UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Cours MAT302

Partie I : Séries

Odile Garotta

sur la base du polycopié de Romain Joly,

septembre 2021

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

1.1 Le paradoxe de Zénon d'Élée

Dans le paradoxe de Zénon d'Élée (V^e avant JC), un caillou est lancé sur un arbre et parcourt la moitié de la distance, puis la moitié de la moitié restante, puis la moitié de ce qui reste... Il semble ainsi ne jamais arriver à destination car il lui faut franchir une infinité d'étapes et chacune lui demande un temps non nul.

Essayons de résoudre ce paradoxe. Mettons que pour parcourir la distance d, il faut un temps t. Pour parcourir la moitié de la distance, il faut un temps $t/2$. Pour parcourir la moitié restante, il faudra un temps $t/4$ et il restera $d/4$ à parcourir. Puis pour parcourir la moitié de la distance restante, il faudra un temps $t/8$ et il restera $d/8$ à parcourir... Donc à l'étape n, il restera certes encore $d/2^n$ de distance qu'il faudra $t/2^n$ à franchir, mais on n'a attendu que

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots + \frac{t}{2^n} = t - \frac{t}{2^n}$$

et donc c'est normal que le caillou n'ait pas encore atteint l'arbre. Au passage, il semble que l'on puisse écrire carrément, pour $t = 1$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1 \tag{1.1}$$

avec une somme infinie. Le paradoxe vient du fait que cette somme, bien qu'infinie, ait une *valeur* finie. Même s'il y a une infinité d'étapes, on n'a pas encore passé plus qu'un temps 1 à observer la scène. Mais ici, nous n'avons pas été très rigoureux en écrivant (1.1) : quel sens donner à ces « ... » et à une valeur pour cette somme infinie ?

1.2 La série harmonique

Piles de dominos, extraites du site « How round is your circle » par John Bryant et Chris Sangwin.

Dans l'exemple précédent, nous additionnons une infinité de termes, mais ceux-ci sont de plus en plus petits et tendent vers 0. Est-ce que cela suffit à faire que la somme soit finie ? Regardons maintenant une pile de dominos (de longueur disons 2 unités) que nous penchons pour la faire avancer le plus possible. Le domino le plus haut, afin de ne pas tomber, ne doit pas être avancé de plus de 1. Si nous avançons de 1 le domino en-dessous, les deux dominos basculeront. En fait, si on l'avance de d, l'isobarycentre des deux dominos doit être au-dessus de la pile, ce qui s'écrit

$$(2-d)+(2-d-1) \;\geq\; d+(d+1)\ .$$

Autrement dit il faut que $d \leq 1/2$. Puis un calcul similaire, montre que le troisième domino ne peut pas être avancé de plus de $1/3$ et par récurrence, le $n-$ième ne peut pas être avancé de plus de $1/n$.

Jusqu'où peut-on aller, c'est-à-dire que peut-on atteindre avec

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\ ?$$

En fait, la réponse est qu'on peut aller jusqu'à aussi loin de l'on veut ! En effet, prenons $n = 2^p$, on regroupe les termes par paquets

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n} = {} & 1+\frac{1}{2}\\ & +\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\ & +\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\\ & +\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\\ & +\ldots+\frac{1}{2^p}\ .\end{aligned}$$

Pour $j \geq 1$, le paquet $1/(2^{j-1}+1)+\ldots+1/2^j$ contient 2^{j-1} termes qui sont tous plus grands que $1/2^j$ et donc il est plus grand que $1/2$. On obtient donc

que
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^p}\geq 1+\frac{p}{2}\,.$$
On peut donc obtenir une avancée de dominos aussi grande que l'on veut, ce que l'on pourrait traduire de façon informelle par
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=+\infty\,.$$
Ainsi, même si les termes de la somme sont de plus en plus petits, la somme entière est infinie. Quand on compare avec le cas précédent, on voit que la nuance est subtile : la vitesse à laquelle les termes deviennent petits détermine le fait que la somme est finie ou non.

Remarquons que la divergence de cette série était connue depuis le Moyen-Âge d'après les travaux de Nicolas Oresme.

À propos de la situation présentée, on pourra consulter le site Image des maths `images.math.cnrs.fr/Une-tour-de-cartes-qui-penche-a-l-infini.html`

1.3 Séries entières

On sait que, quand x est proche de 0, on a
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right) \tag{1.2}$$
où n est fixé et où $o\left(x^n\right)$ est un terme de la forme $x^n\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x)\to 0$ quand $x\to 0$. Le développement de Taylor nous donne donc une approximation de e^x mais seulement quand x se rapproche de 0 et à n fixé. On ne sait pas si *à x fixé*, le développement est d'autant meilleur que n est grand. En particulier, peut-on écrire
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$
avec une somme infinie ? Cela serait pratique pour calculer ne serait-ce que e. En effet, seules les sommes et produits sont réellement calculables. Est-ce ainsi qu'une calculette calcule e^x ? Et si oui, quels nombres peuvent ainsi être calculés par une somme infinie ?

Les scientifiques indiens ont repris les travaux des grecs de l'antiquité et ont introduit les fonctions sin et cos. Pour calculer leur valeur, ils mettent au point une méthode de calcul qui se traduirait par le développement
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$
Ces méthodes seront reprises et développées par les perses et les arabes avant de revenir en Occident. Depuis longtemps, ces sommes infinies sont utilisées concrètement.

1.4 Des calculs étranges

Regardons le calcul formel suivant

$$1+2+4+8+16+32+\ldots = 1+2(1+2+4+8+16+\ldots)$$

donc

$$0 = 1+(1+2+4+8+16+\ldots) \quad \text{puis} \quad 1+2+4+8+16+32+\ldots = -1\,.$$

On voit bien qu'il y a anguille sous roche. Notre problème est bien sûr d'avoir manipulé des sommes infinies qui ne sont pas définies. Ici, on sent bien l'arnaque, mais on peut faire des calculs similaires plus subtils : il faut définir proprement les choses pour savoir comment les manipuler. Ci-dessous, deux exemples de grands mathématiciens à l'époque où on commence à comprendre qu'il manque une théorie propre sur les sommes infinies.

