UNIVERSITÉ
Grenoble
Alpes

Cours MAT302, partie II

Intégrale de Riemann
et intégrales généralisées

Odile Garotta

(sur la base du polycopié de Romain Joly)

octobre 2021

Table des matières

Chapitre 5 : La théorie de l'intégration de Riemann

1 Topologie des intervalles compacts

On appelle *intervalle compact* de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné du type $[a, b]$ avec $a \leq b$ deux réels. Le mot « compact » fait référence à la propriété suivante qui pourra être satisfaite par d'autres ensembles que les intervalles $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:

Théorème 5.1. (Bolzano-Weierstrass)
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de l'intervalle compact* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Alors* il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge *vers une limite* $\ell \in [a, b]$ *(où* $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *désigne une fonction strictement croissante).*

Démonstration : On peut utiliser le procédé suivant, dit *de dichotomie*. On coupe $[a, b]$ en son milieu en deux intervalles

$$I_1 = [a, (a + b)/2] \quad \text{et} \quad I_2 = [(a + b)/2, b] \,.$$

Pour $j = 1, 2$, on note $\mathcal{N}_j$ l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n \in I_j$. Comme $\mathbb{N}$ est la réunion de $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, au moins l'un parmi $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ est infini. On choisit celui qui est infini et d'indice le plus petit, disons $\mathcal{N}_k$ et on note $\varphi(0)$ son plus petit élément. On ne regarde maintenant plus que ce qui se passe dans le segment moitié I_k. À nouveau on coupe ce segment en deux et on sélectionne une moitié pour laquelle l'ensemble des indices associés est infini. On note $\varphi(1)$ le plus petit tel indice tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$, et on continue. On construit ainsi une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$. Ses éléments se retrouvent confinés au fur et à mesure dans des intervalles de longueur de plus en plus petite, tendant vers 0. C'est exactement dire que la suite extraite vérifie le critère de Cauchy et donc elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En outre, comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout n, on a forcément $\ell \in [a, b]$. $\square$

À propos des auteurs :

- Bernard Bolzano (1781-1848, Prague) : on lui doit le théorème des valeurs intermédiaires
- Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne), souvent cité comme « le père de l'analyse moderne ».

Dans ce cours, ce théorème nous sera surtout utile pour montrer la continuité uniforme, notion cruciale pour construire l'intégrale des fonctions continues :

Définition 5.2. *Une fonction* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* uniformément continue sur *I si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists \delta > 0 \ , \quad \forall x, y \in I \ , \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \, .$$

Attention de ne pas confondre la continuité uniforme avec la continuité tout court. Cette dernière s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \forall x \in I \ , \quad \exists \delta > 0 \ , \quad \forall y \in I \ , \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \, .$$

Donc pour la continuité, la marge δ ne donnant pas une erreur plus grande que ε pour les images peut *dépendre de x*. Ce n'est pas le cas quand on demande que la continuité soit uniforme. Ainsi toute fonction uniformément continue est continue ; par contre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant est attribué à Eduard Heine (1821-1881, Allemagne).

Théorème 5.3. (Heine) *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est aussi uniformément continue.*

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue mais pas uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n, il existe x_n et y_n dans $[a,b]$ avec $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par compacité, il existe $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. Par continuité, on a $f(x_{\varphi(n)})$ qui tend vers $f(\ell)$. Par l'inégalité triangulaire $y_{\varphi(n)}$ tend aussi vers ℓ et donc $f(y_{\varphi(n)})$ tend vers $f(\ell)$. Mais alors en passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, on aurait $0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde. Par suite f est uniformément continue. $\square$

On rappelle la propriété suivante, qui résulte aussi de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 5.4. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$.*

2 Définition de l'intégrale de Riemann

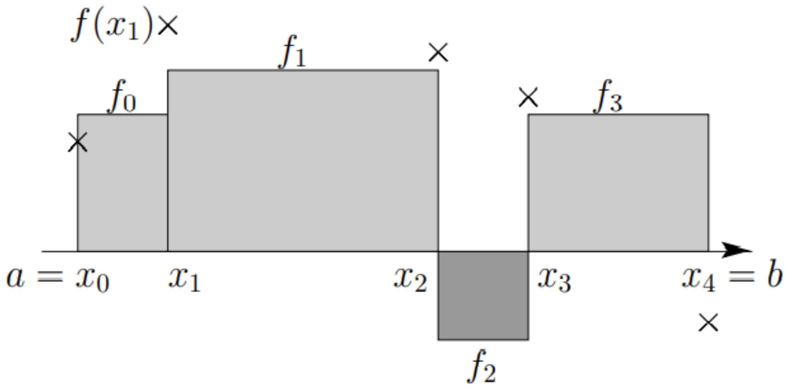
Nous allons définir l'intégrale d'une fonction comme l'aire entre l'axe horizontal et sa courbe, comptée algébriquement (positivement si la courbe est au–dessus de l'axe et négativement en dessous). Le problème revient à définir proprement ce qu'est une aire d'une forme géométrique. Par définition, l'aire des rectangles vaut longueur fois largeur. Puis par découpages et recollages, on peut définir l'aire des triangles et de tout polygone. Comment faire pour l'aire sous une courbe ? Nous allons essayer de l'encadrer avec des aires de polygones, et de voir si on peut obtenir une aire limite en faisant un encadrement de plus en plus précis.

C'est déjà ainsi que les Anciens ont calculé l'aire du disque et donc π : Archimède (III^e^ siècle avant J.C., Syracuse) donne $\pi \simeq 3,14$ avec des polygones à 96 côtés, Liu Hui (III^e^ siècle après J.C., Chine) trouve une méthode itérative plus rapide et avec aussi 96 côtés donne $\pi \simeq 3,1416$. Deux siècles plus tard, le chinois Zu Chongzhi reprend l'algorithme et obtient π au millionième près avec l'équivalent d'un polygone à plus de 12 000 côtés.

L'histoire de l'intégration d'un point de vue plus analyste remonte à Cavalieri (1598-1647, Italie) puis à Leibniz (1646-1716). Riemann (1826-1866) est un des premiers à formaliser proprement la théorie. Il existe plusieurs façons de définir et construire l'intégrale de Riemann. Elles sont toutes grosso modo équivalentes. Nous allons voir ici une présentation allégée proche de celle de Gaston Darboux (1842-1917, France).

Définition 5.5. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite* en escalier *ou* constante par morceaux *sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ tels que f est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Les points x_i forment une* subdivision *de I.*

Notons que cette définition ne dit rien sur la valeur de f en les x_i, qui peut être différente des constantes. L'intégrale d'une fonction en escalier se définit naturellement par la formule d'aire des rectangles.



Définition 5.6. *Soit f une fonction en escalier sur un intervalle $[a,b]$ qui est constante égale à f_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$. Alors on appelle* intégrale de f sur $[a,b]$ *et on note* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *le nombre*

$$\sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1}-x_i)\times f_i\,.$$

Par exemple, on a

$$\int_0^3 E(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (1-0)\times 0+(2-1)\times 1+(3-2)\times 2 \;=\; 3\,.$$

Pour définir l'intégrale de fonctions plus compliquées, nous allons introduire des fonctions en escalier qui encadrent la fonction.

Notons déjà que

Proposition 5.7. *Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que $f \leq g$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration : On prend la subdivision $(x_i)_i$ réunion des subdivisions associées à f et à g. La fonction $g-f$ est une fonction en escalier positive associée à $(x_i)_i$. Son intégrale est donc positive, et on voit que $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Définition 5.8. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* intégrable au sens de Riemann, *ou* Riemann–intégrable *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\underline{f_\varepsilon}$ et $\overline{f_\varepsilon}$ telles que*

$$\forall x \in [a,b]\ ,\quad \underline{f_\varepsilon}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_\varepsilon}(x)$$

$$\text{et}\quad 0 \;\leq\; \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \varepsilon\,.$$

Proposition 5.9. *Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout choix des familles de fonctions $(\underline{f_\varepsilon})$ et $(\overline{f_\varepsilon})$, on a existence et égalité des limites*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En outre, cette limite est indépendante du choix des familles de fonctions en escalier. Cette limite est appelée intégrale de f sur $[a,b]$ au sens de Riemann *et est notée*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration : On ne détaille pas la preuve complète, mais l'argument principal est le suivant. Pour $\varepsilon,\varepsilon' > 0$, on considère $\underline{f_\varepsilon}$ et $\underline{f_{\varepsilon'}}$ deux fonctions en escalier sous f associées. On a forcément $\underline{f_{\varepsilon'}} \leq f \leq \overline{f_\varepsilon}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; 0+\varepsilon=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Mais avec l'argument symétrique, on a

$$\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \varepsilon'\,.$$

Donc

$$\left|\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \max(\varepsilon,\varepsilon')\,.$$

Ceci montre par exemple que les familles d'intégrales des fonctions en escalier vérifient le critère de Cauchy et donc convergent. Par passage à la limite, les limites de l'intégrale des $\underline{f_\varepsilon}$ et de celle des $\overline{f_\varepsilon}$ coïncident.

En prenant deux fonctions sous f qui marchent pour le même ε, c'est aussi ainsi que l'on voit que l'écart entre les deux valeurs obtenues pour approcher l'intégrale devient négligeable, conduisant à la même limite. $\square$

Contre–exemple : On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon.
Comme tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ dans $[0,1]$ rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, une fonction constante par morceaux sous f sera forcément négative ou nulle et une fonction constante par morceaux au–dessus de f sera forcément plus grande que 1.

L'écart entre les intégrales sera donc au moins 1 et f n'est pas intégrable au sens de Riemann : ce n'est pas la bonne méthode pour donner un sens à l'intégrale de cette fonction.

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

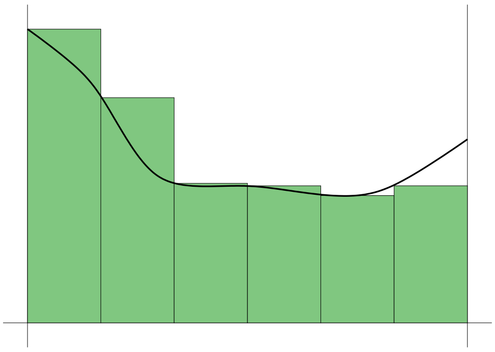
Le papier original de Riemann de 1867 (posthume mais présentant des travaux de 1854). Son but principal est de commenter les écrits de Joseph Fourier. Il a déjà écrit une quinzaine d'intégrales dans cet article, quand il pose soudain la question « Qu'entend-on par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$? ». Cela fait pourtant 250 ans que les gens l'écrivent pour des intégrales !

Voyons maintenant notre principal exemple de fonctions intégrables : les fonctions continues.

Théorème 5.10. *Soit* $[a,b]$ *un intervalle compact et* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *une fonction continue. Alors* f *est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La seconde assertion énonce que l'intégrale peut s'approcher par la méthode des rectangles à gauche avec des subdivisions régulières.



