Feuille de TD 1

Rappels sur les groupes

Exercice 1. *Produit semi–direct*

Soient G, N, H des groupes. Nous considérons trois relations possibles entre G, H et N.

1. On dit que G est un *produit semi–direct interne* de N et H si N et H sont des sous–groupes de G avec N distingué et $N \cap H = \{1\}$ et $G = NH$.
2. On dit que G est *le produit semi–direct externe* de N et H s'il existe un morphisme de groupes $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ tel que le produit cartésien $N \times H$ muni de la loi
$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = \big(n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2\big).$$
est isomorphe à G.
3. On dit que G est une *extension scindée de H par N* s'il existe une suite exacte courte[1] de groupes $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$ et un morphisme de groupes $s : H \to G$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_H$.

1. Montrer que la loi de composition d'un produit semi–direct externe est bien une loi de groupe.
2. Montrer que ces trois définitions sont équivalentes. Pour un produit semi–direct interne donné expliciter l'automorphisme φ associé.
3. À quelle propriété du produit semi–direct $N \rtimes_\varphi H$ la condition φ *est trivial* correspond-elle ?
4. Soit n un entier ≥ 2. Écrire $\mathfrak{S}_n$ comme un produit semi–direct $\mathfrak{A}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec un morphisme φ que l'on précisera. Même question avec $\mathrm{GL}_n(k) \simeq \mathrm{SL}_n(k) \rtimes k^\times$ (k corps commutatif).
5. Sous quelles conditions sur N, H et φ est-ce que $N \rtimes_\varphi H$ est abélien ?
6. Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne peut pas s'écrire comme un produit semi–direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ([2])

Exercice 2. On considère le plan $H = \{(x, y, 1) | x, y \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $A \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ donné par
$$A = \{g \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3) |\, g(H) = H\}.$$

1. Montrer que A est un sous–groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$, qui agit transitivement sur H.
2. Pour tout $\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ soit M_ϕ sa matrice dans la base canonique. Sous quelles conditions sur M_ϕ a–t–on $\phi \in A$?

---

1. On dit que $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$ est une *suite exacte courte* de groupes si ι est un morphisme de groupes injectif, si p est un morphisme de groupes surjectif et si $\mathrm{Im}\, \iota = \mathrm{Ker}\, p$.
2. Cet exemple montre au passage que la connaissance des groupes finis simples ne permet pas de « reconstituer » aisément tous les groupes finis, contrairement à une croyance assez répandue.

3. Identifier un sous–groupe de A qui est isomorphe à $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$. Ce sous–groupe agit-il de façon transitive sur H ? Ce sous–groupe est-il distingué ?
4. Identifier un sous–groupe de A qui est isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$. Ce sous–groupe agit-il de façon transitive sur H ? Ce sous–groupe est-il distingué ?
5. Montrer que A est un produit semi–direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$.
6. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de triangles non-plats dans H. Montrer que A agit transitivement sur T. Soit $t \in \mathcal{T}$, soit $a \in A$, soit b_1 le barycentre de t et soit b_2 le barycentre de $a(t)$. Montrer que $a(b_1) = b_2$.

Exercice 3. Soit G un groupe. Son *groupe dérivé* $D(G)$ est le sous–groupe engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ (dit “commutateur de x et y”) pour $x, y \in G$.

1. À quelle condition a–t–on $D(G) = \{1\}$?
2. Montrer que $G/D(G)$ est un groupe qui est abélien. Montrer que si $f : G \to H$ est un morphisme vers un groupe abélien alors f factorise via le quotient $\pi : G \to G/D(G)$. *On notera dans ce qui suit G_{ab} pour $G/D(G)$.*
3. On dit que G est *résoluble* s'il existe $m \geq 1$ tel que $D^m(G) = \{1\}$ où $D^n(G)$ est défini par la relation de récurrence $D^0(G) = G$ et $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$. Montrer que G est résoluble si et seulement s'il existe $m \geq 1$ et une suite de groupes $G_0, \ldots, G_m$ telle que
   (a) $G_0 = G$ et $G_m = \{1\}$,
   (b) pour chaque i le groupe G_{i+1} est un sous–groupe distingué de G_i,
   (c) pour chaque i le groupe quotient G_i/G_{i+1} est abélien.