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series $\odot\ \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ **etc. in infinitum** $\sqcap$ **2.**

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ **etc. in infinitum.**

Exponatur et series $\odot$ **dimidiata:**

series ♉ $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ **etc. in infinitum**

Quam ajo esse $\sqcap$ **1.**

Nam auferatur series ♉ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2}+\frac{4}{12}+\frac{9}{36}+\frac{16}{80}+\frac{25}{150}+\frac{36}{252}$ **etc. sive depressis fractionum Terminis**

series ♀ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ **etc. in infinitum.**

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ♉ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ♉ sive series $\odot$ **erit aequalis binario.**

Quod demonstrandum sumseramus.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne) utilise une série divergente dans un calcul intermédiaire. Il obtient une valeur juste après soustraction de l'infini de chaque côté de l'égalité ! Remarquons au passage que les notations sont très différentes d'aujourd'hui, comme le $\sqcap$ *pour l'égalité.*

205

DE

SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum series conuergentes ita definiantur, vt constent terminis continuo decrescentibus, qui tandem, si series in infinitum processerit penitus euanescant; facile intelligitur, quarum serierum termini infinitesimi non in nihilum abeant, sed vel finiti maneant, vel in infinitum excrescant, eas, quia non sint conuergentes, ad classem serierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini seriei vltimi, ad quos progressione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur serierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas species subdiuiditur, prout vel omnes termini eodem sint affecti signo, vel signa $+$ et $-$ alternatim se excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor serierum diuergentium species, ex quibus maioris perspicuitatis gratia aliquot exempla subiungam.

I. . . .	$1+1+1+1+1+1+$ etc.
	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+$ etc.
II. . . .	$1-1+1-1+1-1+$ etc.
	$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+$ etc.
III. . . .	$1+2+3+4+5+6+$ etc.
	$1+2+4+8+16+32+$ etc.
IV. . . .	$1-2+3-4+5-6+$ etc.
	$1-2+4-8+16-32+$ etc.

Cc 3 §. 2.

§. 3. Ex specie secunda Leibnitius primus hanc contemplatus est seriem:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\text{ etc.}$$

cuius summam valere $=\frac{1}{2}$ statuerat, his satis firmis rationibus innixus: Primum enim haec series prodit, si ... per diuisionem continuam more solito

...

quarum summae sint finitae, atque adeo negatiuae, seu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuisionem in seriem euoluta det: $1+a+a^2+a^3+a^4+$ etc. deberet esse:

$$-1=1+2+4+8+16+\text{ etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}=1+3+9+27+81+\text{ etc.}$$

quod aduersariis non immerito absurdissimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

Leonhard Euler (1707-1783, Suisse) s'interroge sur le sens des sommes infinies. Il dit par exemple que Leibniz pense que $1-1+1-1+1-1+\dots$ *vaut* $1/2$ *mais que cela reste contesté. Il montre que les valeurs* 0 *ou* 1 *sont possibles mais donc qu'il est normal de penser que le vrai résultat est la moyenne. Il donne aussi un exemple de série dont la somme vaut* $-\infty$ *ou* $+\infty$ *suivant le raisonnement et conclut donc que le résultat doit être une valeur réelle intermédiaire !*

2 Notions et propriétés de base

Pour le moment, nous n'avons pas écrit les choses rigoureusement. Typiquement, les « ... » sont souvent problématiques (peut-on trouver une unique logique pour boucher les trous ?).

2.1 Définitions et notations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leq q$, on note $\sum_{n=p}^{q} u_n$ la somme des termes depuis $n = p$ jusqu'à $n = q$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{q-1} + u_q \ .$$

On introduit les *sommes partielles* comme étant les nombres

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + \ldots + u_N, \quad N \in \mathbb{N}\,.$$

On appelle *série de terme général* u_n et on note $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ la suite des sommes partielles S_N.

Si la suite des sommes partielles converge quand N tend vers $+\infty$ vers un nombre $S \in \mathbb{C}$, on dit que *la série converge* ou *la série est convergente* et $S = \lim_{N\to+\infty} S_N$ est appelé *somme de la série*. On peut alors noter

$$S = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \,.$$

Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que *la série diverge* ou *la série est divergente* et $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'a aucun sens en tant que nombre. Concernant la convergence ou divergence de la série, on parle de *nature* de la série.

Si la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ est convergente et de somme S, on appelle *reste d'ordre* N le nombre $S - S_N = S - \sum_{n=0}^{N} u_n$ que l'on peut noter

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq N+1} u_n.$$

Par définition, ce reste tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (s'il y a convergence... mais écrire un reste n'a pas de sens si la série diverge).

Notons que le choix de faire partir l'indice n à $n = 0$ n'est pas obligatoire et on peut regarder des séries $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ ou avec un autre indice de départ.

⚠ Le premier écueil est de confondre la suite de terme général u_n avec la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$. La série est la suite des sommes partielles. Étudier la nature de la *série* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ne consiste pas regarder la convergence de la *suite* de terme général u_n.

⚠ L'objet « série » $(\sum_n u_n)$ est une suite. Il est important de ne pas le confondre avec l'objet « somme » $\sum_n u_n$ qui est la limite de la série, un nombre qui n'existe que si la série converge. *Certes, la différence d'écriture est subtile, ce n'est pas une convention générale qui se retrouve partout en dehors de ce cours et on fera parfois des oublis et abus dans ces notations, mais il est important de garder cette différence en tête.* L'objet « série » ne peut se trouver que dans des phrases du type « converge », « diverge », « a pour somme »... Une expression du type $2 + (\sum_n u_n)$ est louche. On peut écrire $2 + \sum_n u_n$ au sens que le deuxième terme est la somme de la série, mais ceci ne peut s'écrire que <u>une fois que l'on sait que la série converge</u>.