On découpe $[a,b]$ en n intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$. La somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big),$$

appelée *somme de Riemann*, correspond à l'aire des rectangles verts : leur hauteur est prise comme la valeur de f à gauche de l'intervalle.

Remarque : On peut de la même façon approcher l'intégrale de f par la méthode des rectangles *à droite* avec des subdivisions régulières. On obtient alors *une autre* somme de Riemann, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$, qui converge elle aussi vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Divisons $[a,b]$ en n intervalles égaux : on note $h = (b-a)/n$ le pas de la subdivision et $x_i = a + i \times h$, avec $i = 0, \ldots, n$, la subdivision. On définit $\underline{f}$ et $\overline{f}$ comme des fonctions en escalier qui sont constantes sur chaque $[x_i, x_{i+1}[$ en posant

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}[\ ,\quad \underline{f}(x) = \min_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t) \quad \text{et} \quad \overline{f}(x) = \max_{t\in[x_i,x_{i+1}]} f(t)\,.$$

En effet ces minimums et maximums sont bien définis car f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$. On décide aussi que $\underline{f}(b) = \overline{f}(b) = f(b)$.
Par construction, $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien des fonctions en escalier qui encadrent f. Leur différence est au pire l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$ pour x et y dans le même intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \le i < n)$. Par continuité uniforme sur $[a,b]$, on peut

trouver h assez petit (cad. n assez grand) tel que cet écart soit plus petit que $\varepsilon/(b-a)$. On a alors

$$0 \leq \int_a^b \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_a^b \underline{f}(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \sum_i (x_{i+1}-x_i)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\,.$$

Ceci montre que f est bien intégrable au sens de Riemann. La convergence de la somme de Riemann découle simplement du fait que cette somme est encadrée par les deux intégrales de $\underline{f}$ et $\overline{f}$, qui ont même limite. □

Exemples :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. En outre, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{1/n}} \;=\; \frac{1-e}{n(1-1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \;=\; \frac{e-1}{1+o(1)}\,.$$

  Donc, on faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1\,.$$

- La fonction $x \mapsto x+1$ est continue donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. En outre,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}(\frac{k}{n}+1) = 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

  où on a utilisé la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ que l'on peut démontrer par récurrence. On note que le résultat obtenu pour l'aire sous la courbe de $x \mapsto x+1$ est bien cohérent avec la formule d'aire d'un trapèze de hauteur 1 et de petite et grande bases 1 et 2.

Disons ici un mot sur les *notations*. La convergence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

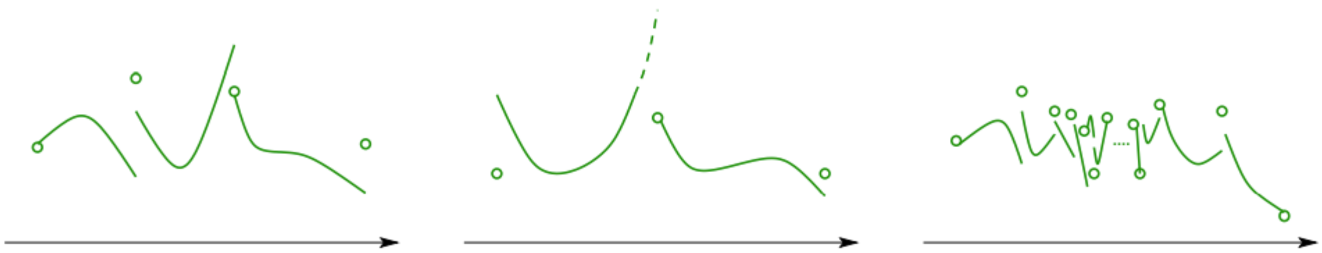
donne une correspondance entre les éléments de la somme de Riemann (méthode des rectangles) et l'écriture intégrale. On peut déjà remarquer que le symbole

$\int$ est un « $\mathcal{S}$ » allongé. Il a été introduit par Leibniz et fait bien référence à l'intégrale comme une sorte de somme. L'autre point à remarquer, c'est que l'élément d'intégration $\mathrm{d}x$ correspond à la limite de la petite distance $h = \frac{b-a}{n}$ (symbole qu'on retrouve logiquement dans la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par passage à la limite de la pente de la corde). C'est donc un élément qui fait partie de la somme de l'intégrale et non un symbole servant juste à fermer l'intégrale (ce sera clair au moment des changements de variables).

En recollant plusieurs intervalles où la fonction est continue, on peut généraliser le théorème précédent aux fonctions *continues par morceaux*.

Définition 5.11. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite* continue par morceaux *sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que f est continue sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et que les limites de f à droite et à gauche de chaque intervalle existent et sont finies.*

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$.



une fonction continue par morceaux

une fonction non continue par morceaux car la limite à gauche n'existe pas au point central

une fonction non continue par morceaux car il y a un nombre infini de discontinuités

Remarque : Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.

Théorème 5.12. *Soit $[a, b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. Alors f est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

De plus, la valeur de f aux points de discontinuité ne change pas la valeur de l'intégrale.

Démonstration : Il suffit de recoller les arguments de la démonstration précédente appliquée sur chaque morceau. Pour la convergence de la somme de Riemann, l'argument est aussi le même. Il y a juste le problème des valeurs aux points de discontinuité, mais celles-ci sont en nombre fini, f est bornée, donc leur influence disparaît au fur et à mesure que n tend vers $+\infty$. $\square$

On peut aussi facilement gérer les fonctions à valeurs complexes.

Définition 5.13. *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann si ses parties réelle et imaginaire le sont. On pose alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x \;+\; i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Nous allons admettre quasiment toutes les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann, même si elles se démontrent assez facilement avec la définition, en partant du cas des fonctions en escalier.

Proposition 5.14. Linéarité
Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f+\lambda g$ est intégrable au sens de Riemann et

$$\int_a^b (f+\lambda g)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Proposition 5.15. Monotonie
Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. Si pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On note que la valeur en un nombre fini de points n'influence pas la valeur de l'intégrale, donc on peut aussi supposer que $f(x) \leq g(x)$ sauf en un nombre fini de points.

Proposition 5.16. Relation de Chasles
Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$ et soit $b \in]a,c[$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Cette relation nous pousse à prendre comme **convention** que :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Notons que la première convention est aussi cohérente avec la limite quand $b \to a$.

Proposition 5.17. Inégalité triangulaire
Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors $|f|$ l'est aussi et

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration : Donnons ici un schéma de preuve pour f réelle. On note $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$. Ce sont deux fonctions positives telles que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. On montre avec les fonctions en escalier $\underline{f_\varepsilon}^+$ et $\overline{f_\varepsilon}^+$ que f^+ est intégrable, et de même pour f^-. Par linéarité, $|f|$ l'est aussi. Enfin, l'inégalité résulte de la monotonie, puisque $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b (\pm f)(x)\,\mathrm{d}x$ et que $\pm f \leq |f|$. □

Proposition 5.18. Stricte positivité
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ une fonction continue et positive. Alors s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;>\; 0\,.$$

Autrement dit, si f est positive continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

3 Lien avec la dérivation

Le théorème fondamental de l'analyse est le lien a priori inattendu entre l'intégration et la dérivation. Il a été mis à jour dans la seconde moitié du XVII[e] siècle (Newton, Leibniz).

Théorème 5.19. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ une fonction continue par morceaux. Alors*

$$t \;\mapsto\; \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est une fonction continue de t *sur* $[a,b]$*. Si de plus* f *est* continue *sur* $[a,b]$ *alors l'application*

$$t \;\mapsto\; \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

est dérivable sur $[a,b]$*, de dérivée*

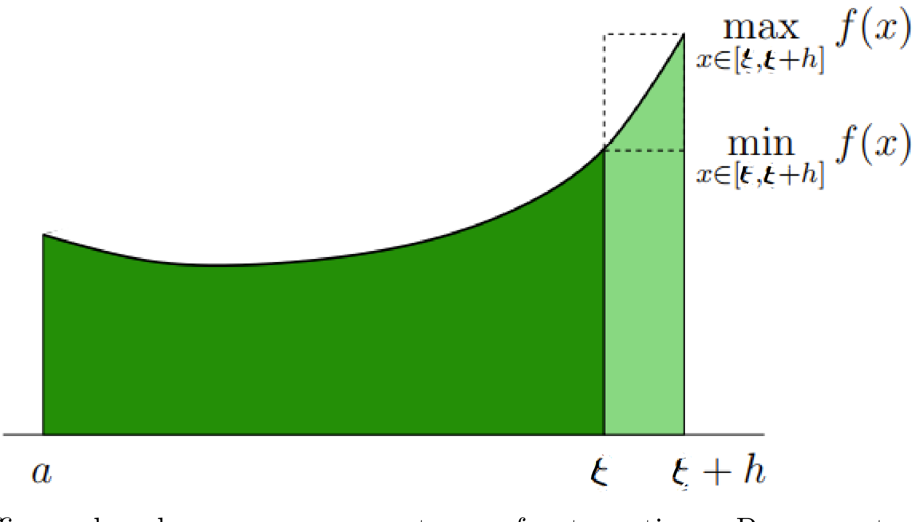
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = f(t)\,.$$

Et $t \;\mapsto\; \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ *est l'unique primitive de* f *sur* $[a,b]$ *qui s'annule en* a*.*

Démonstration : En séparant partie réelle et partie imaginaire de f, on se ramène à supposer f réelle.
Par la relation de Chasles, on a

$$\left|\int_a^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right|\,.$$

Si f est continue par morceaux, alors elle est bornée, disons que $|f| \leq M$, et la valeur absolue de l'aire sous la courbe entre t et $t+h$ est majorée par $\int_t^{t+h} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_t^{t+h} M\,\mathrm{d}x = hM$. La limite est donc 0 quand h tend vers 0, cad. que l'intégrale est continue par rapport à sa borne.



Affinons les choses en supposant que f est continue. Par monotonie de l'intégrale, on a

$$h \min_{x\in[t,t+h]} f(x) \;\leq\; \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; h \max_{x\in[t,t+h]} f(x)\,.$$

Or, par continuité, $\min_{x\in[t,t+h]} f(x)$ comme $\max_{x\in[t,t+h]} f(x)$ tendent vers $f(t)$ quand h tend vers 0. On obtient donc par l'encadrement que

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t)$$

ce qui donne par définition la dérivée recherchée. La dernière assertion vient de l'unicité de la primitive aux constantes près. $\square$

Remarque : Le théorème montre aussi que *toute fonction continue admet une primitive* (et donc une infinité en y ajoutant une constante). Si la fonction f est seulement continue par morceaux, on peut obtenir une sorte de primitive mais qui ne sera dérivable qu'à droite et à gauche aux points de discontinuité de f.

