UJF L3 mathématiques — Septembre 2015

Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°4

1. Quel est le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ engendré par une rotation ? une réflexion orthogonale? deux réflexions orthogonales? une réflexion et une rotation?

2. Soit $n \geq 3$ un entier. Soit $\mathcal{P}_n$ le n-gone de $\mathbb{R}^2$ de sommets $A_1, \ldots, A_n$, où $A_k = (\cos(\frac{2k\pi}{n}), \sin(\frac{2k\pi}{n}))$.

a) Montrer que l'ensemble des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ laissant globalement invariant $\mathcal{P}_n$ est un groupe d'ordre $2n$, et lister ses éléments. On le note D_n, et on l'appelle le groupe diédral (d'ordre $2n$).

Indication. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image de $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ (**Pourquoi ?**). De plus, les distances et les angles non orientés sont conservées par une isométrie vectorielle.

Soient r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, et s la symétrie orthogonale d'axe Ox.

b) Vérifier que r est d'ordre n, que s est d'ordre 2, et que $srs^{-1} = r^{-1}$. Donner les matrices représentatives de r et s dans la base canonique.

c) Montrer que tout élément de D_n s'écrit de manière unique sous la forme $r^i s^j, i = 0, \ldots, n-1, j = 0, 1$. En déduire que D_n est engendré par r et s.

d) Le groupe D_n est–il cyclique ?

3. Soient E un espace euclidien de dimension 3 et u une isométrie de E. On note A la matrice de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. Dans les cas suivants, écrire u comme produit d'un nombre minimum de réflexions orthogonales:

a) $u = -\mathrm{id}_E$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

4. Soit G un groupe.

a)* Soient H un sous–groupe distingué de G et K un sous–groupe distingué de H. Le sous–groupe K *de* G est–il nécessairement distingué? On pourra considérer le groupe $G = D_4$.

b) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes et soit H' un sous–groupe distingué de G'. Montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous–groupe distingué de G qui contient $\mathrm{Ker}\, f$.

c) On suppose que f est surjectif et que H est un sous–groupe distingué de G. Montrer que $f(H)$ est un sous–groupe distingué de G'. Et si f n'est pas supposé surjectif?

5. Soient G un groupe, et H un sous–groupe de G.

a) Montrer que la relation sur G définie par $x\mathcal{R}_d y$ si $xy^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que la classe d'équivalence de $x \in G$ est l'ensemble $Hx = \{hx \mid h \in H\}$.

c)* Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ induit une bijection entre l'ensemble des classes à gauche xH et celui des classes à droite Hx modulo H.

d)* Montrer que H est distingué dans G si et seulement si on a $xH = Hx$ pour tout $x \in G$.

6. Soit G un groupe, et soit H un sous-groupe d'indice 2, i.e. tel que $[G : H] = 2$. Montrer que H est distingué dans G.

Indication. Utiliser la partition de G en deux classes.

7. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Soit $x \in G$ d'ordre fini. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini qui divise $o(x)$. Si G et G' sont finis, en déduire que $o(f(x))$ divise $\mathrm{pgcd}(|G|, |G'|)$.

b) On suppose que G et G' sont finis d'ordres premiers entre eux. Décrire tous les morphismes de groupes $G \to G'$.

c) On suppose que $f : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes. Comparer $o(x)$ et $o(f(x))$. Et si f est supposé seulement injectif?

8. Soit G un groupe cyclique d'ordre n, engendré par x. Soit $d \mid n, d \geq 1$.

a) Quel est l'ordre de $H_d = \langle x^{\frac{n}{d}} \rangle$?

b) Montrer que $H_d = \{g \in G \mid g^d = 1_G\}$.

Indication. Si $g = x^m$, à quelle condition sur m a–t–on $g^d = 1_G$?

c) Soit H un sous–groupe d'ordre d. Montrer que $H = H_d$.

d) Conclure que pour tout $d \mid n$, G a un unique sous–groupe d'ordre d, qui est H_d, cyclique.

e) Si $k \in \mathbb{Z}$, quels sont les sous–groupes $\langle x^k \rangle$ et $\{g \in G \mid g^k = 1_G\}$?

9. a) Soit $G = G_1 \times G_2$ un groupe produit. Déterminer l'ordre de l'élément (g_1, g_2) en fonction des ordres de g_1 et g_2.

b) Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est–il cyclique ?

Soient m, n deux entiers ≥ 2. On pose $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $e = \mathrm{ppcm}(m, n)$.

c) Quel est l'ordre de $g = (\overline{1}, \tilde{1})$? Montrer que l'ordre de tout élément de G divise e.

d) Montrer que G est cyclique si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

10. Soit G un groupe cyclique d'ordre n, engendré par g. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $\mu_m : x \mapsto x^m$ est un morphisme de groupes de G dans G. Montrer que c'est un automorphisme si et seulement si m est premier à n.

b) Montrer que tout morphisme de G dans G est de la forme μ_m, $(m \in \mathbb{Z})$.

c) On suppose que $\mu_m \in \mathrm{Aut}(G)$. Montrer que μ_m a le même ordre que l'élément $\overline{m}$ de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

d) Montrer que $\mathrm{Aut}(G) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

11.*hors f) Vrai ou faux? Soit G un groupe abélien. Soit $n \geq 1$ un entier fixé.

a) Les éléments d'ordre fini de G forment un sous–groupe de G.

b) Les éléments d'ordre n forment un sous–groupe de G.

c) Les éléments d'ordre divisant n forment un sous–groupe de G.

d) Les éléments d'ordre infini de G forment un sous–groupe de G.

e) Si tous les éléments de G sont d'ordre fini, alors G est fini.

f) Reprendre les questions précédentes si G n'est plus supposé abélien.

$\diamond \diamond \diamond$