Université Joseph Fourier — Septembre 2015
L3 mathématiques
Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°3

1. Soient G un groupe et H_1, H_2 deux sous–groupes de G. À quelle condition $H_1 \cup H_2$ est–il un sous–groupe de G?

2. On considère les matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathbb{H}_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$.

a) Calculer $I^2, J^2, K^2, IJ, JI, JK$ et KI. Montrer que $\mathbb{H}_8$ est un groupe pour la multiplication matricielle, non abélien (dit le groupe quaternionique). Écrire sa table de multiplication.

b) Déterminer les sous–groupes monogènes. Donner une partie génératrice minimale de $\mathbb{H}_8$.

c) Expliciter tous les sous–groupes de $\mathbb{H}_8$, son centre. Sont–ils distingués?

d) Soit $\mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$–espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par E, I, J, K. Montrer que tout élément de $\mathbb{H}$ admet un inverse pour le produit (indication: calculer $(aE + bI + cJ + dK)(aE - bI - cJ - dK)$ pour a, b, c, d réels). Ainsi $\mathbb{H}$ est une *algèbre à division* non commutative (dite algèbre –ou corps– des *quaternions*).

3. a) Montrer que le centre d'un groupe G en est un sous–groupe distingué.

b) Déterminer le noyau et l'image du morphisme $\mathrm{Int}\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$.

c) Le sous–groupe $\mathrm{Int}(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$ est–il distingué?

4. Soient G un groupe et H, K deux sous–groupes de G. On note $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

a) Montrer que HK est un sous–groupe de G si et seulement si $HK = KH$, et que ceci a lieu si H est distingué dans G.

b) Que peut–on dire de plus sur HK si H et K sont distingués dans G?

5. a) Déterminer les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $< a >= \mathbb{Z}$, puis les $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $< a, b >= \mathbb{Z}$.

b) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, quel est le sous–groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par a et b? Quel est le sous–groupe intersection de $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$?

6. Soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes et $\mathcal{P}$ une partie de G. Montrer que $f(<\mathcal{P}>) = <f(\mathcal{P})>$.

7. a) Pour $n = 5, 7, 8$, déterminer si $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, et en donner une partie génératrice minimale.

b) Déterminer le sous–groupe $< \tau, \tau' >$ de S_3, où τ échange 1 et 2 et fixe 3, et τ' échange 1 et 3 et fixe 2. Écrire chaque élément comme "produit fini" d'éléments τ et τ'.

8. a)* Le groupe additif $\mathbb{Z}^2$ est–il monogène?

b)* À quelle condition une paire $\{u, v\}$ de $\mathbb{Z}^2$ engendre–t–elle $\mathbb{Z}^2$? (exemple: $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$).

c) Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \in 3\mathbb{Z}, y \in 2\mathbb{Z}\}$. Représenter Δ, montrer que c'est un sous–groupe de $\mathbb{Z}^2$, et en donner une partie génératrice minimale.

9. a) Déterminer le sous–groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

b)(*) Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ possède-t-il une partie génératrice finie ? (raisonner par l'absurde.)

10. Dans $M_3(\mathbb{R})$ on note $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Étudier si ces matrices sont dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, et les écrire selon le cas comme produit de matrices de (dilatation et) transvection. Donner leur déterminant et leur inverse.

11. a) L'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ de déterminant > 0 est–il un sous–groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? est–il distingué?

b) Pour $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ puis $G = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, soit $M \in G$. Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma\colon [0, 1] \to G$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = M$.

12.* a) Pour G un groupe fini déterminer tous les morphismes de G dans $\mathbb{Z}$.

b) Même question avec $G = (\mathbb{Q}, +)$.

13. a) Le sous–groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par $\{1, \sqrt{3}\}$ est -il monogène?

b) Soit $H \neq \{0\}$ un sous–groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On pose $\delta = \inf\{x \in H \mid x > 0\}$. Montrer que si $\delta > 0$, H est monogène (et si $\delta = 0$, H est dense dans $\mathbb{R}$).

◇ ◇ ◇