Corollaire 5.20. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $F \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ une primitive de f sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;:= [F(x)]_a^b\,.$$

Démonstration : On pose $\tilde{F}(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. On sait que $F = \tilde{F} + C$ avec C une constante. On a alors

$$F(b) - F(a) = (\tilde{F}(b) + C) - (\tilde{F}(a) + C) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 0\,.$$

$\square$

Chapitre 6 : Des techniques d'intégration

Le but de ce chapitre est de présenter quelques techniques d'intégration permettant d'exprimer une intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide des fonctions usuelles (et sans le signe intégral). Le plus souvent, cela revient à trouver une primitive à f mais cette opération est parfois difficile sans opérer des transformations de l'intégrale. Le but est donc de :

- connaître les transformations possibles,
- savoir dans quelle situation les utiliser pour simplifier le calcul.

Dans ce contexte, on pourra se souvenir qu'il n'est pas toujours possible d'avoir une expression de la primitive. Joseph Liouville (1809-1882, France) a ainsi montré que la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ ne peut s'exprimer en termes des fonctions usuelles. Même si on donne le nom « erf » (*fonction d'erreur*) à cette primitive et qu'on la considère fonction usuelle, on aura encore des primitives non exprimables etc. Nous allons donc essayer de faire au mieux, mais une méthode générale ne sera pas possible.

1 Intégration par parties

La formule de l'intégration par parties correspond à la formule de dérivation du produit. Si F et g sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ de dérivées f et g', alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Fg)(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)\,.$$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 6.1. *Soit $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

où F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(F'(x)g(x) + F(x)g'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (Fg)'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[F(x)g(x)\big]_a^b\,.\end{aligned}$$

□

On n'utilisera l'intégration par parties que si on identifie deux parties dans l'intégrande et qu'au moins une partie a une primitive connue. En outre, cette intégration par parties doit nous simplifier la tâche, c'est-à-dire aboutir à un intégrande plus simple. Nous allons voir quelques situations classiques.

Le cas polynôme contre exponentielle.
Si l'intégrande est du type $P(x)e^x$ avec P un polynôme, alors une intégration par parties permet de dériver le polynôme et intégrer l'exponentielle. Intégrer l'exponentielle n'est pas coûteux et dériver le polynôme fait baisser son degré. En réitérant le processus, on finit par se ramener à P =constante et on peut conclure. Cette méthode fonctionne aussi pour les intégrandes du type $P(x)\sin x$, $P(x)\cos x\ldots$

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - \big[e^x\big]_0^1 = e-(e-1) = 1\,.$$

Mais aussi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 - \left[x\,\frac{(-1)}{2}\cos(2x)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\big[\sin(2x)\big]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Les cas log ou arc tangente.
Quand une intégrale fait apparaître un log ou une arctangente, l'idée est d'essayer de faire une intégration par parties pour dériver ces fonctions. En effet,

leur dérivée est de type « fraction rationnelle », c'est-à-dire quotient de deux polynômes, et on sait intégrer toutes les fonctions de cette famille (voir le paragraphe 2).

Nous allons déjà voir comment calculer *une primitive du log.*

Une notation commode Pour désigner une *primitive* d'une fonction f continue sur un intervalle I, nous introduisons une notation qui n'est pas universelle mais bien pratique. On sait par exemple que $x \mapsto \int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t$ est la primitive du log qui s'annule en 1, mais $x \mapsto \int_2^x \ln t \,\mathrm{d}t$ est aussi une primitive du log, etc. En fait, la borne inférieure n'est pas importante, puisque dans tous les calculs, elle ne donne que des constantes et la primitive est définie à une constante près. Plutôt que de s'encombrer des nombres qui viendront de cette borne inférieure, nous allons l'ignorer : noter $\boxed{\int^x f(t)\,\mathrm{d}t}$ donnera en quelque sorte la primitive sur I la plus simple à écrire, c'est-à-dire la partie qui dépend de x avec les fonctions usuelles.

Par ailleurs, notre astuce est de faire une intégration par parties en dérivant le log. A priori, il n'y a rien à intégrer... sauf que l'on peut dire que le log est multiplié par 1 et intégrer cette constante :

$$\begin{aligned}\int^x \ln t \,\mathrm{d}t &= \int^x 1 \times \ln t \,\mathrm{d}t = \big[t \cdot \ln t\big]^x - \int^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x \ln x - \int^x \mathrm{d}t = x \ln x - x\,.\end{aligned}$$

Proposition 6.2. *Une primitive de* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$ *est* $x \mapsto x \ln x - x$*.*

On procède de même pour l'arc tangente.

$$\begin{aligned}\int^x \arctan t \,\mathrm{d}t &= \big[t \cdot \arctan t\big]^x - \int^x t \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x \arctan x - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\big[\ln\left|1+t^2\right|\big]^x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.\end{aligned}$$

L'astuce marche pour d'autres cas :

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \ln^2 x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x^2\,\ln^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 x^2\,\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln^2 2 - \int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x = 2\ln^2 2 - \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{4}\big[x^2\big]_1^2 \\ &= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}\,.\end{aligned}$$

L'astuce de la double intégration.
Terminons par un calcul astucieux classique qui nécessite une double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x \,\mathrm{d}x &= \big[\cos x \cdot e^x\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x \cdot e^x \,\mathrm{d}x \\ &= -e^{\pi} - 1 + \big[\sin x \cdot e^x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x \,\mathrm{d}x \\ &= -e^{\pi} - 1 + 0 - \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x \,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

On a l'impression de tourner en rond car la dernière intégrale est celle de départ. Mais le signe nous sauve miraculeusement et on peut faire passer l'intégrale de l'autre côté pour obtenir

$$\int_0^{\pi} \cos x \cdot e^x \,\mathrm{d}x = -\frac{1+e^{\pi}}{2}\ .$$

2 Décomposition en éléments simples

Dans cette partie nous montrons comment intégrer les fractions rationnelles, c'est-à-dire les quotients de deux polynômes. L'idée de base de la méthode est illustrée par cet exemple élémentaire :

On souhaite intégrer la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$. On constate que

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right),$$

et donc une primitive de f est

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right)$$

(on lèvera les valeurs absolues en fonction de l'intervalle où la primitive est considérée). On voit ici le point central de la méthode : décomposer la fraction en « éléments simples » que l'on sait facilement intégrer.

Les éléments simples : soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels. Le polynôme $Q(x)$ peut se factoriser sous la forme

$$Q(x) = C(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_p)^{k_p}(x^2+a_1x+b_1)^{l_1}\dots(x^2+a_qx+b_q)^{l_q}$$

où les x_i sont des racines réelles distinctes, les k_i et l_i sont des entiers ≥ 1 et les $(x^2 + a_i x + b_i)$ des facteurs irréductibles réels. Alors la fraction P/Q peut se décomposer (de manière unique) sous la forme d'une somme d'éléments de la liste suivante :

- un polynôme réel E de degré égal à $\deg(P) - \deg(Q)$: ce polynôme est le quotient de la division euclidienne de P par Q. Si le degré de Q est plus grand que celui de P, il n'y a pas de tel terme ;
- pour chaque racine x_i, une somme de termes
$$\frac{\alpha_1}{(x - x_i)} + \frac{\alpha_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_i}}{(x - x_i)^{k_i}} \quad (\alpha_j \in \mathbb{R})\,;$$
- pour chaque facteur irréductible $(x^2 + a_i x + b_i)$, une somme de termes
$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{(x^2 + a_i x + b_i)} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 + a_i x + b_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{l_i} x + \beta_{l_i}}{(x^2 + a_i x + b_i)^{l_i}} \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R})\,.$$

Voyons un exemple : si on considère la fraction
$$f(x) = \frac{x^5}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)}$$
alors on sait que l'on peut écrire
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{gx + h}{x^2 + x + 1}\,.$$

Méthodes de décomposition : si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on commence par effectuer la *division euclidienne* de P par Q. La notant $P = QE + R$, avec R nul ou $\deg(R) < \deg(Q)$, nous obtenons que
$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$
Si par exemple on n'a qu'un seul facteur simple au dénominateur, la division euclidienne permet d'avoir tous les termes de la décomposition. Ainsi,
$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & & & & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & & & \\
 & x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
 & & x & & \\
 & & -x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -1 &
\end{array}$$

Ce qui montre que
$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \ .$$

Dans le cas général, cette division nous ramène au cas où $\deg(P) < \deg(Q)$.

Pour la seconde étape, on commence par factoriser Q complètement, pour trouver quels sont les éléments simples qui vont intervenir. Une fois ces éléments connus, la méthode la plus basique consiste à *tout réduire au même dénominateur* et à *identifier* termes à termes. Par exemple, on écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-(2a+b)}{(x-1)(x-2)} \ . \end{aligned}$$

Par identification, on trouve que $a+b=1$ et $2a+b=-2$. La résolution du système donne que $a=-3$ et $b=4$ et donc

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \ .$$

Il existe toutefois des astuces qui permettent souvent d'aller plus vite.

Une astuce quand on n'a *que des facteurs simples du type* $\dfrac{a_i}{x-x_i}$ à trouver est la suivante. Prenons par exemple le cas de la fraction

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \ .$$

Pour trouver a, on multiplie tout par $x+1$ pour obtenir, pour $x \neq -1$,

$$\frac{2x+3}{x-1} = a + b\,\frac{x+1}{x-1} \,,$$

et on prend la limite quand $x \to -1$. En fait, on peut maintenant évaluer en $x=-1$: le terme en b disparaît, on obtient une *équation en* a, qui nous donne $a = -1/2$.

On voit que l'astuce a consisté à neutraliser b (et autres termes) dans un premier temps, de manière à trouver a.

Pour trouver b, on procède de même en multipliant l'expression de départ par $x-1$ et en prenant la valeur en $x=1$ (ou plus rigoureusement en faisant la limite $x \to 1$ dans l'expression). On trouve ainsi

$$\frac{2x+3}{x+1} = a\,\frac{x-1}{x+1} + b$$

puis $b = 5/2$. On conclut donc que

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right).$$

La même astuce s'applique si a est racine multiple du dénominateur, pour obtenir le coefficient de la puissance $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ *la plus élevée* dans la décomposition.

Exemple : Décomposons la fraction $\dfrac{2x^3+1}{x^2(x-2)^2}$ en éléments simples : on a

$$\frac{2x^3+1}{x^2(x-2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2}\,.$$

On trouve b en multipliant par x^2 et en prenant la limite quand $x \to 0$: $b = \frac{1}{4}$. De même, on trouve d en multipliant par $(x-2)^2$ et en prenant la limite quand $x \to 2$: $d = \frac{17}{4}$.
Il reste à trouver a et c. Plutôt que de réduire au même dénominateur puis identifier, on peut aussi évaluer l'égalité en des valeurs autres que les pôles 0 et 2, par exemple
en $x = 1$: on obtient que $\frac{3}{1} = a + b - c + d$, et donc $a - c = 3 - b - d = 3 - \frac{18}{4} = 3 - \frac{9}{2} = \frac{-3}{2}$. Une autre possibilité pour obtenir une équation en a, b, c, d est d'utiliser une limite en $\pm\infty$: on commence par multiplier par x puis on fait $x \to +\infty$. Cela donne $2 = a + c$.

