Université Joseph Fourier — Septembre 2015
L3 mathématiques
Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°1

Révisions

A) Arithmétique

1. Appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de 1092 et 1732, ainsi qu'un couple de Bézout associé.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$.

1) On suppose que a et b sont premiers entre eux. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Utiliser le théorème de Gauss pour montrer que m est multiple de a et b si et seulement si m est multiple de ab.

2) On suppose que $\mathrm{pgcd}(a, b) = d$.

a) Montrer que si $m \in \mathbb{Z}$ est multiple de a et b, alors $\frac{m}{d}$ est multiple de $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$.

b) En utilisant 1), en déduire que m est multiple de a et b si et seulement si m est multiple de $\frac{ab}{d}$.

c) Calculer $\mathrm{ppcm}(a, b)$ en fonction de a, b et $\mathrm{pgcd}(a, b)$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p est un nombre premier et $p \mid ab$, montrer que $p \mid a$ ou $p \mid b$.

4. Soient $a, b, d, \in \mathbb{Z}$ avec $d \geq 0$. Si on a $ua + vb = d$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$, a-t-on $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$? Et si d est un diviseur commun à a et b ?

5. Soient $a, b, \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$. Soit (u_0, v_0) un couple de Bézout associé à a et b. Décrire tous les couples de Bézout associés à a et b en fonction de u_0 et v_0.

6. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ non nuls. Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers, montrer:

a) $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ et $\mathrm{pgcd}(a, c) = 1 \iff \mathrm{pgcd}(a, bc) = 1$

b)* $\mathrm{pgcd}(ac, bc) = \mathrm{pgcd}(a, b) \cdot |c|$

c) $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \iff \mathrm{pgcd}(a^n, b^m) = 1$ pour tous $m, n \geq 1$.

8. Soient $a, b \in \mathbb{Z}, m \geq 1$. Si $a \equiv b \bmod m$ montrer que
si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $P(a) \equiv P(b) \bmod m$.

9.* Énoncer et justifier le critère de divisibilité par 4 et la preuve par 9.

10. Soient $a, m \in \mathbb{Z}, m > 1$. Montrer que l'existence de $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1[m]$) a lieu si et seulement si a et m sont premiers entre eux.

11. On considère les polynômes P, Q de $\mathbb{R}[X]$ définis par

$$P = 2X^4 + X^3 - 4X^2 + X - 6\,, \quad Q = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1\,.$$

1. Déterminer leur pgcd D. Trouver des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = D$. Ces polynômes sont–ils uniques?

2. Factoriser P en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

B. Algèbre linéaire

1. Montrer que la famille $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2y)$. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques, et trouver des équations décrivant $\mathrm{Im} f$.

3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \colon P(0) = 0\}$.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (z-y, z-x, 2z-x-y)$.

1. Donner des bases de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ et que f est une projection sur un plan P parallèlement à une droite D.
3. Déterminer la symétrie vectorielle s par rapport à P parallèlement à D.
4. Si on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel, les endomorphismes f et s sont–ils des isométries?

C. Relations d'équivalence

1. La relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est-elle une relation d'équivalence dans les cas suivants ?

1) $E = \mathbb{R}$ et on définit $x\mathcal{R}y$ $(x, y \in E)$, par la condition

a) $x \leq y$

b) $x - y \in 3\mathbb{Z}$

c) $x + y \in \mathbb{Z}$

d) $|x-y| \leq 2$

2) $E = \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on définit $x\mathcal{R}y$ par la condition $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$;

3) E est l'ensemble des droites du plan affine euclidien, et $\mathcal{R}$ est la relation

a) "être parallèles (ou confondues)";

b) "être perpendiculaires".

2. Montrer que dans les cas suivants la relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est une relation d'équivalence (pour b),c) et d) on décrira la partition de E associée):

a) $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et, pour tous $(a,b),(c,d) \in E$, on pose $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si $ad - bc = 0$.

À quel ensemble s'identifie l'ensemble des classes d'équivalence dans ce cas ?

b) $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||_2 = 1\}$ et, pour tous $x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff y = \pm x$.

c) $E = \mathbb{R}^n \backslash \{(0,\ldots,0)\} (n \geq 1)$ et, pour tous $x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times, y = \lambda x$. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est appelé *espace projectif réel de dimension n* et noté $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.

d) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour tous $f, g \in E, f\mathcal{R}g \iff f(0) = g(0)$.

Donner un ensemble "simple" en bijection avec l'ensemble des classes. (Noter que pour $\mathcal{R}$ seule la valeur en 0 compte.)

3.* Montrer qu'en posant $(x,y) \sim (x',y')$ si et seulement si $x + y = x' + y'$ on définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$; décrire la classe de $(0,1)$ et l'ensemble des classes.

4. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E définie par

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a + d = b + c.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que toute classe d'équivalence est représentée de manière unique par un élément de la forme $(n,0), n \geq 0$ ou $(0,m), m \geq 1$.

c) On note $[(a,b)]$ la classe d'équivalence de (a,b). Montrer que l'application $n \mapsto [(n,0)]$ de $\mathbb{N}$ dans $E/\mathcal{R}$ est injective.

d) Montrer que si $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(c,d)\mathcal{R}(c',d')$, alors

$$(a+c, b+d)\mathcal{R}(a'+c', b'+d').$$

e) Montrer que la loi interne

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

est bien définie, et que cette loi est commutative, associative, et possède un élément neutre. Montrer que $[(a,b)] + [(b,a)] = [(0,0)]$.

f) À votre avis, à quel groupe s'identifie l'ensemble $E/\mathcal{R}$ muni de cette loi?

$\diamond \diamond \diamond$