⚠ L'indice n dans la sommation est un indice muet. On peut lui préférer d'autres indices comme k, p etc. et on peut aussi contraindre l'indice en posant par exemple $n = 2p$ pour écrire $(\sum_{n \text{ pair}} u_n) = (\sum_p u_{2p})$. Dans tous les cas, <u>l'indice de sommation ne peut pas apparaître en dehors de la somme</u>. S'il le fait, c'est souvent le signe d'une erreur dans le calcul ou les concepts. Cela peut aussi être dû à une mauvaise notation où n sert à deux choses différentes... ce qui amènera à une erreur à coup sûr. En particulier, la somme d'une série convergente, $\sum_n u_n$, ne peut pas dépendre de n !

2.2 Propriétés élémentaires

Les séries n'étant qu'une écriture de suites particulières, les propriétés connues des limites de suites nous donnent directement des propriétés élémentaires pour les séries :

Proposition 1.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, les séries $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n \lambda u_n)$ ont même nature (c'est-à-dire elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux). Si elles convergent alors les sommes vérifient $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n$.*

Soient $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ deux séries convergentes, alors $(\sum_n (u_n + v_n))$ converge et a pour somme $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$.

Démonstration : Toutes les affirmations se démontrent de la même façon en utilisant les propriétés élémentaires des limites de suites. Faisons par exemple le cas de la somme. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n$$

car il s'agit d'une somme finie de termes et donc leur ordre peut être changé. Par hypothèse, les deux sommes de droite convergent vers les limites $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ quand $N \to \infty$. Donc la somme de gauche converge vers leur somme. $\square$

⚠ Le mécanisme de la démonstration ci-dessus est important : on ne manipule surtout pas une somme infinie sans précaution et encore moins sans savoir si elle converge ou pas. On verra par exemple que l'ordre des termes dans une somme infinie peut changer le résultat de la somme ! Il est donc important de :
considérer d'abord une somme finie de termes, manipuler ainsi les sommes partielles,
puis à la fin *faire tendre le nombre de termes vers l'infini.* Ce mécanisme de preuve sera commun à quasiment toutes les démonstrations.

⚠ Au passage, on notera qu'il n'y a pas de résultat sur une série du type $(\sum_n u_n v_n)$ puisqu'il n'y a pas de rapport entre $\sum_{n=0}^{N} u_n v_n$, $\sum_{n=0}^{N} u_n$ et $\sum_{n=0}^{N} v_n$.

Notons que par les résultats ci-dessus :
L'ensemble des séries convergentes a une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

La proposition suivante insiste sur le fait que la *nature* d'une série est une propriété asymptotique, cad. elle ne dépend pas des premiers termes de la série (ce qui n'est évidemment pas le cas de sa *somme* en cas de convergence).

Proposition 1.2. *Soit $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ une série. Pour tous rangs n_1 et n_2 dans $\mathbb{N}$, les séries $(\sum_{n\geq n_1} u_n)$ et $(\sum_{n\geq n_2} u_n)$ ont même nature.*

Démonstration : On regarde de nouveau les sommes partielles. Si $N \geq n_2 \geq n_1$ on a

$$\sum_{n=n_1}^{N} u_n = \sum_{n=n_2}^{N} u_n + \left(\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n\right).$$

Les deux suites des sommes partielles indexées par N ne diffèrent ainsi que d'une constante $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{n_2-1} u_n$: donc l'une converge dès que l'autre converge. $\square$

Le critère de divergence suivant est important.

Proposition 1.3. *Soit* $(\sum_n u_n)$ *une série de nombres complexes. Si elle converge alors la suite* (u_n) *tend vers* 0*. Autrement dit, si* (u_n) *ne tend pas vers* 0 *alors* $(\sum_n u_n)$ *diverge. On parle alors de divergence grossière ou triviale.*

Démonstration : Par hypothèse la suite $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ tend vers une limite S. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. $\square$

Il s'agit d'un critère de divergence puisque le fait que (u_n) tend vers 0 n'implique pas que $(\sum u_n)$ converge. Il s'agit pourtant d'une erreur très courante, que beaucoup trop d'étudiants font malgré les avertissements.

Exemples : La série $1-1+1-1+1-1+\dots$ mentionnée par Euler est donc divergente. Il est normal de ne pas pouvoir définir précisément sa somme. De même, le calcul $1+2+4+8+\dots = -1$ ne veut donc rien dire. Pour les séries $(\sum_n 1/2^n)$ et $(\sum_n 1/n)$, le terme général tend vers $0\dots$ et cela ne permet pas d'en déduire leur nature. D'ailleurs la première converge alors que la seconde diverge.

Nous allons passer une partie de ce cours sur les séries *à termes positifs*. En plus de l'aspect intuitif, une des raisons en est que leur étude est une étape clé dans l'étude générale des séries.

Définition 1.4. *Soit* $(\sum_n u_n)$ *une série de termes complexes, on dit qu'elle est* absolument convergente *si* $(\sum_n |u_n|)$ *est une série convergente de réels positifs. Dans le cas contraire, on dit qu'elle* diverge en valeur absolue.

La propriété suivante est remarquable et très utile.

Proposition 1.5. *Pour une série de terme général complexe,*

la convergence absolue entraîne la convergence dans $\mathbb{C}$*.*

La réciproque est fausse (cf. chapitre 3).