On conclut que $a = \frac{1}{4}$, $c = \frac{7}{4}$. Ainsi $\dfrac{2x^3+1}{x^2(x-2)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{7}{x-2} + \dfrac{17}{(x-2)^2}\right)$.

Intégration : il ne reste plus qu'à intégrer les différents « éléments simples ». Évidemment, pour l'éventuelle partie polynomiale c'est facile, de même que pour les termes $1/(x-x_i)^{k_i}$. Par exemple, avec les décompositions déjà effectuées, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\big[-\ln(1+x) + 5\ln(x-1)\big]_2^3 \\
&= \frac{1}{2}(-\ln 4 + 5\ln 2 + \ln 3 - 5\ln 1) = \frac{1}{2}\ln(24)\,.
\end{aligned}$$

L'intégration des termes correspondant à des *facteurs irréductibles de degré 2* est plus délicate. Nous n'allons voir que le cas des fractions du type $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$ (où donc $\Delta = a^2 - 4b < 0$). Leur intégration est basée sur deux primitives usuelles :

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{2t+a}{t^2+at+b}\,\mathrm{d}t = \ln|x^2+ax+b\,|.$$

Prenons un exemple concret. On souhaite intégrer

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2+2x+2}\ .$$

Commençons par modifier le terme en x du numérateur en repérant le début de la dérivée du dénominateur :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\ .$$

Le premier terme est sous la bonne forme pour être intégré avec un log. Le second terme se met sous la bonne forme pour être intégré avec un arc tangente en repérant le début d'un carré : $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t \ - \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) \ - \ \arctan(x+1)\,.\end{aligned}$$

On pourrait vouloir passer aux complexes pour factoriser complètement le dénominateur et n'avoir que des éléments simples faciles à intégrer. La *décomposition* est parfaitement possible ainsi et permet parfois d'aller plus vite. Mais attention au moment de l'*intégration*, il faut *revenir aux nombres réels* ou être très prudent. En effet, si on se retrouve avec des nombres comme $\ln(1+i)$, il va falloir se poser la question du log des nombres complexes, qui est délicate. Par exemple, on aurait a priori

$$\ln 1 = \ln(e^{2i\pi}) = 2i\pi \neq 0,$$

ce qui signifie que des précautions sont nécessaires pour parler du log des nombres complexes.

Nous n'avons pas vu l'intégration de tous les types de termes ni toutes les astuces qui servent à avoir rapidement la décomposition. Mais elles sont très bien implémentées dans les logiciels de calcul formel et nous ne faisons aujourd'hui à la main que les cas simples.

Exemple : Reprenons la méthode entière dans un dernier exemple. On veut intégrer $f\colon x \mapsto \dfrac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x}$. Décomposons la fraction en éléments simples. Tout d'abord, il n'y a pas de partie polynomiale car le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur. On factorise le dénominateur en $x^3-x^2+x = x(x^2-x+1)$. On sait donc que

$$f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}\,.$$

En multipliant tout par x et en prenant $x=0$, on obtient $a=1$. Il suffit ensuite de calculer

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x} - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2-x+1}\,.$$

Et donc

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-x+1}\,.$$

Pour intégrer le deuxième terme, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2-x+1} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} &= \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{\big(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\big)^2+1}\,.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ln|x| + \ln|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\big(x-\frac{1}{2}\big)\right).$$

3 Linéarisation des polynômes trigonométriques

Parmi les familles dont on sait calculer une primitive systématiquement, il y a les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire les combinaisons linéaires de puissances du type $\sin^p(x)\cos^q(x)$. Il y a plusieurs façons de faire. Par exemple les cas $\sin^p(x)\cos x$ se font facilement, on voit qu'une primitive est donnée par $\frac{1}{p+1}\sin^{p+1}(x)$. Si *$q$ est impair*, tout facteur $\sin^p(x)\cos^q(x)$ peut se ramener au cas précédent en utilisant les formules trigonométriques. Par exemple,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)(1-\sin^2(x))\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{4}\sin^4(x) - \frac{1}{6}\sin^6(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

On pensera aussi à utiliser les nombreuses *symétries* des fonctions trigonométriques. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

car l'intégrande est impair par rapport à $\pi/2$ (la transformation $x \mapsto u = \pi - x$ donne $f(u) = -f(x)$, voir les changements de variable plus loin).

Remarque : Si c'est *p qui est impair*, on procède de la même manière, en intervertissant les rôles de sin et cos.

Comment faire dans le cas général ? Il suffit de linéariser le polynôme, c'est-à-dire transformer les produits $\sin^p(x)\cos^q(x)$ en combinaisons linéaires de fonctions $\sin(kx)$ et $\cos(lx)$. Pour ce faire, on utilise soit les formules trigonométriques, soit les formules d'Euler.

Exemple : On veut calculer $\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. On a la formule trigonométrique $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$; donc

$$\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

où on a utilisé que l'intégrale de $\cos(2x)$ sur un nombre entier de périodes est nulle (ici la période est π et l'intervalle de longueur 2π) .

Exemple : On veut calculer $\int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$. La formule d'Euler donne

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-3ix}}{2i}-3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x).
\end{aligned}$$

Au passage, on note que ce calcul ne fait intervenir les *nombres complexes* que pour les calculs intermédiaires : la fonction de départ est réelle et donc le résultat final l'est aussi. C'est l'utilisation initiale des « nombres imaginaires » qui n'avaient qu'une existence formelle en tant que facilitateurs de calculs.

On calcule ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^\pi 3\sin x-\sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left[-3\cos x+\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{3}+3-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3}=\frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Enfin, si on linéarise séparément les puissances $\sin^p(x)$ et $\cos^q(x)$, pour linéariser le produit $\sin^p(x)\cos^q(x)$, on doit encore linéariser les produits de termes du type $\sin(kx)$ et/ou $\cos(lx)$.

On a par exemple

$$\begin{aligned}
\sin(kx)\cos(lx) &= \frac{(e^{ikx}-e^{-ikx}).(e^{ilx}+e^{-ilx})}{4i} \\
&= \frac{1}{4i}\left(\left(e^{i(k+l)x}-e^{-i(k+l)x}\right)+\left(e^{i(k-l)x}-e^{-i(k-l)x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin\big((k+l)x\big)+\frac{1}{2}\sin\big((k-l)x\big).
\end{aligned}$$

On notera qu'il y a des façons de contrôler le calcul de linéarisation de $\sin^p(x)\cos^q(x)$ en combinaison linéaire de termes $\sin(kx)$ et $\cos(lx)$. Comme on peut voir à partir des formules d'Euler :

- le plus grand k ou l correspond à la puissance $p+q$;
- si le terme de départ est impair (cad. si p impair), on n'aura un développement *que sur les* $\sin(kx)$, alors que s'il est pair (cad. si p pair), on n'aura un développement *que sur les* $\cos(lx)$;
- de plus, à cause de l'autre symétrie $x \mapsto \pi - x$ des fonctions sin et cos (ou avec la formule du binôme), les fréquences k ou l sautent de deux en deux.

4 Changement de variable

Quand on intègre une fonction sur un segment, la formule du changement de variable s'énonce simplement.

Proposition 6.3. *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un segment compact, soient $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\varphi([a,b]),\mathbb{C})$, on a*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Démonstration : On note F une primitive de f, alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\varphi'$, donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

□

Cette formule n'est donc qu'une façon de repérer les formes du type $(f\circ\varphi)\varphi'$, dont on trouve une primitive facilement. Mais en pratique le changement se fait sans repérer cette forme. Il s'effectue en plusieurs étapes :

1. poser la nouvelle variable $u = \varphi(x)$.
2. calculer le nouvel élément d'intégration $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, formule cohérente avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$.

3. voir si on peut transformer tout l'intégrande de l'intégrale d'origine en remplaçant x par u, y compris le $\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}u$.

4. changer les bornes par la méthode « quand x valait a, alors u vaut $\varphi(a)$ ».

5. effectuer toutes ces transformations dans l'intégrale.

Exemple : On considère un débit $f(t)$ d'une turbine, en m^3/h, qui dépend du temps t exprimé en heures. Le volume d'eau passée en une heure est $V = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On veut maintenant exprimer le temps en minutes. On pose donc $\tau = 60t$. On a $\mathrm{d}\tau = 60\,\mathrm{d}t$. Puis

$$V = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{60} f\big(\frac{\tau}{60}\big)\frac{\mathrm{d}\tau}{60}\ .$$

On note bien que $\frac{1}{60}f\big(\frac{\tau}{60}\big)$ est le débit minute par minute, en m^3/min.

Le but de cet exemple est de bien mettre en valeur l'importance du terme $\mathrm{d}t$ ou $\mathrm{d}\tau$ qui intervient dans le calcul et donne l'unité d'intégration.

Exemple : Donnons un exemple plus complexe. On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour cela, on va poser $u = e^x$. On a $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$. Le terme e^x n'apparaît pas dans l'intégrande d'origine, nous allons donc le rajouter.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{e^x(1+e^x)}e^x\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

On utilise alors une décomposition en éléments simples :

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = \big[\ln|u| - \ln(|1+u|\big]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln 2\,.$$

Cet exemple illustre une généralité :
Toute fraction rationnelle d'exponentielles de la forme $P(e^x)/Q(e^x)$ peut s'intégrer en posant $u = e^x$ puis en utilisant une décomposition en éléments simples.

Règles de Bioche

Il s'agit de changements de variables classiques, proposés par le français Charles Bioche (1859-1949), qui permettent d'intégrer les fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ en se ramenant à intégrer des fractions rationnelles. Pour nous guider dans le choix du changement de variables, on a les règles suivantes : on regarde le terme à intégrer $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble ;

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas, $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marche, mais est très laborieux.

Exemples :

1. Cherchons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, c'est-à-dire $F\colon x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$. On se place par exemple sur $]0, \pi[$. On voit que $\dfrac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ est invariant par $t \mapsto -t$. On pose donc $u = \cos t$. On a $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et donc
$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int^x \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} &= \int^{\cos x} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-u^2}\\ &= \int^{\cos x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\big[\ln|u-1| - \ln|u+1|\big]^{\cos x}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right|\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

2. Cherchons une primitive de $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$. On n'a aucun invariant intéressant.

