UJF L3 mathématiques — Octobre 2015
Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°5

1. a) Soit G un groupe. On suppose que l'on a $g^2 = 1_G$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est commutatif.

b) Soit G l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ dont les termes diagonaux sont tous égaux à $\overline{1}$. Montrer que G est un groupe pour la multiplication matricielle, et que l'on a $M^3 = I_3$ pour tout $M \in G$. Le groupe G est–il commutatif ?

Soit maintenant G un groupe commutatif et soit p un nombre premier. On suppose que $g^p = 1_G$ pour tout $g \in G$.

c) Montrer que l'application $(\overline{m}, g) \mapsto g^m$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times G$ dans G est bien définie, et munit G d'une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$–espace vectoriel.

d) En déduire que si G est fini, $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ pour un certain $n \geq 0$. En particulier, $|G|$ est une puissance de p.

2. Parmi les groupes suivants, lesquels sont isomorphes ?

$$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^\times, \cdot), (]0, +\infty[, \cdot), (\mathbb{C}^\times, \cdot), \mathbb{U}_6, D_3, S_3, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3.$$

Indication. Regarder les ordres des éléments dans chaque groupe.

3. Calculer l'ordre de tous les éléments du groupe G, et lister tous ses sous–groupes dans les cas suivants : $\mathbb{U}_4, \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}, S_3$. Lister les sous–groupes non cycliques de D_4.

4. Quels sont les sous–groupes finis de $\mathbb{C}^\times$? les éléments d'ordre fini?

5. Soit G un groupe, et soient H et K deux sous–groupes de G.

a) On suppose que $|H|$ et $|K|$ sont premiers entre eux. Calculer $H \cap K$.

b) On suppose que $H \cap K = \{1_G\}$. Montrer que les éléments $hk, h \in H, k \in K$ sont distincts. En déduire que si G est fini, alors $|G| \geq |H||K|$.

c) On suppose que H et K sont d'ordre p (p premier). Montrer que, soit $H = K$, soit $H \cap K = \{1_G\}$.

6. Dans les cas suivants, l'application $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times E$ dans E est–elle une action du groupe G sur l'ensemble E? (On désigne par X un ensemble.)

a) $G = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}, n \cdot x = x + n$ b) $G = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}, n \cdot x = 2^n x$

c) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $E = \mathbb{C}$, $\overline{m} \cdot z = j^m z$ (où $j = e^{2i\pi/3}$)

d) $G = S(X)$ et $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma$ d') $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$.

7. Soit E un k–espace vectoriel de dimension ≥ 1. On considère l'application $(u, x) \mapsto u(x)$ de $\mathrm{GL}(E) \times E$ dans E.

a) Montrer que l'on définit ainsi une action de groupe. Est–elle transitive?

b) Décrire les orbites.

c) Pour $E = k^2$, décrire le stabilisateur de $(1, 0)$, puis de $(1, 1)$.

d) On suppose que $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Combien y-a-t-il d'éléments non nuls dans k^2? Montrer que $\mathrm{GL}_2(k)$ agit naturellement sur un ensemble à 3 éléments, de sorte que le morphisme induit $\mathrm{GL}_2(k) \to S_3$ soit un isomorphisme de groupes.

8. Soit $E = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, et soit $\sigma\colon E \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$.

a) Montrer que $\sigma \in S(E)$.

b) Déterminer le cardinal de $G = \langle \sigma \rangle$.

c) Montrer que l'application $(g, x) \mapsto g(x)$ de $G \times E$ dans E définit une action de G sur E. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de chaque élément.

9. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que deux éléments de E dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués dans G.

10. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que cette action induit une action de G sur l'ensemble des parties de E.

a) Soit $X \subset E$. Comment se définit son stabilisateur pour cette action?

b) Montrer que l'action de G sur E induit une action de $\mathrm{Stab}_G(X)$ sur X.

c) On suppose que $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ et $E = \mathbb{R}^2$ (cf. 7.). Dans chacun des cas suivants, déterminer $\mathrm{Stab}_G(X)$ et étudier son action sur X (transitivité, orbites, stabilisateurs):

i) X est l'axe Ox

ii) X est la réunion des axes Ox et Oy

iii) X est formé des deux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

iv) X est l'ensemble $\{A = (2, 1), B = (-2, 1), C = (-2, -1), D = (2, -1)\}$.

11. Pour $G = S_3$, puis $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$, étudier l'action de G sur G par conjugaison.

12. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.

a) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 108$ et $|G| = 143$. Montrer que G fixe au moins un point de E.

b) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 17$ et $|G| = 15$. On suppose que G agit sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites et leurs cardinaux.

13. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on note T l'ensemble des sommets d'un tétraèdre régulier centré en l'origine. Soit G le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui laissent T globalement invariant (cf. 10.).

a) Montrer que G agit transitivement sur T et étudier le stabilisateur d'un sommet.

b) En déduire que G est fini, et donner son cardinal.

c) Montrer que G est isomorphe à S_4.

d) On note G^+ le sous–groupe des isométries directes de G. Montrer que $[G : G^+] = 2$. Identifier G^+ à un groupe connu.

14. On considère un cube C de $\mathbb{R}^3$ centré en l'origine $O = (0, 0, 0)$.

1) a) Vérifier que le groupe G des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ conservant C globalement agit sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des grandes diagonales du cube.

b) Vérifier qu'il existe un élément de G qui échange deux grandes diagonales données à l'avance en stabilisant les autres.

c) En déduire l'existence d'un morphisme surjectif $\varphi : G \to S_4$.

2) Soit $f \in \ker \varphi$. On suppose que $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

a) Vérifier que f stabilise chaque grande diagonale, mais que f échange deux sommets d'au moins une grande diagonale.

b) Montrer qu'alors, f échange les sommets de toute grande diagonale, et en déduire que f est la symétrie centrale s_O de centre O.

c) En déduire que $G/\{\mathrm{id}, s_O\} \simeq S_4$. Que vaut $|G|$?

3) Soit G^+ le groupe des isométries directes préservant globalement C.

a) Vérifier que tout élément de G est la forme f ou $f \circ s_O$, pour un unique élément $f \in G^+$.

b) En déduire que $G^+ \simeq G/\{\mathrm{id}, s_O\} \simeq S_4$.

4) a) En utilisant le fait que $\ker \varphi = \{\mathrm{id}, s_O\}$ est distingué, montrer que pour tout $f \in G$, on a $f \circ s_O = s_O \circ f$.

b) Déduire de la question 3) que $G \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

15. Soit G un groupe infini. On suppose que G admet un sous-groupe H, distinct de G et d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple.

Indication: Faire opérer G sur G/H par translation.