Démonstration : On utilise le *critère de convergence de Cauchy* dans $\mathbb{C}$: les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ forment une suite convergente si et seulement si elles forment une *suite de Cauchy*, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \ , \quad \forall P > Q \geq N_0 \ , \quad |S_P - S_Q| \leq \varepsilon \ .$$

Or

$$|S_P - S_Q| = \left| \sum_{n=Q+1}^{P} u_n \right| \leq \sum_{n=Q+1}^{P} |u_n| = \tilde{S}_P - \tilde{S}_Q$$

où on note $\tilde{S}_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ la somme partielle de la série $(\sum_{n\geq 0} |u_n|)$. Puisque cette série $(\sum_n |u_n|)$ converge, $(\tilde{S}_N)$ vérifie le critère de Cauchy et la majoration ci-dessus montre que c'est aussi le cas pour (S_N). □

3 Les séries géométriques

Les séries géométriques forment un type de séries très simple et important. On les rencontre couramment, et elles serviront de séries de référence pour l'étude d'autres séries.

Définition 1.6. *Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle* série géométrique de raison a *une série de la forme* $(\sum_{n\geq n_0} a^n)$.

Le cœur de cette section est la *formule* suivante qu'il est important de connaître. Notons qu'elle semble avoir été connue des Égyptiens (papyrus de 1650 av. JC) et qu'elle apparaît comme la proposition 35 des éléments d'Euclide (300 av. JC).

Proposition 1.7. *Soient $p \geq q$ deux entiers de $\mathbb{Z}$ et soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. Alors*

$$\sum_{n=q}^{p} a^n = a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p = \frac{a^q - a^{p+1}}{1-a} \ .$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence sur p ou simplement en constatant que

$$\begin{aligned} & (1-a)(a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p) \\ &= a^q - a^{q+1} + a^{q+1} - a^{q+2} + \ldots + a^p - a^{p+1} \\ &= a^q - a^{p+1} \ . \end{aligned}$$

□

On peut retenir la formule ci-dessus par la phrase

Premier écrit moins premier pas écrit sur un moins la raison.

Bien entendu, le cas $a = 1$ est trivial mais doit toujours être traité à part.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.8. *La série géométrique* $(\sum_n a^n)$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$*, et dans ce cas la somme est donnée par* $\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$ *.*

Démonstration : Notons $(S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n)$ les sommes partielles. Si $a = 1$, alors $S_N = N + 1 \to +\infty$ donc la série diverge. Si $a \neq 1$, alors la formule ci-dessus donne $S_N = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ qui a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas $a^{N+1} \to 0$. □

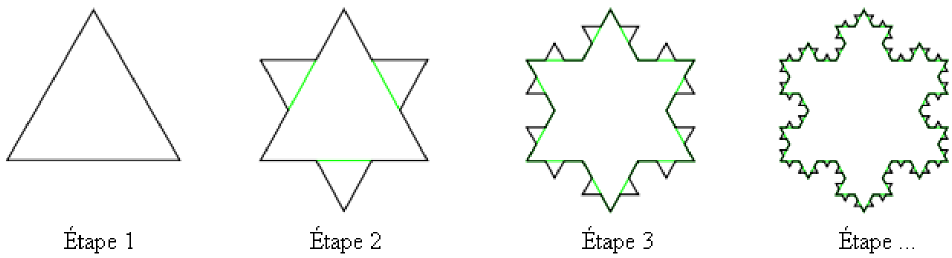
Remarque : Comme $a^n \to 0$ si et seulement si $|a| < 1$, on obtient qu'une série géométrique converge *si et seulement si* son terme général tend vers 0.

Exemple : On a donc proprement justifié que $(\sum_{n\geq 1} 1/2^n)$ converge et que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/2} = 1 \ .$$

Application : aire du flocon de Von Koch

Le flocon de Helge Von Koch (1870-1924, Suède) se construit par étapes à partir d'un triangle, en ajoutant à chaque étape un triangle sur le tiers central de chaque côté de l'étape précédente :



Prenons comme unité d'aire la surface du triangle de départ. A l'étape 2, on ajoute 3 triangles d'aire 1/9. Puis à l'étape 3, on ajoute 12 triangles d'aire 1/81, puis 12×4 triangles d'aire $1/9^3$ etc. On se persuade rapidement qu'à l'étape

n, on ajoute $3 \times 4^{n-2}$ triangles de taille $1/9^{n-1}$. On obtient donc comme aire totale

$$\begin{aligned}1 + 3\,\frac{1}{9} + 12 \times \frac{1}{81} + \ldots = 1 + \sum_{n \geq 2} 3\frac{4^{n-2}}{9^{n-1}} &= 1 + \frac{3}{4} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &= 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}\,.\end{aligned}$$

En particulier, on obtient une aire finie, alors qu'elle est entourée par une courbe de longueur infinie (exercice, série géométrique de raison $\dfrac{4}{3}$).

Chapitre 2 : Séries à termes positifs

Nous avons vu que la convergence en valeur absolue d'une série $(\sum u_n)$ implique sa convergence. De ce fait, on commence souvent par étudier la série de termes réels positifs $(\sum |u_n|)$. Le but de ce chapitre est de donner des outils pour étudier cette convergence.

⚠ La plupart des résultats et critères énoncés dans ce chapitre sont spécifiques aux séries *à termes positifs* et ne doivent pas être utilisés dans les cas où le signe du terme général varie. On notera quand même que :

- comme $(\sum(-u_n))$ et $(\sum u_n)$ ont même nature, on peut aussi appliquer les résultats à des séries à termes négatifs.
- comme $(\sum_{n\geq N} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ont même nature, on peut appliquer les résultats même si les premiers termes ne sont pas de signe constant.

En résumé, *on écrira les théorèmes dans le cadre des séries à termes positifs, mais ils restent valables si les termes sont tous* réels *et* de même signe à partir d'un certain rang.

Commençons par noter que le fait que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ est une série de termes positifs équivaut à ce que *la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est une suite croissante*. Seuls deux comportements sont alors possibles : S_N tend vers l'infini et diverge, ou bien (S_N) est bornée et converge.

