Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels dans cette feuille sont complexes et de dimension finie, et tous les groupes sont d'ordre fini.

Exemples de représentations naturelles

Exercice 1. *Groupe diédral.*

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère le groupe diédral D_{2n} engendré par deux éléments r et s satisfaisant

$$o(r) = n, \quad o(s) = 2 \;\text{ et }\; srs^{-1} = r^{-1}.$$

1. Décrire ensemblistement D_{2n} et en déduire son cardinal. Calculer le centre de D_{2n} et trouver tous les sous–groupes distingués de D_{2n}.
2. Déterminer la structure de l'abélianisé de D_{2n}. Est–ce que D_{2n} est résoluble ?
3. Montrer que pour tout $m \in \{0, \dots, n-1\}$ il y a un unique morphisme de groupes $\rho_m : D_{2n} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que
$$\rho_m(r) = \begin{pmatrix} \cos 2m\pi/n & -\sin 2m\pi/n \\ \sin 2m\pi/n & \cos 2m\pi/n \end{pmatrix} \text{ et } \rho_m(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Les représentations (D_{2n}, ρ_m) sont–elles irréductibles ? Est–ce que leur restriction au sous–groupe cyclique $< r >$ est irréductible ?
5. Justifier que si $m_1 \neq m_2$ et $m_1 \neq n - m_2$ alors ρ_{m_1} et ρ_{m_2} sont des représentations non isomorphes de D_{2n} (utiliser la trace).
6. On considère maintenant les représentations complexes $(D_{2n}, \rho_m^{\mathbb{C}})$ données par
$$\rho_m^{\mathbb{C}} = \mathrm{inc} \circ \rho_m,$$
où inc est l'inclusion du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes.

   Ces représentations sont–elles irréductibles ? Leur restriction au sous-groupe cyclique $< r >$ est–elle irréductible ?
7. Montrer que $(D_{2n}, {\rho_m}^{\mathbb{C}})$ est isomorphe à la représentation (D_{2n}, ψ) telle que
$$\psi(r) = \begin{pmatrix} \omega^m & 0 \\ 0 & \omega^{-m} \end{pmatrix} \text{ et } \psi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
où $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Exercice 2. *Groupe des quaternions.*

Soit $\mathbb{H}_8$ le sous–groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$ et son centre.

2. Calculer le groupe dérivé de $\mathbb{H}_8$ et son abélianisé. Est–ce que ce groupe est résoluble ?
3. La représentation de $\mathbb{H}_8$ définie par l'inclusion de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est–elle irréductible ?

Exercice 3. *La représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.*

Soit n un entier ≥ 2. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées et on note

$$\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$$

la représentation associée. Autrement dit, on a $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$.

Trouver la décomposition de cette représentation en représentations irréductibles (utiliser l'astuce de moyennage).

Premières propriétés des représentations

Exercice 4. *Cas des groupes abéliens finis.*

1. Montrer qu'un groupe est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles complexes sont de dimension 1. (Utiliser la représentation régulière.)
2. Soit $n \geq 2$. Décrire toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit (V, ρ) une représentation de G (éventuellement de dimension infinie).

1. On suppose V irréductible. Montrer que $\dim V$ est finie.
2. Donner un exemple où il existe $v \in V$ tel que V est engendré par la famille $\{g(v)\}_{g \in G}$ mais V n'est pas irréductible.

Exercice 6. *Projecteurs.*

Soit (V, ρ) une représentation de G.

1. Soit $p \colon V \to V$ une application $\mathbb{C}$–linéaire telle que $p \circ p = p$ (projecteur). Montrer que p est un morphisme de représentations si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont des sous–représentations de V.
2. Si (V, ρ) est la somme directe des sous–représentations (V_i, ρ_i), $i = 1 \ldots, r$, comment s'exprime le sous–groupe distingué $\mathrm{Ker}(\rho)$ de G ?

Exercice 7. *Sous–représentation V^G.*

Soit (V, ρ) une représentation de G. On note $V^G = \{v \in V ;\, \forall\, g \in G,\, g.v = v\}$.

1. Vérifier que V^G est une sous–représentation de V.
2. Montrer qu'il existe une unique projection de V sur V^G qui est un morphisme de représentations. Autrement dit, V^G admet un unique supplémentaire G–stable.
3. Soit $f \colon V \to V'$ un morphisme de représentations surjectif (où V' est une représentation de G). Montrer que $V'^G = f(V^G)$.

Exercice 8. *Représentation unitaire.*

Soient $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation unitaire, c'est-à-dire que tous les $\rho(g)$ sont unitaires : $\langle g \cdot v, g \cdot w\rangle = \langle v, w\rangle$ pour tous $v, w \in V$.

1. Montrer que toute représentation est isomorphe à une représentation unitaire.
2. Montrer que l'orthogonal d'une sous–représentation de V est une sous–représentation. En déduire une autre preuve du fait que V peut s'écrire comme une somme directe de sous–représentations irréductibles.
3. Soient W et W' deux sous–représentations irréductibles non isomorphes de V. Montrer qu'elles sont orthogonales. Ce résultat reste–t–il vrai en remplaçant ≪ non isomorphes ≫ par ≪ distinctes ≫ ?

Exercice 9. *Représentation fidèle.*

On rappelle qu'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est fidèle si son noyau est trivial.

1. Montrer que la représentation régulière est fidèle.
2. Montrer que le noyau d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est constitué des $g \in G$ tels que $\mathrm{Tr}\,\rho(g) = \dim V$.
3. Montrer que si G est abélien et que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est fidèle et irréductible alors G est cyclique.
4. Plus généralement, montrer que si G admet une représentation irréductible fidèle alors son centre est cyclique. (On commencera par montrer que tout élément du centre de G agit sur une représentation irréductible par homothétie.)

Exercice 10. Soit (V, ρ) une représentation complexe de dimension finie de G.

1. Montrer que $\det \circ \rho : G \to (\mathbb{C}^\times, \times)$ est une représentation de dimension 1. L'expliciter pour $G = \mathfrak{S}_n$ $(n \geq 2)$ et (V, ρ) la représentation naturelle.
2. Soit (V, ρ) la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$. Calculer la représentation $\det \circ \rho$.

Exercice 11. Donner un contre–exemple au théorème de Maschke si $k \neq \mathbb{C}$.