   On pose donc $u = \tan(x/2)$. Dans ce cas, il est utile de connaître les formules
$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \ ; \text{ et on a } \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\,.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\int^{X} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int^{\tan(X/2)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= 2\int^{\tan(X/2)} \frac{1}{1+u^2+2u}\,\mathrm{d}u = 2\int^{\tan(X/2)} \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{2}{1+\tan(X/2)}\,.\end{aligned}$$

Finissons ce paragraphe sur un exemple d'*intégration d'un des éléments simples* que nous avons mis de côté. On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Une astuce consiste à poser $\underline{x = \tan t}$, soit $t = \arctan x$. On a $\mathrm{d}x = (1+x^2)\,\mathrm{d}t$ et donc

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

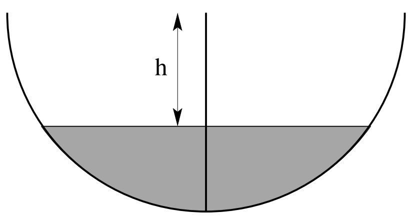
En linéarisant le polynôme trigonométrique comme on l'a vu, on obtient

$$I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,.$$

5 Des exemples concrets

5.1 Aire d'un morceau de disque

On veut créer une jauge dans une cuve cylindrique. Le but est donc de connaître la surface grisée de la figure ci-contre en fonction de la profondeur h. On note R le rayon de la cuve. En utilisant le théorème de Pythagore, on trouve que l'aire vaut



$$A(h) = \int_h^R 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour faire disparaître la racine carrée, une astuce consiste à paramétrer selon l'angle au centre, cad. poser $\underline{x = R\sin\theta}$, soit donc $\theta = \arcsin(x/R)$ et $\mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned}
A(h) &= 2\int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} 1+\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi R^2}{2} - R^2\arcsin\Big(\frac{h}{R}\Big) - \frac{R^2}{2}\sin\Big(2\arcsin\Big(\frac{h}{R}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

On utilise la formule

$$\sin(2\arcsin(a)) = 2\cos(\arcsin a)\sin(\arcsin a)$$

et le fait que, pour tout $a \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin(a)) = a$ et, comme le cosinus est positif sur $[-\pi/2, \pi/2]$,

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin a)} = \sqrt{1-a^2}\,.$$

On obtient que

$$\sin(2\arcsin(a)) = 2a\sqrt{1-a^2}\,.$$

On trouve au final :

$$A(h) = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\arcsin(\frac{h}{R}) - h\sqrt{R^2-h^2}\ .$$

On peut vérifier au passage que le résultat est cohérent quand $h = 0$ ou $h = R$. Notons finalement que ce cas simple peut aussi se faire avec un peu de géométrie élémentaire en découpant le complémentaire de la surface grisée avec un triangle.

5.2 †Réchauffement d'un objet

Un objet est placé dans un milieu dont la température augmente de façon homogène : par exemple un four ou une pièce où l'air est bien brassé. À $t = 0$, on suppose le tout à température nulle (quitte à changer d'échelle de température). La température extérieure sera supposée augmenter de façon constante selon la loi $T_{ext}(t) = \alpha t$. L'objet se réchauffe de façon homogène en suivant la loi de Fourier :

$$T(0) = 0 \qquad T'(t) = \lambda(T_{ext}(t) - T(t))$$

où $\lambda > 0$ est un coefficient dépendant de la géométrie et de la matière de l'objet. On veut connaître $T(t)$. Pour cela, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver que

$$T(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

On peut en effet dériver cette formule et vérifier qu'elle satisfait l'équation différentielle. Calculons $T(t)$.

$$\begin{aligned}
T(t) &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s = \alpha\lambda \int_0^t s e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha \left[s e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t - \alpha \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha t - \alpha \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t \\
&= \alpha t - \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).
\end{aligned}$$

On trouve donc que pour t assez grand, la différence de température entre le milieu extérieur et l'objet reste quasiment constante égal à α/λ.

5.3 †Évolution d'une population animale

Soit $p(t)$ une population animale adulte évoluant au cours du temps. Un modèle simpliste d'évolution de population est celui de Thomas Malthus (1766-1834, Angleterre). Il s'agit de considérer que

$$p'(t) = \alpha p(t) - \beta p(t)$$

où $\alpha > 0$ est le taux de reproduction et $\beta > 0$ le taux de mortalité. On obtient comme solution $p(t) = p(0)e^{(\alpha-\beta)t}$ ce qui donne une croissance exponentielle ou une extinction suivant que $\alpha > \beta$ ou pas. Ce modèle est par exemple raisonnable pour la population humaine durant les dernières décennies. Il n'est par contre pas raisonnable pour une population qui a des contraintes d'environnement. Pour modéliser cela, Pierre-François Verhulst (1804-1849, Belgique) propose de rajouter un terme $-\gamma p(t)^2$ qui est petit pour une population petite mais ajoute de la surmortalité si $p(t)$ devient trop grand. On trouve donc l'équation différentielle

$$p'(t) = \alpha p(t) - \beta p(t) - \gamma p(t)^2\,.$$

On la résoud par séparation des variables. Si $p(t) = 0$ à un moment, alors $p(t) = 0$ pour tout t car $p(t) \equiv 0$ est une solution constante. De même, $p(t) \equiv$

$\frac{\alpha-\beta}{\gamma} =: \kappa > 0$ est une autre solution constante. Supposons que $p(t)$ est différent de ces deux valeurs, on peut alors écrire

$$\frac{p'(t)}{(\alpha-\beta)p(t) - \gamma p(t)^2} = 1\,. \tag{6.1}$$

Pour intégrer cette équation, il nous faut une primitive de

$$f(p) = \frac{1}{(\alpha-\beta)p - \gamma p^2} = \frac{1}{\gamma p(\kappa - p)}\,.$$

On utilise la décomposition en éléments simples

$$f(p) = \frac{1}{\gamma p(\kappa - p)} = \frac{A}{p} + \frac{b}{\kappa - p}\,.$$

Par notre méthode préférée, on obtient au final que

$$f(p) = \frac{1}{\gamma p(\kappa - p)} = \frac{1}{\gamma\kappa}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\kappa - p}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\kappa - p}\right).$$

D'où

$$\int^p f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\ln|p| - \ln|\kappa - p|\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{p}{|\kappa - p|}\right).$$

En revenant à (6.1), on obtient donc que

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{p(t)}{|\kappa - p(t)|}\right) = t + \mathrm{cte}$$

et donc que

$$\frac{p(t)}{|\kappa - p(t)|} = Ce^{(\alpha-\beta)t}\,.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation. Par exemple si $p(0) \in]0,\kappa[$, alors $p(t)$ reste dans cet intervalle et

$$p(t) = Ce^{(\alpha-\beta)t}(\kappa - p(t)), \qquad \text{avec } \; C = \frac{p(0)}{\kappa - p(0)},$$

ce qui implique que

$$p(t) = \kappa\frac{Ce^{(\alpha-\beta)t}}{1 + Ce^{(\alpha-\beta)t}} = \kappa\frac{C}{C + e^{-(\alpha-\beta)t}}$$

et donc, en remplaçant C par son expression,

$$p(t) = \frac{\kappa p(0)}{p(0) + (\kappa - p(0))e^{-(\alpha-\beta)t}}\,.$$

Il se trouve que l'expression est la même si $p(0) > \kappa$, mais aussi si $p(0) = 0$ ou $p(0) = \kappa$. À part pour $p(0) = 0$, la population converge vers l'équilibre κ avec une vitesse en $e^{-(\alpha-\beta)t}$ (en effet $|\kappa - p(t)| = \frac{p(t)}{C}e^{-(\alpha-\beta)t}$).

Chapitre 7 : Intégrales généralisées

1 Introduction

Nous avons pour le moment considéré l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ compact. Or il existe des situations faisant intervenir des intégrales sur des intervalles non compacts ou bien des fonctions ayant une limite infinie en un point de $[a, b]$, comme par exemple

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\ \ldots$$

On parlera d'*intégrale généralisée* ou bien d'*intégrale impropre.*

Définition 7.1. *Soient $a < b$ des bornes dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, resp. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Soit $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$). On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est* continue par morceaux *sur I si f est continue en tout point de I sauf un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et à droite (donc pas de condition en b, resp. en a, resp. en a et b).*

Définition 7.2. *Soient $a < b$ des bornes dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$). On dit que f est* intégrable sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) *si la limite*

$$\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\textit{resp. } \lim_{X \to a} \int_X^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

existe et est finie. On dit aussi que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente *et on note cette limite*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si l'intégrale n'est pas convergente, on dira qu'elle est divergente. *Ce statut est appelé* nature *de l'intégrale.*

Avec cette définition on a tout de suite :

Proposition 7.3. *Soient $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction continue sur $[a, b[\subset \mathbb{R}$ qui admet F comme primitive. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie en b et alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to b} F(X) - F(a) := \big[F(x)\big]_a^b$$

où le dernier terme est une notation par convention*.*

Le cas de l'intervalle $]a, b] \subset \mathbb{R}$ est symétrique.

On notera que ces définitions sont cohérentes : si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ compact, alors on a vu que $t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ y est continue, donc f est intégrable sur $[a, b]$, *et aussi* sur $[a, b[$ et $]a, b]$.

On peut étendre ce principe à une situation avec plusieurs problèmes.

Définition 7.4. *Soient $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient*

$$a = x_0 \,<\, x_1 \,<\, x_2 \,<\, \ldots \,<\, x_p = b\,.$$

Soit f une fonction qui est continue par morceaux sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. On dit que f est intégrable sur *$]a, b[$ si f est intégrable au sens généralisé sur chacun des intervalles $]x_i, m_i]$ et $[m_i, x_{i+1}[$ avec $m_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i < p$. On notera alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la somme des $2p$ intégrales généralisées obtenues, conformément à la relation de Chasles.*

⚠ Comme pour l'étude des séries, il ne faut pas confondre l'objet *intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui pourra avoir le statut de la convergence ou de la divergence et le *nombre* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui n'existe que si l'intégrale converge. Le problème est que la notation est la même cette fois–ci et c'est donc le contexte qui décide.

Notons aussi que *les points m_i* introduits dans la définition précédente pourront être *choisis arbitrairement*, chacun dans son intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Quand on demande la nature d'une intégrale comme

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x - 1} \ln x\,\mathrm{d}x,$$

il faut commencer par repérer chacun des problèmes : borne(s) infinie(s), ainsi que tout endroit où la fonction n'est pas continue par morceaux (typiquement explosion vers $\pm\infty$). Pour l'intégrale I, il y a trois soucis : 0 (explosion du log), 1 (division par 0) et $+\infty$ (borne infinie).

Puis on étudie la convergence en chacun des points qui pose problème. Si on trouve le moindre cas de divergence en un de ces points, on s'arrête, car alors l'intégrale est divergente. Si l'intégrale converge en tous ces points, alors on conclut que l'intégrale est convergente.

Exemples :

1. On voudrait considérer $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie car $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On calcule donc

$$\int_0^X e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^X = 1 - e^{-X}$$

dont la limite quand $X \to +\infty$ existe et est finie. Ainsi l'intégrale généralisée $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Cet exemple montre que l'aire sous le graphe de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ considérée sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est finie, même si la surface n'est pas bornée.

2. On voudrait considérer $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1]$, le seul souci est en $x = 0$. Si $0 < X < 1$ on a

$$\int_X^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_X^1 = -\ln X\,.$$

Quand $X \to 0$, la limite explose vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc divergente. On peut parfois faire l'abus de notation $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ dans ce cas et parler d'aire sous le graphe infinie.