Notons ici cette caractérisation qui en découle de la convergence de la série :

Proposition 2.1. *Soit $(\sum u_n)$ une série de réels positifs. On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ $(N \in \mathbb{N})$. Alors la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles (S_N) est majorée .*

Démonstration : Par définition, la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge si et seulement si la suite (S_N) admet une limite finie. Elle est alors majorée. Inversement, comme cette suite est croissante (les u_n sont positifs), on sait que si elle est majorée elle converge (vers sa borne sup). □

1 Critères de comparaison

En considérant la suite croissante des sommes partielles pour les séries à termes positifs on obtient un premier énoncé :

Proposition 2.2. *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries de réels positifs telles que pour tout* n $u_n \geq v_n \geq 0$. *Si* $(\sum u_n)$ *converge, alors* $(\sum v_n)$ *converge et leurs sommes respectives* U *et* V *vérifient* $U \geq V$. *Si* $(\sum v_n)$ *diverge, alors* $(\sum u_n)$ *diverge.*

Démonstration : Supposons que $(\sum u_n)$ converge. Par la proposition ci-dessus, chaque somme partielle $\sum_{n=0}^{N} v_n$ est majorée par $\sum_{n=0}^{N} u_n$, elle-même majorée par $U = \sum_{n\geq 0} u_n$. Donc la série de réels positifs $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge vers un réel $V \leq U$. La deuxième partie de la proposition est la contraposée de la première. $\square$

Remarques : Pour une série de termes positifs qui tendent vers 0 (donc non trivialement divergente), la question clé est de savoir à quelle vitesse les termes tendent vers 0. La proposition ci-dessus dit exactement cela : plus son terme général est petit, plus la série a des chances de converger.
Nous avons vu que les premiers termes ne changent pas la nature d'une série, donc pour ce critère comme pour les suivants, on peut se contenter d'être à termes positifs et vérifier les hypothèses de comparaison seulement *à partir d'un certain rang.*

Exemples :

- On considère la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n})$ qui est à termes positifs. On a $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et $(\sum_n \frac{1}{2^n})$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ donc elle converge. Par suite $(\sum_n \frac{1}{n2^n})$ est aussi une série convergente.
- On considère la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}})$ qui est à termes positifs. On a $1/\sqrt{n} \geq 1/n$ pour $n \geq 1$ et comme $(\sum \frac{1}{n})$ est une série divergente, alors $(\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}})$ est aussi une série divergente.

Notations et terminologie des comparaisons de suites (rappel)

Définitions 2.3. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres complexes.*

- *On dit que la suite* (u_n) *est* dominée *par la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, *on lit* u_n *est un* grand O *de* v_n,
s'il existe $C > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que pour tout* $n \geq N$, $|u_n| \leq C|v_n|$.

- *On dit que la suite* (u_n) *est* négligeable *devant la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n = o(v_n)$, *on lit* u_n *est* un petit o de v_n,
si pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$.

- *On dit que la suite* (u_n) *est* équivalente *à la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n \sim v_n$
si $u_n - v_n = o(v_n)$ *, cad. si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$.

Remarque : Si le terme général de la suite (v_n) est non nul à partir d'un certain rang, alors :

- on a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \to_{n\to\infty} 0$
- on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \to_{n\to\infty} 1$, si et seulement si $v_n \sim u_n$.

Exemples :

- Écrire $u_n = o(1)$ signifie que $u_n \to 0$, resp. $u_n = O(1)$ que (u_n) est bornée.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$. On en déduit un équivalent an^k ($k \in \mathbb{N}$) pour toute fonction polynomiale de n.
- On a $4n^2 - n + 1 \sim 4n^2$,
et $\sqrt{4n^2+1} = \mathcal{O}(n)$, $\sqrt{4n^2+1} = o(n^2)$, $\sqrt{4n^2+1} \sim 2n$.

Remarque : Si f et g sont deux fonctions d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{C}$, et si $a \in I$, on définit de façon similaire les comparaisons

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad f(x) = o(g(x)), \quad f(x) \sim g(x)$$

quand x tend vers a, ou encore *au voisinage de a*.

- on a par exemple $\sin x \sim x$ au voisinage de 0.
- on utilise o pour décrire le reste, « $o\big((x-a)^n\big)$ », dans les formules de Taylor en a .

On a alors le corollaire suivant de notre proposition :

Corollaire 2.4. *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries de réels positifs. Si leurs termes généraux sont équivalents c'est-à-dire si* $u_n \sim v_n$*, alors les séries* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *ont même nature (cad. convergent ou divergent toutes les deux).*
Si u_n *est du même ordre de grandeur ou négligeable devant* v_n*, c'est-à-dire si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *ou* $u_n = o(v_n)$*, alors* $(\sum u_n)$ *converge si* $(\sum v_n)$ *converge (et* $(\sum v_n)$ *diverge si* $(\sum u_n)$ *diverge).*

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$, comme u_n et v_n sont positifs, la définition donne que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

Il suffit donc d'utiliser la proposition précédente avec $\varepsilon < 1$ fixé. De même, si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, alors il existe une constante $C > 0$ et un rang à partir duquel $u_n \leq Cv_n$. On applique la proposition. □

Exemple : Considérons la série $(\sum_n \sin(\frac{1}{3^n}))$ qui est à termes positifs. Comme $\frac{1}{3^n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et comme $\sin x \sim x$ près de zéro, on a $\sin(\frac{1}{3^n}) \sim \frac{1}{3^n}$.
La série $(\sum_n \frac{1}{3^n})$ est une série géométrique convergente, il suit donc que la série $(\sum_n \sin(\frac{1}{3^n}))$ est convergente.

2 Séries de Riemann

Nous avons vu une première famille importante de séries : les séries géométriques. Comme on a montré avec les critères de comparaison, cette famille de séries est utile pour étudier des séries de comportement proche du type exponentiel. Nous allons voir ici d'autres familles de séries. En particulier les *séries de Riemann*, du nom du grand mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866), forment l'autre famille–étalon fondamentale : elles permettent d'étudier la nature de séries à comportement de type polynomial.