Exercice 4. Soit n un entier ≥ 3. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$ et $T_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles inversibles $n \times n$ triangulaires supérieures.

1. Calculer $D(T_2(\mathbb{R}))$ et montrer que ce groupe est résoluble.
2. On considère $G \subset T_3(\mathbb{R})$, le groupe des matrices 3×3 triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Déterminer le groupe $D(G)$. *(Indication : commencer par montrer que les applications $G \to (\mathbb{R}, +)$ données par $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$ et $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto c$ sont des morphismes de groupes.)* Montrer que $D(G)$ est abélien.
3. (**) Montrer que $D(T_3(\mathbb{R})) = G$ et conclure que ce groupe est résoluble.
4. Calculer $D(\mathfrak{S}_n)$, $(\mathfrak{S}_n)_{\mathrm{ab}}$ et $D(\mathfrak{A}_n)$.
5. Est-ce que $\mathfrak{S}_n$ est résoluble ?

Rappels et approfondissements d'algèbre linéaire.

Exercice 5. *Sommes directes.*

On rappelle qu'on dit qu'un k-espace vectoriel V est une somme directe *interne* de sous espaces $V_1, \dots, V_n \subset V$ si pour chaque $v \in V$ il existe des éléments uniques $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ tels que

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Pour toute collection de k-espaces vectoriels $W_1, \dots, W_n$ on définit la somme directe *externe* de $\{W_1, \dots, W_n\}$ par

$$\oplus_{i=1}^n W_i = \{(w_1, \dots, w_n) |\, w_i \in W_i \ \forall i\}.$$

On admettra que ce dernier est un k-espace vectoriel pour les opérations

$$(w_1, \dots, w_n) + (w_1', \dots, w_n') = (w_1 + w_1', \dots, w_n + w_n')$$

et

$$\lambda \cdot (w_1, \dots, w_n) = (\lambda w_1, \dots, \lambda w_n).$$

1. Soit V une somme directe interne de $V_1, \dots, V_n \subset V$. Construire un isomorphisme "naturel" [1] entre V et la somme directe externe $W = \oplus_{i=1}^n V_i$.
2. Donner pour chaque i une inclusion $f_i : V_i \hookrightarrow W$ telle que W est la somme directe interne des images $f_i(V_i)$, c'est-à-dire que $W = \oplus_i f_i(V_i)$.
   À partir de maintenant, nous ne distinguerons plus les notions de somme directe interne et somme directe externe.
3. Justifier que si $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ et si pour chaque i $(e_{i,1}, \dots, e_{i,m_i})$ est une base de V_i, alors $\cup_{i=1}^n (e_{i,1}, \dots, e_{i,m_i})$ est une base de V. En déduire que si $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ alors $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim V_i$.
4. Justifier que si $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ et si pour chaque V_i on a $V_i = \oplus_{j=1}^{m_i} W_{i,j}$, alors

$$V = \oplus_{i=1\dots n, j=1\dots m_i} W_{i,j}.$$

Exercice 6. *Rappels et approfondissements de diagonalisation.*

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soit ϕ un endomorphisme diagonalisable (resp. trigonalisable) de V. Montrer que si $W \subset V$ est un sous–espace stable par ϕ alors $\phi_W : W \to W$ est diagonalisable (resp. trigonalisable).
2. Soit $\phi_1, \dots, \phi_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de V qui commutent deux à deux. Montrer qu'on peut écrire $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ de telle sorte que pour chaque i et chaque j il existe $\lambda_{i,j}$ tel que

$$\phi_j|_{V_i} = \lambda_{i,j} \mathrm{Id}_{V_i}$$

   (On commencera par considérer le cas de deux endomorphismes.)