3. On voudrait considérer $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie. On a

$$\int_0^X \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\sin x\right]_0^X = \sin X$$

qui n'a pas de limite quand $X \to +\infty$. Donc non seulement $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ est divergente, mais on ne peut même pas parler d'aire infinie ou autre. Dans ce cas, $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ n'a aucun sens possible.

2 Exemples et propriétés fondamentales

On va procéder pour les intégrales impropres comme pour les séries : on disposera d'une liste de cas-types pour lesquels la nature de l'intégrale est connue, et on traitera nombre d'autres cas en s'y référant par comparaison.

2.1 Exponentielles

Les fonctions $x \longmapsto e^{\lambda x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La seule façon d'obtenir une intégrale impropre pour ces fonctions est quand une des bornes est infinie.

Proposition 7.5. *Soit* $\lambda > 0$. *L'intégrale impropre* $\int_0^\infty e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ *est divergente ; et l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ *est convergente.*

Démonstration : Il suffit de voir qu'une primitive de $e^{\lambda x}$ est $e^{\lambda x}/\lambda$. Donc

$$\int_a^b e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\right).$$

Si $b \to +\infty$, alors $e^{\lambda b}$ tend vers $+\infty$ et l'intégrale diverge vers $+\infty$. Si $a \to -\infty$, alors $e^{\lambda a}$ tend vers 0 et l'intégrale converge vers $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda b}$ ($b = 0$ par exemple). $\square$

Bien entendu, on fera attention au *signe de* λ. Par la symétrie $x \mapsto -x$, on obtient :

Proposition 7.6. *Soit* $\lambda > 0$. *L'intégrale impropre* $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ *est convergente ; et l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ *est divergente.*

Pour résumer, si on intègre une exponentielle, le seul souci est en $\pm\infty$. Soit c'est le côté où l'exponentielle diverge et alors l'intégrale diverge évidemment, soit c'est le côté où l'exponentielle tend vers 0 et tout va bien. Notons aussi qu'une intégrale du type $\int_{-\infty}^\infty e^x\,\mathrm{d}x$ est forcément divergente puisqu'elle fait intervenir les deux bornes infinies.

2.2 Puissances

On veut intégrer une fonction du type $P(x)/Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes. On peut rencontrer deux types de problèmes : une borne de l'intégrale est infinie ou bien la fonction n'est pas définie en un point x_0 car $Q(x_0) = 0$. Les comprendre nous ramène, modulo translation et des théorèmes de comparaison (vus plus loin) à étudier les comportements types des cas suivants :

Proposition 7.7. *Soit $\alpha > 0$. L'intégrale impropre*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : Une primitive de $\dfrac{1}{X^\alpha}$ est, si $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{X^{\alpha-1}}\right)$, et si $\alpha = 1$, $\ln X$. Il s'agit de voir si elle a une limite finie quand $X \to +\infty$. C'est le cas si et seulement si $\alpha > 1$. $\square$

Bien sûr la valeur ($a = 1$ ici) de la borne inférieure n'a pas d'importance. On pourra juste parler d'*intégrabilité ou non près de* $+\infty$.

Proposition 7.8. *Soit $\alpha > 0$. L'intégrale impropre*

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration : On a écrit une primitive de $\dfrac{1}{X^\alpha}$ dans la preuve précédente. On étudie cette fois si elle a une limite finie quand X tend vers 0^+. C'est le cas si et seulement si $\alpha < 1$. $\square$

En résumé : $x \mapsto 1/x$ est chaque fois *le cas critique* et n'est pas intégrable. Pour voir le comportement des autres puissances, on compare avec celui de $1/x$. Par exemple, en $+\infty$, $1/x^2$ converge vers 0 plus vite que $1/x$, il donne une fonction intégrable près de $+\infty$. À l'inverse, il tend plus vite vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+, ainsi $x \mapsto 1/x^2$ n'est pas intégrable près de 0.

Pour les puissances, c'est l'intégrabilité *près de* $+\infty$ qui donne la même convergence que pour les séries de Riemann, par le théorème de comparaison série/intégrale. Bien se rappeler que le problème de l'intégrabilité près de 0 donne une réponse quasiment *inverse*.

Par translation ou symétrie, on obtient la nature de l'intégrale des fonctions puissances dans les autres cas. Par exemple :

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est convergente,}\\
\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente,}\\
\int_{\mathbf{1}}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est convergente,}\\
\int_{1}^{\mathbf{2}} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente,}\\
\int_{0}^{\mathbf{3}} \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &\qquad \text{est divergente.}
\end{aligned}
$$

2.3 Le log

Dans le cas du log, comme il tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on s'attend à avoir une aire infinie sous la courbe. Du côté de 0, il faut voir qu'il tend vers $+\infty$ moins vite que tout puissance de x et est donc logiquement intégrable (nous allons voir ce genre de théorème bientôt).

Proposition 7.9.

$$
\begin{aligned}
\textit{L'intégrale} \quad \int_{1}^{\infty} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est divergente.}\\
\textit{L'intégrale} \quad \int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est convergente.}
\end{aligned}
$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser qu'une primitive du log est $x\ln x - x$. Quand b tend vers $+\infty$, $b\ln(b) - b = b(\ln b - 1)$ tend vers $+\infty$. Quand a tend vers 0, le terme $a\ln(a)$ tend aussi vers 0 (un polynôme l'emporte sur le log), d'où la convergence. □

2.4 Propriétés élémentaires

La linéarité de l'intégrale et de la limite permettent de généraliser les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann aux intégrales impropres. Voici des exemples d'énoncés (qu'on pourra transposer de façon évidente aux autres cas).

Proposition 7.10. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ soient convergentes et soient λ et μ deux complexes. Alors $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x$ est aussi convergente et*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration : Il suffit de voir que

$$\lim_{X\to b} \int_a^X \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \lim_{X\to b} \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \lim_{X\to b} \int_a^X g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

De façon classique on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 7.11. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente. Alors $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.*

Démonstration : Si l'intégrale de $f + g$ était convergente, alors celle de $g = (f + g) - f$ le serait aussi d'après le résultat précédent. □

La définition de la convergence des intégrales impropres ayant plusieurs singularités donne directement que la relation de Chasles se généralise :

Proposition 7.12. *Soient $a < b < c$ trois bornes de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit f une fonction telle que les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent. Alors l'intégrale $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi et*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Idem pour la monotonie de l'intégrale :

Proposition 7.13. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ soient convergentes. Si $f \geq g$ sur $[a, b[$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Démonstration : On écrit d'abord la monotonie des intégrales de Riemann entre a et $X < b$ puis on fait $X \to b$. □

Notons aussi que par définition de la limite dans les complexes et de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, on a :

Proposition 7.14. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$, à valeurs complexes. La fonction f est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont. On a alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3 Fonctions localement de signe constant

Dans cette partie, nous allons voir des théorèmes nous permettant de nous ramener aux exemples fondamentaux par des comparaisons. Exactement comme pour les séries, ces théorèmes ne pourront être appliqués que pour les fonctions *positives* (ou négatives) *près de la zone posant problème.* Nous allons écrire les résultats pour le cas de fonctions localement positives et pour une borne posant problème à droite. Par symétrie, les résultats seront encore valables dans le cas de fonctions localement négatives ou bien si on considère la borne de gauche.

⚠ Redisons–le : comme pour les séries, il faudra toujours penser à *justifier que le signe est constant* avant d'appliquer les résultats suivants.

Proposition 7.15. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et telle qu'il existe $m \in [a, b[$ tel que*

$$f(x) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Alors, soit l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente,
soit $\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X \to b^-]{} +\infty$.

Démonstration : Notons que la fonction $X \mapsto I(X) = \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante sur $[m, b[$ car on ne fait que rajouter de l'aire positive. Soit $(X_n)_n$ une suite croissante dans $[m, b[$ qui tend vers b. La suite $(I(X_n))_n$ est alors croissante.

- Supposons que $(I(X_n))_n$ est majorée, alors elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $I(X_n) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Pour tout $X \in [X_{n_0}, b[$, on prend $n_1 \geq n_0$ tel que $X_{n_1} \geq X$ et par croissance de $X \mapsto I(X)$, on a $I(X_{n_0}) \leq I(X) \leq I(X_{n_1})$ et donc $I(X) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Cela montre que $I(X)$ tend vers ℓ quand X tend vers b_- et donc que l'intégrale converge.

- Supposons que $(I(X_n))_n$ n'est pas majorée. Pour tout $M > 0$, il existe n_0 tel que $I(X_{n_0}) \geq M$. Par croissance de I, on a donc que pour tout $X \in [X_{n_0}, b[$, $I(X) \geq M$. Cela montre que $I(X)$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers b^-.

$\square$

Proposition 7.16. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $m \in [a, b[$ tel que*

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \qquad \textit{pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

Démonstration : Il s'agit de discuter la nature des intégrales impropres de f et g près de b, pour cela on peut remplacer la borne a par m. Pour tout $X \in [m, b[$, les intégrales de f et g sur $[m, X]$ sont bien définies et

$$\forall X \in [m, b[\;, \quad \int_m^X g(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_m^X f(x)\,\mathrm{d}x$$

(monotonie de l'intégrale de Riemann). Supposons que l'intégrale $\int_m^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit divergente. D'après la proposition précédente, comme f est positive sur $[m, b[$, on doit avoir

$$\lim_{X \to b} \int_m^X f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; +\infty\,.$$

Mais alors par comparaison, $\lim_{X \to b} \int_m^X g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi vers $+\infty$.

L'autre assertion est la contraposée de celle que l'on vient de démontrer. $\square$

Proposition 7.17. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $m \in [a, b[$ tel que*

$$g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \geq 0 \qquad \text{pour tout } x \in [m, b[\,.$$

Supposons que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ont même nature.

Supposons que $f(x) = o(g(x))$ ou que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \to b^-$. Alors si l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi et si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

Démonstration : La stratégie est la même que pour les séries. Il suffit de montrer que l'équivalence, ou le petit ou grand o implique un encadrement, et ensuite d'appliquer le principe de comparaison précédent. Par exemple, si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b^-$, alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [b-\delta, b[$, $\frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$. □

Exemples :

1. On considère
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$
La fonction $f\colon x \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc les seuls soucis sont en $\pm\infty$.
On a $\dfrac{1}{1+x^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$ quand $x \to \pm\infty$. Or $1/(1+x^2)$ est positif et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable en $\pm\infty$ car $2 > 1$. On trouve que f est intégrable en $\pm\infty$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

   Par ailleurs, on connaît en fait les primitives de f, on obtient que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \arctan X - \lim_{X\to-\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi\,.$$

2. On considère l'intégrale
$$\int_0^3 \frac{x^2-2x+5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$
Comme $x^2-1=(x+1)(x-1)$, la fonction à intégrer est continue sur $[0,1[\cup]1,3]$ et le seul problème est en $x=1$. En $x=1$, on a
$$\frac{x^2-2x+5}{x^2-1}\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1^2-2+5}{1+1}\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}\,.$$
Pour $x>1$ proche de 1, les fonctions sont positives (car $2/(x-1)$ est positive).
La fonction $x\mapsto 1/(x-1)$ n'est pas intégrable près de 1^+ car elle diverge comme une puissance -1.
Donc, $\int_0^3 \frac{x^2-2x+5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est divergente et n'a pas de sens en tant que nombre.
Notons qu'on n'a pas besoin de regarder le problème en 1^- car une seule divergence suffit à conclure.