2.1 Comparaison avec une intégrale

Proposition 2.5. *Soit* f *une fonction continue et décroissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}_+$*. La série* $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ *converge si et seulement si la limite* $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ *existe et est finie.*

Démonstration : Comme f est décroissante, on a pour tout n

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n)$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)\ . \tag{2.1}$$

Comme f est positive, la fonction $X \mapsto \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante. Donc si cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$, c'est qu'elle tend vers $+\infty$ et $\lim_{N\to+\infty} \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. L'inégalité de droite montre que $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$ tend vers l'infini et donc la suite des sommes partielles diverge.

Si $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie alors $N \mapsto \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$ est bornée donc la suite $(\sum_{n=2}^{N} f(n))$ est majorée. Comme f est positive, la suite est aussi croissante, donc elle converge. Puisque sa suite des sommes partielles converge la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge, par définition. $\square$

Notons que la borne de démarrage de l'intégrale dans l'énoncé n'est en fait pas importante : la relation de Chasles permet de remplacer 1 par n'importe quel réel > 0.

2.2 Séries de Riemann

Les *séries de Riemann* sont les séries $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha > 0$

(notons que si $\alpha \leq 0$, la série diverge trivialement car son terme général ne tend pas vers 0).

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 2.6. *La série de Riemann* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration : On applique la proposition précédente à la fonction $f\colon x \mapsto 1/x^\alpha$. Pour $\alpha \neq 1$, on a $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{X^{\alpha-1}}\right)$;
quand $X \to +\infty$ il y a une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le résultat si $\alpha \neq 1$. Pour $\alpha = 1$, $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \ln X$ et il y a bien divergence. $\square$

Voici les deux exemples fondamentaux.

Exemples :

- La série harmonique $(\sum_{n\geq 1} 1/n)$ diverge vers $+\infty$ à une vitesse logarithmique : on peut déduire de (2.1) que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$.
- La série $(\sum_{n\geq 1} 1/n^2)$ converge.

En retenant ces deux exemples et le fait que *l'exposant* 1 *est l'exposant critique*, on ne peut se tromper sur la nature des séries. Quand on étudie la nature de séries de type polynomial, on peut se ramener à une série de Riemann par les théorèmes de comparaison.

Exemples :

- Considérons la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$. On a $n/(n^2+1) \sim 1/n$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, les séries sont à termes positifs. Donc comme la série $(\sum 1/n)$ diverge, la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$ diverge aussi.

- Dans le texte du §1.4, Leibniz s'intéresse à la somme des inverses des nombres triangulaires, c'est-à-dire à la série $(\sum_n \frac{2}{n(n+1)})$. On a une série à termes positifs et $\frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$. Donc la série étudiée par Leibniz est bien convergente.
- Considérons la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$. Ce n'est pas une série à termes positifs, mais on peut étudier sa convergence absolue : on a $|\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. La série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^{3/2}})$ est convergente donc $(\sum |\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}|)$ converge cad. $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$ est absolument convergente (et donc elle converge).

†Pour sa culture mathématique, on pourra s'intéresser à la célèbre *fonction zêta de Riemann* : si $s > 1$, elle est définie par

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\,.$$

On a

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \;=\; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\zeta(4) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \;=\; 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots \;=\; \frac{\pi^4}{90}$$

(voir l'UE MAT402 au S4). En fait, il existe de telles formules explicites pour les valeurs de la fonction ζ aux *entiers pairs*, toutes transcendantes (cad. non solutions d'une équation polynomiale sur $\mathbb{Q}$). A l'inverse, très peu de choses sont connues sur les sommes de ces séries pour les exposants *impairs*. Par exemple si on sait que

$$\zeta(3) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \;\approx\; 1,202$$

est irrationnel, on ne sait pas s'il est transcendant. Et on ne sait pas quelles autres valeurs $\zeta(2n+1)$ sont irrationnelles.

2.3 Séries de Bertrand

Les *séries de Bertrand* doivent leur nom à Joseph Bertrand (1822-1900, France). Elles forment une famille intéressante à connaître, mais bien moins importante que les séries géométriques et les séries de Riemann. Il s'agit des séries de la forme $(\sum_n u_n) = \left(\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$, où α et β sont réels (u_n ne tend pas vers 0 si $\alpha < 0$).
Notons que si $\alpha > 1$, alors $u_n = o(1/n^{\alpha-\varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\alpha - \varepsilon > 1$. Comme $1/n^{\alpha-\varepsilon}$ est alors le terme général d'une série de Riemann convergente la série de Bertrand converge dans ce cas.
De même, si $\alpha < 1$, alors $1/n = o(u_n)$ et la série de Bertrand diverge.
Le cas intéressant est donc le cas $\alpha = 1$.

Proposition 2.7. *La série de Bertrand* $\left(\sum_n \frac{1}{n \ln^\beta n}\right)$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

Démonstration : On utilise de nouveau le critère de comparaison avec une intégrale, avec la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$. Il s'agit bien d'une fonction décroissante pour x assez grand (même si $\beta < 0$). Par ailleurs, si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)}\right]_2^X$$

et donc il y a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.
Si $\beta = 1$, alors

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_2^X\,,$$

cette intégrale n'a pas de limite finie donc la série diverge. $\square$

Notons que l'on pourrait par le même principe voir que la série $\left(\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}\right)$ diverge, et continuer à enchaîner les composés de « ln ».

3 Règles de d'Alembert et de Cauchy

Les critères *de d'Alembert* et *de Cauchy* sont d'utilisation commode pour savoir si une série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. Comme on ne regarde que la convergence de $(\sum |u_n|)$, ces critères sont reliés à ce chapitre. Ce sont cependant des énoncés généraux, qui concernent aussi les séries de termes non positifs.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) a été chargé avec Diderot d'éditer l'Encyclopédie. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a été un mathématicien très important ; son cours à l'Ecole Polytechnique (1821) a servi de refondation à l'analyse en donnant des preuves rigoureuses avec la technique des ≪ epsilon-delta ≫.