1. c'est-à-dire ne dépendant pas du choix d'une base.

3. En déduire l'existence d'une base $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de V faite de vecteurs propres communs à tous les ϕ_j.
4. (**) Même question pour une collection infinie d'endomorphismes $\{\phi_i | i \in I\}$ qui commutent deux à deux.

Exercice 7. Dans ce qui suit ϕ est un endomorphisme d'un k-espace vectoriel V.

On rappelle le lemme des noyaux : soient Q, R des polynômes à coefficients dans k, premiers entre eux, tels que
$$Q(\phi)R(\phi) = 0,$$
alors $V = \mathrm{Ker}(Q(\phi)) \oplus \mathrm{Ker}(R(\phi))$.

1. Soit P un polynôme irréductible de degré d à coefficients dans k tel que $P(\phi) = 0$. Montrer que pour tout $v \in V$ non-nul les vecteurs $(v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{d-1}(v))$ sont linéairement indépendants.
2. Montrer que W_v, l'espace engendré par les vecteurs $(v, \phi(v), \phi^2(v), \ldots, \phi^{d-1}(v))$, est stable par ϕ. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que tout sous–espace vectoriel de V stable par ϕ et dont l'intersection avec W_v n'est pas $\{0\}$ contient W_v.
4. (**) Justifier que l'espace V admet une décomposition $V = \oplus_{i=1}^m V_i$ telle que
   (a) chaque V_i est stable par ϕ,
   (b) chaque V_i admet une base dans laquelle la matrice de ϕ est la matrice compagnon du polynôme P.
5. Soit V un espace vectoriel réel et soit ϕ un endomorphisme de V tel que $\phi^4 = \mathrm{Id}$. Justifier que V admet une décomposition $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ telle que pour chaque i,
   (a) soit V_i est le sous–espace propre de valeur propre 1 de ϕ,
   (b) soit V_i est le sous–espace propre de valeur propre -1 de ϕ,
   (c) soit V_i est un sous–espace de dimension 2 et il existe une base de V_i dans laquelle ϕ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. *Complexifié d'un espace vectoriel.* Pour tout espace vectoriel réel V on définit son complexifié $V_{\mathbb{C}}$ par
$$V_{\mathbb{C}} = \{v_1 + iv_2 | v_1, v_2 \in V\}.$$
Nous munissons cet ensemble d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel en posant
$$(v_1 + iv_2) + (w_1 + iw_2) = (v_1 + w_1) + i(v_2 + w_2)$$
$$(a + ib)(v_1 + iv_2) = av_1 - bv_2 + i(bv_1 + av_2).$$
Pour tout endomorphisme ϕ de V on note $\phi_{\mathbb{C}}$ l'application induite sur $V_{\mathbb{C}}$ par
$$\phi_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = \phi(v_1) + i\phi(v_2).$$

1. Montrer que si W est un sous–espace complexe de $V_{\mathbb{C}}$ alors son conjugué

$$\overline{W} = \{w_1 - iw_2 | w_1 + iw_2 \in W\}$$

est encore un sous-espace complexe de $V_{\mathbb{C}}$.

2. Montrer que si W est le sous–espace propre de $\phi_{\mathbb{C}}$ de valeur propre λ alors $\overline{W}$ est le sous-espace propre de $\phi_{\mathbb{C}}$ de valeur propre $\overline{\lambda}$.

3. Montrer que pour tout sous espace complexe $W \subset V_{\mathbb{C}}$ il existe un sous–espace réel $W_{\mathbb{R}} \subset V$ tel que
$$W + \overline{W} = \{v_1 + iv_2 | v_1, v_2 \in W_{\mathbb{R}}\}.$$

4. Soit W un espace de dimension 1 engendré par un vecteur propre $v + iw$ de $\phi_{\mathbb{C}}$ de valeur propre $\lambda = a + ib$. Montrer que $W_{\mathbb{R}}$ est stable par ϕ. Si (v, w) est libre, calculer la matrice de ϕ sur $W_{\mathbb{R}}$ dans la base (v, w).