3. On considère
$$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$
La fonction $f\colon x\mapsto xe^{-x}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$. Le seul problème est donc la borne infinie. On remarque que $xe^{-x}=o(e^{-x/2})$ quand $x\to+\infty$ car $x=o(e^{x/2})$. Or $x\mapsto e^{-x/2}$ est intégrable et positive près de $+\infty$, donc f est aussi intégrable en $+\infty$ et $\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente. On peut obtenir sa valeur par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{X\to+\infty}\int_0^X xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{X\to+\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^X+\int_0^X e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}+\left[-e^{-x}\right]_0^X\right)\\ &= \lim_{X\to+\infty}(1-e^{-X})=1.\end{aligned}$$
Notons la démarche : on ne calcule pas avec la borne infinie, pour éviter les problèmes. On fait plutôt les *calculs avec une borne finie*, puis on *passe à la limite* en vérifiant que cela est possible.

4 Fonctions quelconques

4.1 Convergence absolue

Comme pour les séries, la convergence absolue entraîne la convergence.

Proposition 7.18. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ telle que l'intégrale impropre $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ soit convergente. Alors $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ est aussi convergente et*

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Démonstration : Montrons déjà la convergence. Supposons que f soit réelle. On pose alors $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. On a $f^\pm \geq 0$ et $f = f^+ - f^-$. C'est pour cela qu'on appelle $f^\pm$ les parties positive et négative de f. Par ailleurs, $|f| = f^+ + f^-$ et donc $|f| \geq f^\pm \geq 0$. D'après les résultats plus hauts, comme on a des fonctions positives continues par morceaux, les intégrales $\int_a^b f^\pm(x) \, \mathrm{d}x$ sont donc convergentes. Par linéarité la fonction $f = f^+ - f^-$ a aussi son intégrale sur $[a, b[$ convergente.

Si f est à valeurs complexes, on la décompose en parties réelle et imaginaire, ainsi

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^- \, .$$

La minoration $|f| \geq \max(|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f|)$ assure par comparaison que les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont absolument convergentes. Comme ci–dessus, les intégrales impropres des quatre fonctions qui décomposent f sont alors convergentes, et par linéarité celle de f l'est aussi.

Enfin pour montrer l'inégalité, on commence par l'écrire entre a et $X < b$ (intégrales de Riemann), puis on fait tendre X vers b. $\square$

Comme pour les séries, dans le cas général, on distinguera *trois natures* possibles pour une intégrale généralisée :

1. L'intégrale $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ est divergente.
2. L'intégrale $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ est convergente mais $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ ne l'est pas. On parle alors de *semi–convergence*.
3. L'intégrale $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ est convergente, et donc aussi $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$. On parle de *convergence en valeur absolue*, ou *en module* pour les fonctions complexes.

Quand une fonction n'est pas localement de signe constant près de l'endroit où il y a un problème, il faut donc distinguer les deux convergences différentes. Comme pour les séries, certaines manipulations ne sont pas a priori autorisées si l'intégrale n'est que semi–convergente.

Dans certains cas, la convergence se prouve de façon élémentaire :

Proposition 7.19. *Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ qui est bornée sur $]a, b[$, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.*

Démonstration : La constante M est intégrable sur $]a, b[$. Par comparaison, comme $|f|$ est positive, on a que $|f|$ est aussi intégrable sur $]a, b[$. La proposition précédente montre que f aussi est intégrable. □

Exemple : La fonction $x \mapsto \cos(1/x)$ est continue bornée et donc intégrable sur $]0, 1]$. Notons que cette fonction ne peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$, car $\cos(1/x)$ n'a pas de limite à droite en 0^+.

Cette proposition montre que les problèmes de convergence des intégrales généralisées sont de deux types : soit une des bornes est infinie, soit la fonction explose près d'une borne finie. Même si la fonction a un comportement étrange près d'une borne finie, si elle reste bornée, elle y est intégrable.

4.2 Utilisation de l'IPP

Pour les séries de signe quelconque, nous avons détaillé certaines techniques comme le critère des séries alternées ou la transformation d'Abel. Nous avons vu que la transformation d'Abel est une sorte d'intégration par parties discrète. Dans le cas des intégrales, cette intégration par parties peut se faire plus simplement. Plutôt qu'énoncer un théorème général, nous allons voir des exemples pour comprendre le procédé.

Exemples :

- Considérons le *sinus cardinal*

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

qui joue un rôle important en traitement du signal et dans les transformations de Fourier. On souhaite savoir si

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$$

est convergente. Il y a deux problèmes : la borne infinie et la division par 0.
Commençons par voir que 0 n'est pas en fait un problème. En effet, $\sin x \sim x$ en 0 et donc le sinus cardinal est prolongeable par continuité en 0 en posant $\operatorname{sinc} 0 = 1$. La fonction est a fortiori intégrable en 0 (par exemple en disant qu'elle y est bornée).

Pour étudier la convergence en $+\infty$, on fait une intégration par parties. Par prudence, il convient de bien faire les calculs avec une borne *finie* pour laquelle on sait que tout est défini.

$$\begin{aligned}
\int_1^X \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x &= \int_1^X \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^X - \int_1^X \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

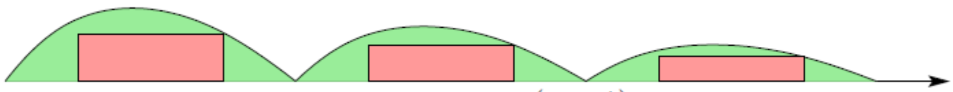
Quand $X \to +\infty$, le terme $\frac{\cos X}{X}$ tend vers 0. Par ailleurs, $|\cos x/x^2| \leq 1/x^2$ qui est intégrable en $+\infty$. Comme on compare des fonctions positives, on en déduit que $x \mapsto |\cos x/x^2|$ est intégrable en $+\infty$ et donc que $x \mapsto \cos x/x^2$ l'est aussi. Du coup, $\int_1^X \frac{1}{x^2} \cos x \,\mathrm{d}x$ a une limite finie quand X tend vers $+\infty$. Le membre de droite ayant une limite finie, il en est de même pour l'intégrale de gauche. Cela revient à dire que $\int_1^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x$ est convergente. En recollant les deux morceaux, on a montré que

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x \quad \textit{est convergente.}$$

On peut maintenant se poser la question de la convergence absolue. On va montrer que $\int_0^\infty |\operatorname{sinc} x| \,\mathrm{d}x$ *diverge* en minorant l'intégrale par une intégrale divergente.
Pour tout $x \in [n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4]$, on a $x \leq (n+1)\pi$ et $|\sin x| \geq \sin\big(\frac{\pi}{4}\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient donc que

$$\forall x \in [n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4] \ , \quad |\operatorname{sinc} x| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi(n+1)} \,,$$

ce qui se traduit graphiquement comme ci-dessous.



Si on fait la somme sur n des aires des rectangles, on obtient la série $\left(\sum_n \frac{1}{2\sqrt{2}(n+1)}\right)$ qui est divergente. Donc l'aire sous la courbe de la fonction $|\operatorname{sinc}|$ est aussi infinie.

On conclut que

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \,\mathrm{d}x \quad \textit{est semi–convergente.}$$

- Considérons maintenant l'intégrale $\int_1^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. On effectue le même genre de calcul :

$$\begin{aligned}\int_1^X \cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_1^X \frac{x\cos(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin(x^2)}{2\cdot x}\right]_1^X + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{1}{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin(X^2)}{2X} - \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{1}{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Quand $X \to +\infty$, le terme $\frac{\sin(X^2)}{2X}$ tend vers 0. Par ailleurs, $|\sin(x^2)/x^2| \leq 1/x^2$, donc comme $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors $x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ y est absolument intégrable et $\int_1^X \frac{1}{x^2}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ a une limite quand X tend vers $+\infty$.
C'est donc aussi le cas pour le membre de gauche de l'égalité, autrement dit notre intégrale impropre est convergente.

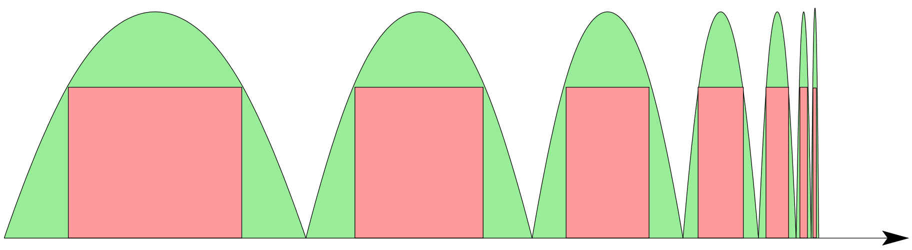
†Montrons maintenant que l'intégrale en valeur absolue $\int_1^\infty |\cos(x^2)|\,\mathrm{d}x$ *diverge.*

La fonction $f\colon x \mapsto |\cos(x^2)|$ atteint son maximum aux points $\sqrt{k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Par ailleurs, elle est minorée par $1/\sqrt{2}$ sur les intervalles $I_k =$

$\left[\sqrt{-\pi/4+k\pi}, \sqrt{\pi/4+k\pi}\,\right]$ qui ont pour longueur

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{k\pi - \frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{k\pi}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4k}} - \sqrt{1-\frac{1}{4k}}\right) \\ &= \sqrt{k\pi}\left(1+\frac{1}{8k} - 1 + \frac{1}{8k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{k}} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^{3/2}}) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{\sqrt{k}}\,. \end{aligned}$$

Comme par comparaison à Riemann la série $(\sum u_k)$ diverge , on en déduit que la somme des longueurs des I_k diverge vers $+\infty$. On a donc mis sous la courbe de f une infinité de rectangles dont la somme des aires tend vers $+\infty$. Cela montre que $\int_1^\infty |\cos(x^2)|\,\mathrm{d}x$ est divergente.



5 Compléments

5.1 À propos de la limite de f

Le cas où on intègre sur un intervalle non borné une fonction qui a une limite non nulle est assez clair.