Théorème 2.8. Règle de d'Alembert.
Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes non nuls. On suppose que le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ a une limite finie ℓ quand $n \to \infty$.
Alors si $\ell < 1$, la série $(\sum u_n)$ converge absolument ;
et si $\ell > 1$, la série diverge trivialement.

Démonstration : Le cas de la limite $\ell > 1$ est trivial car alors, à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| \geq |u_n| > 0$ et la suite ne peut tendre vers 0. Supposons que $\ell < 1$ et prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < 1 - \varepsilon$. Alors, il existe un rang N à partir duquel $|u_{n+1}/u_n| \leq 1 - \varepsilon$. Par récurrence, on obtient que pour tout $k \geq 1$, $|u_{N+k}| \leq |u_N|(1-\varepsilon)^k$. Comme $(\sum_k (1-\varepsilon)^k)$ est une série géométrique convergente, alors par comparaison, $(\sum_k |u_{N+k}|)$ est une série convergente et donc $(\sum u_n)$ converge absolument. $\square$

Théorème 2.9. Règle de Cauchy.
Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes. On suppose que la racine $|u_n|^{1/n}$ a une limite finie ℓ quand $n \to \infty$.
Alors si $\ell < 1$, la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente ;
et si $\ell > 1$, la série diverge trivialement.

Démonstration : La preuve est très semblable. Faisons le cas $\ell < 1$ et posons $\alpha \in]\ell, 1[$. A partir d'un rang N, on a $|u_n|^{1/n} \leq \alpha$ et donc $|u_n| \leq \alpha^n$. Par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. $\square$

Il est important de retenir que pour ces deux règles le cas $\ell = 1$ est *non-concluant*, c'est-à-dire qu'il contient des exemples de convergence et de divergence (séries de Riemann). En fait, on pourra retenir que ces deux règles concernent uniquement des cas de convergence *type géométrique* (comme les preuves le montrent). Elles ne peuvent conclure sinon.

Exemples :

- On considère la série $(\sum \frac{n^2}{3^n})$. Posant $u_n = n^2/3^n$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2/3^n} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \ < \ 1$$

  et donc la série converge d'après la règle de d'Alembert *(ou Cauchy)*.

- On considère la série $(\sum \frac{n!}{n^n})$; l'étudier avec la règle *de d'Alembert* (elle converge).

- On considère la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (1 - 1/n)^{n^2}$. On a

$$|u_n|^{1/n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \ < \ 1$$

  et donc la série converge d'après la règle de Cauchy.

- On considère la série $(\sum 1/n)$. On sait que la série diverge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n/(n+1) \to_{n\to\infty} 1$, c'est le cas non-concluant de la règle de d'Alembert *(ou Cauchy)*.

- On considère la série $(\sum 1/n^2)$. On sait que la série converge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n^2/(n+1)^2 \to_{n\to\infty} 1$, c'est le cas non-concluant de la règle de d'Alembert *(ou Cauchy)*.

Chapitre 3 : Séries de termes quelconques

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux séries $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ avec (u_n) une suite de nombres complexes quelconques. Nous avons vu que (u_n) doit tendre vers 0 pour pouvoir espérer que la série converge. Nous avons également vu que la convergence de la série $(\sum |u_n|)$ entraîne celle de $(\sum u_n)$. Mais il est en fait possible que $(\sum u_n)$ converge sans que $(\sum |u_n|)$ converge. Nous illustrons cela par l'exemple type de la série

$$(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}),$$

dont nous admettons (jusqu'au paragraphe suivant qui en donnera une preuve) qu'elle converge. On peut même montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \;=\; \ln 2\,.$$

Puisque $(\sum |u_n|) = (\sum \frac{1}{n})$ est divergente, la série $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ est donc convergente, mais pas absolument convergente.

Définition 3.1. *Une série qui converge sans converger absolument est dite* semi–convergente*.*

Il y a donc *trois* réponses possibles pour la nature des séries de nombres complexes quelconques :

1. la série $(\sum u_n)$ diverge,

2. la série $(\sum u_n)$ converge mais ne converge pas absolument,

3. la série $(\sum u_n)$ converge absolument.

Quand on demande la nature d'une série, il est important de préciser entre la semi–convergence (cad. le type 2) et la convergence absolue. Nous verrons en effet plus tard que certaines manipulations ne sont autorisées que si la série converge *absolument*.

Profitons encore de notre série de référence $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ pour montrer que

les *critères de comparaison* pour les séries à termes positifs ne sont **pas valables pour les séries à termes quelconques.**

Exemple : les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ ci-dessous ont des termes généraux équivalents mais sont de nature différente :

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \dfrac{1}{n \ln n}$. On a

$$\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \quad \longrightarrow_{n\to\infty} \ 1$$

et donc $u_n \sim v_n$. On a dit que $(\sum u_n)$ converge. Si $(\sum v_n)$ converge aussi, alors ce devrait être le cas de $(\sum (v_n - u_n))$. Or $v_n - u_n = \frac{1}{n \ln n}$, donc il s'agit d'une série de Bertrand divergente. On en déduit que $(\sum v_n)$ diverge, *les deux séries de termes généraux équivalents sont de nature différente.*

Nous allons devoir introduire des outils plus perfectionnés pour étudier les séries de termes de signe quelconque qui ne convergent pas en valeur absolue.

2 Séries alternées

Le cas typique et le plus simple est celui des séries alternées.

Définition 3.2. *Une série $(\sum u_n)$ est appelée* série alternée *si le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$ un réel positif (ou de la forme $u_n = (-1)^{n+1} v_n$).*

La convergence des séries alternées est souvent obtenue par le critère suivant :

Théorème 3.3. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série alternée de terme général* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$*. Si* (v_n) *est une suite décroissante et qui converge vers* 0*, alors* $(\sum u_n)$ *est une série convergente.*

Démonstration : Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ $(N \in \mathbb{N})$ les sommes partielles et soient $(P_K = S_{2K})$ et $(Q_K = S_{2K+1})$ les suites extraites paire et impaire. Nous allons montrer que les suites (P_K) et (Q_K) sont adjacentes, c'est-à-dire que (P_K) est décroissante, (Q_K) est croissante et $|P_K - Q_K|$ tend vers 0.