5. Classifier à similitude près les endomorphismes ϕ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\phi^n = \mathrm{Id}$.

6. Soient ϕ et ψ deux endomorphismes d'ordre fini d'un espace réel V. Justifier que ϕ et ψ sont semblables sur V si et seulement si $\phi_{\mathbb{C}}$ et $\psi_{\mathbb{C}}$ sont semblables sur $V_{\mathbb{C}}$.

Sous–groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ préservant une structure.

Exercice 9. *Groupe affine en toute dimension.* Soit V un espace euclidien de dimension finie. On notera $\mathrm{Aff}(V)$ l'ensemble de toutes les bijections $V \to V$ de la forme

$$v \mapsto \phi(v) + w$$

avec $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ et $w \in V$. On notera $\mathrm{Is}(V)$ l'ensemble des isométries affines de V, c'est-à-dire des éléments $v \mapsto \phi(v) + w$ avec $\phi \in O(V)$ et $w \in V$.

1. Montrer que $\mathrm{Aff}(V)$ et $\mathrm{Is}(V)$ sont des sous-groupes de $\mathrm{Bij}(V)$.

2. Soit G un sous-groupe *fini* de $\mathrm{Aff}(V)$. Montrer qu'il existe un point $p \in V$ tel que $g(p) = p$ pour tout $g \in G$.

3. Soit $T \subset \mathrm{Aff}(V)$ l'ensemble des translations $(v \mapsto v + w)$. Montrer que T est un sous-groupe abélien et distingué de $\mathrm{Aff}(V)$.

4. Soit $H \subset \mathrm{Is}(V)$ un sous-groupe abélien et distingué. Justifier que pour tout $h \in H$ et tout $u \in V$ nous avons que
$$ht_u h t_{-u} = t_u h t_{-u} h,$$
où t_u est la translation de vecteur u. En déduire que si $h(v) = \phi(v) + w$ alors
$$(\phi - \mathrm{Id})^2 = 0.$$
Déduire que $H \subset T$.

Exercice 10. *Groupe de Lorentz.* On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la forme de Minkowski [2]

$$q(x,y) = x^2 - y^2.$$

1. Justifier que l'ensemble

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) | \, \forall v \in \mathbb{R}^2 \, q(g(v)) = q(v)\}$$

   est un sous–groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2. Sous quelles conditions sur les nombres (a,b,c,d) a–t–on que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$?
3. (**) Même question pour la forme $q(t,x,y,z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ sur $\mathbb{R}^4$. [3]

Exercice 11. *Groupe préservant un drapeau.* Soit V un espace vectoriel, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et pour chaque i notons V_i le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$.

Soit G le sous–ensemble des endomorphismes ϕ de $\mathrm{GL}(V)$ tels que pour chaque i on ait $\phi(V_i) = V_i$.

1. Justifier que G est un sous–groupe de $\mathrm{GL}(V)$.
2. Pour tout $\phi \in \mathrm{GL}_n(V)$ on note M_ϕ sa matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. À quelle condition sur la matrice M_ϕ a–t–on $\phi \in G$?

Exercice 12. *Rotation préservant un réseau.* Soit (e_1, e_2) une base de $\mathbb{R}^2$ euclidien et soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que ϕ préserve le réseau $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$.
On suppose que ϕ est une rotation d'angle θ. En considérant la trace de ϕ, donner toutes les valeurs possibles de θ.

---

2. Cette forme intervient en relativité restreinte, où elle est utilisée pour calculer le temps propre d'un chemin de vie.

3. Ce groupe de transformations de l'espace–temps, que l'on appelle le groupe de Lorentz, décrit le changement de référentiel entre deux observateurs en rélativité restreinte. Il sert entre autres dans les GPS de votre téléphone.