Proposition 7.20. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe, finie ou infinie, et est* non nulle, *alors $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.*

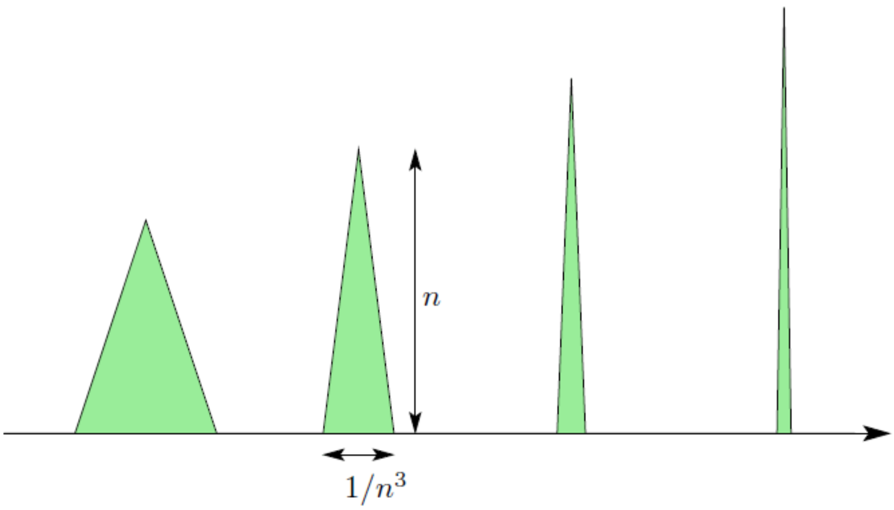
Démonstration : Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que la limite l est strictement positive ou égale à $+\infty$. On pose $\varepsilon = \min(l/2, 1) > 0$. Il existe alors $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$ on ait $f(x) \geq \varepsilon > 0$. Comme la constante ε n'est pas intégrable sur un intervalle non borné, l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ est divergente également. $\square$

Exemple : La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

⚠ Contrairement aux séries, il n'est pas nécessaire que f tende vers 0 en $+\infty$ pour que $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. En fait, il n'est pas nécessaire non plus que f soit bornée, ni même qu'elle s'approche à un moment de 0 !

Voici deux contre–exemples frappants.

1. Nous construisons d'abord une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$ qui n'est pas bornée (et donc ne tend pas vers 0 en $+\infty$), mais qui a pourtant une intégrale convergente !
   Pour cela, nous mettons sur chaque entier n un triangle (fonction parfois appelée « tente ») qui a pour largeur $1/n^3$ et pour hauteur n.



   Les aires sous la courbe se calculent facilement avec la formule de l'aire du triangle. On trouve que

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} n \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

On a bien une intégrale convergente alors que la fonction n'est même pas bornée.

2. On pourrait croire que, pour avoir une intégrale sur $[0, +\infty[$ convergente, la fonction se doit quand même de passer régulièrement *proche de zéro*. C'est vrai pour les fonctions réelles positives, mais pas pour les fonctions quelconques.
   Prenons la fonction $f\colon x \mapsto e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\sin(x^2)$. $f(x)$ reste toujours à distance 1 de 0. Mais pourtant on a déjà montré que l'intégrale $\int_1^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ converge. Donc c'est aussi le cas pour $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. Et on peut montrer de même que l'intégrale de la partie imaginaire de f converge. On obtient alors que
   $$\int_0^\infty e^{ix^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge mais } |e^{ix^2}| = 1 \ \ \forall x \geq 0 \ .$$
   La convergence vient ici d'une oscillation de plus en plus rapide. Comme l'intégrale voit surtout des moyennes et que la moyenne de l'oscillation est 0, ces oscillations de plus en plus rapides jouent un rôle équivalent, du point de vue de l'intégrale, à une décroissance vers 0 .

5.2 Discussion autour des IPP

Pour les séries, on a vu qu'il fallait se méfier de certaines transformations a priori anodines avec des sommes infinies. La bonne méthode pour être sûr de ne pas faire d'erreurs est de considérer d'abord les sommes partielles, faire les manipulations dessus, puis passer à la limite.

Il en est de même avec les intégrales généralisées. Une intégrale impropre, même convergente, doit être vue comme une limite. *On ne fera les calculs (intégration par parties, changement de variables, etc.) que sur une intégrale standard sur un intervalle compact* (par exemple $[a, X]$), *et on passera à la limite partout ensuite* (par exemple $X \to +\infty$).

Voyons un exemple des problèmes que l'on pourrait rencontrer. On considère $\int_0^1 \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$. On a vu que cette intégrale est convergente. Faisons l'intégration par parties formelle
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \,.$$
Ce calcul ne va pas, car $(\cos x)/x$ n'est pas défini en 0 et l'intégrale de droite est divergente en 0. Essayons de façon plus rigoureuse : soit $X > 0$,
$$\int_X^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_X^1 - \int_X^1 \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \,.$$

Ce calcul est correct, mais on voit qu'on va toujours avoir un souci quand $X \to 0$. Pour corriger cela, une idée est de changer la primitive du sinus que l'on considère. Ainsi,

$$\int_X^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x - 1}{x}\right]_X^1 - \int_X^1 \frac{\cos x - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Comme $\cos x - 1 \sim -x^2/2$ près de 0, on obtient que chaque terme a maintenant une limite quand $X \to 0$. En passant à la limite, il vient que

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \cos 1 + \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

où chaque terme est bien défini ; on a donc maintenant un calcul correct.

5.3 Des exemples concrets

La Gaussienne $g\colon x \longmapsto e^{-x^2}$ est une fonction importante en probabilités et statistiques, en particulier à cause du théorème central limite. On ne peut pas écrire une primitive de la Gaussienne avec les fonctions usuelles, mais on a

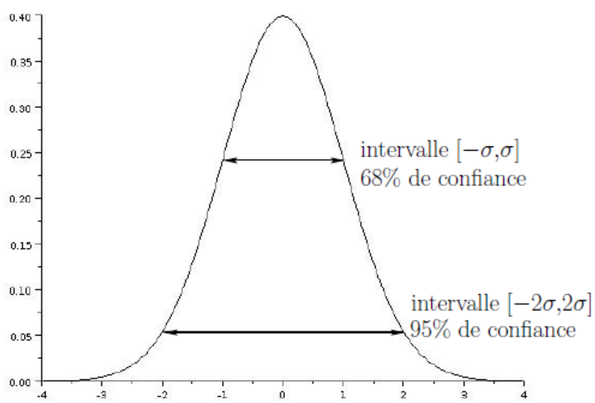
$$\frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = e^{-x^2+|x|} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\,.$$

Donc g est une fonction positive et négligeable devant $x \mapsto e^{-|x|}$, fonction intégrable en $\pm\infty$. On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{\pi}\,.$$

La *loi normale centrée d'écart-type* $\sigma > 0$ est donnée par la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,.$$



On justifie son intégrabilité sur $\mathbb{R}$ comme ci–dessus. Calculons la valeur de l'intégrale. Soit $X > 0$, on a

$$\int_{-X}^{X} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-X/(\sqrt{2}\sigma)}^{X/(\sqrt{2}\sigma)} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

par le changement de variable $y = x/(\sqrt{2}\sigma)$. En faisant tendre X vers $+\infty$, comme toutes les intégrales convergent, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1,$$

ce qui montre qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.

Calculons maintenant l'écart–type de T variable aléatoire de densité f. C'est la racine carrée de

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

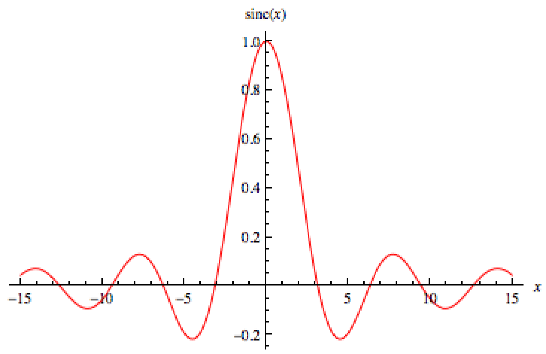
car la moyenne de la variable x selon la densité f est nulle puisque f est paire, cad. $E(T) = 0$. On note d'abord que l'intégrale $E(T^2)$ converge, car $x^2e^{-x^2}$ est aussi négligeable devant $e^{-|x|}$. Faisons alors une intégration par parties. Soit $X > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{X} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-X}^{X} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_{-X}^{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-X}^{X} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Quand $X \to \pm\infty$, on a $Xe^{-\frac{X^2}{2\sigma^2}} \to 0$ et donc le premier terme tend vers 0. Il reste

$$E(T^2) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2,$$

où on a utilisé le calcul plus haut. On trouve bien que σ est l'écart–type de notre variable gaussienne T.



†Le *sinus cardinal* et son intégrale sont importants par exemple en théorie du signal. Il s'agit en effet de la transformée de Fourier d'un créneau et donc d'un filtre « passe-bas ». On retrouve aussi cette fonction dans certaines démonstrations mathématiques. On pourra retenir que

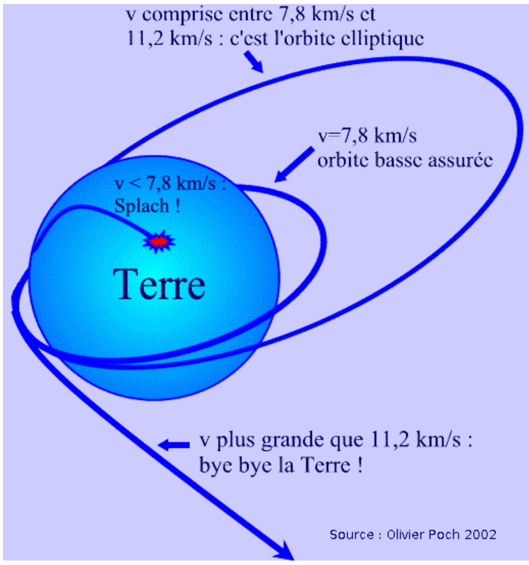
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

---

†Calculons le travail W nécessaire pour envoyer un objet à distance infinie de la Terre. À partir de la surface de la Terre, le travail nécessaire à l'éloignement de l'objet décroît comme k/r^2 où r est la distance au centre de la Terre. Donc on doit calculer

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \frac{k}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

où $r_0 \approx 6\,378\,100\,\mathrm{m}$ est le rayon de la Terre. Il s'agit d'une intégrale impropre convergente, et on a $W = k/r_0$. Comme l'accélération de la pesanteur est d'environ $9,81\,\mathrm{m/s^2}$ en $r = r_0$, on a $k/r_0^2 \approx 9,81 \cdot m$ où m est la masse de l'objet et donc $W = k/r_0 \approx 6,26 \times 10^7 \cdot m$.



L'énergie cinétique nécessaire vérifie ainsi $E = \frac{1}{2}mv^2 = 6,26 \times 10^7 \cdot m$, où v est la vitesse d'envoi de l'objet. La vitesse v de libération de l'attraction terrestre est donc

$$v \;=\; \sqrt{2E/m} \;\approx\; 11\,200\,\mathrm{m/s} \;\approx\; 40\,000\,\mathrm{km/h}.$$

* * * *