)$ est dit le *sous–groupe dérivé* de $G$.

a) Montrer que $D(G)$ est distingué dans $G$, et que $G/D(G)$ est abélien.

b) Si $H$ est un sous–groupe distingué dans $G$ tel que $G/H$ est abélien, montrer que $D(G) \subset H$.

c) Inversement, montrer que si $H$ est un sous–groupe contenant $D(G)$, alors $H$ est distingué dans $G$ et $G/H$ est abélien.

d) Montrer que tout morphisme de groupes $G \to A$, avec $A$ abélien, se factorise en un morphisme de groupes $G/D(G) \to A$.

e) Le quotient $G/D(G)$ est ainsi dit *l'abélianisé de* $G$. Justifier qu'il s'envoie surjectivement sur tout quotient abélien de $G$.

**10.** Déterminer le sous–groupe dérivé $D(G)$ et la structure de l'abélianisé $G/D(G)$ pour les groupes $G$ suivants: $D_4, \mathbb{H}_8, A_4, S_n$.