- La suite (P_K) est décroissante, en effet
  $P_{K+1} - P_K = u_{2K+2} + u_{2K+1} = v_{2K+2} - v_{2K+1} \leq 0$ car (v_n) est décroissante.

- On montre de même que (Q_K) est croissante.

- Enfin, $P_K - Q_K = -u_{2K+1} = v_{2K+1}$ tend bien vers 0.

On a donc deux suites adjacentes, de sorte qu'elles convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour conclure que la suite totale (S_N) converge, il suffit de le déduire de ce que ses suites extraites paire et impaire ont même limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe des rangs K_0 et K_1 tels que si $K \geq K_0$, alors $|S_{2K} - \ell| \leq \varepsilon$ et si $K \geq K_1$, alors $|S_{2K+1} - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $N_0 = \max(2K_0, 2K_1 + 1)$, de sorte que pour tout $N \geq N_0$, on a $|S_N - \ell| \leq \varepsilon$. Cela montre bien que les sommes partielles convergent vers ℓ. $\square$

Un exemple typique est celui de la série alternée $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$, qui converge puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant. Il en est de même pour la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, et on note qu'elle aussi diverge en valeur absolue.

Considérons la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (-1)^n \sin(1/n)$. Il est vrai que $u_n \sim (-1)^n/n$ qui est le terme général d'une série convergente. Mais attention ! cela ne permet *pas* de conclure que $(\sum u_n)$ converge, car on ne peut utiliser cette comparaison dans le cas de séries de termes de signe quelconque (voir exemple de l'introduction). Il faut donc dire que $(\sin(1/n))$ est une suite positive décroissante vers 0 et utiliser *directement* le théorème précédent.

Pour appliquer ce critère, il est important de prouver que la suite ($v_n = (-1)^n u_n = |u_n|$) est *décroissante*. En effet, si on reprend l'exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}$ de l'introduction, nous avons vu que $(\sum u_n)$ diverge. Pourtant, pour n assez grand, $1/n > 1/(n \ln n)$ et donc u_n est du signe de $(-1)^n$, la série $(\sum u_n)$ est alternée. Son terme général tend vers 0, donc si on ne peut utiliser le théorème précédent, c'est bien que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante.

3 Transformation d'Abel

Dans cette partie, nous allons présenter la transformation d'Abel et le critère de convergence associé. Il ne sera pas demandé de connaître par cœur les résultats de cette partie, mais on pourra demander de les appliquer en rappelant l'énoncé, ou d'utiliser votre feuille de notes qui sera autorisée aux examens.

Niels Henrik Abel (1802-1829, Norvège) est avec le français Évariste Galois (1811-1832) le représentant de la figure romantique du génie mathématique qui meurt jeune et incompris. Son nom est associé à un des plus grands prix mathématiques actuels, équivalent du prix Nobel.

La transformation d'Abel (1826) est une intégration par partie discrète. On considère une somme $\sum_{n=0}^{N} u_n$ avec $u_n = a_n b_n$. On va « dériver » b_n c'est-à-dire faire apparaître $b_{n+1} - b_n$, noté δb_n et on va « intégrer » a_n, c'est-à-dire faire apparaître $\sum_{k=0}^{n} a_k$, noté A_n. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_N b_N \\
&= a_0(b_0 - b_1) + (a_0 + a_1)(b_1 - b_2) + (a_0 + a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \ldots \\
&\quad + (\sum_{k=0}^{N} a_k)(b_N - b_{N+1}) + (\sum_{k=0}^{N} a_k) b_{N+1} \\
&= A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n \,.
\end{aligned}$$

Cette transformation a son intérêt propre, et ici elle nous permet de démontrer le critère suivant :

Théorème 3.4. Critère d'Abel
Soit $(\sum u_n)$ *une série de nombres* complexes *dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*
i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*
ii) la série $(\sum |b_{n+1} - b_n|)$ *est convergente,*
iii) la suite (b_n) *tend vers* 0*.*
Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Pour prouver la convergence de la série $(\sum u_n)$, on regarde ses sommes partielles. Par la transformation d'Abel, on sait que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n \tag{3.1}$$

avec les notations ci-dessus. Les hypothèses nous disent que la suite (A_n) est uniformément bornée en n, disons $|A_n| \leq M$, que (b_n) tend vers 0 et que $(\sum \delta b_n)$ est une série absolument convergente. On en déduit que $|A_N b_{N+1}| \leq M|b_{N+1}|$ tend aussi vers 0 et que

$$|A_n \, \delta b_n| \leq M|\delta b_n|$$

est le terme positif d'une série qui converge. Donc la suite $(\sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n)$ converge vers une limite finie. Revenant à (3.1), il vient que les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ ont une limite finie et donc que la série converge. □

En corollaire, on a un critère plus simple pour les cas standard.

Corollaire 3.5. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de nombres complexes dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*
i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*
ii) la suite (b_n) *est* réelle décroissante *et tend vers* 0*.*
Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Il suffit de voir que si (b_n) est réelle décroissante vers 0, alors $b_{n+1} - b_n \leq 0$ donc

$$\sum_{n=0}^{N} |b_{n+1} - b_n| = -\sum_{n=0}^{N} (b_{n+1} - b_n) = b_0 - b_{N+1}$$

par une simplification en cascade. Comme b_{N+1} tend vers 0, ces sommes partielles ont une limite et l'item *ii*) du critère d'Abel est vérifié. □

Exemples :

- Soit $(\sum(-1)^n b_n)$ une série alternée avec (b_n) réelle décroissante vers 0. On est dans le cadre du corollaire si on montre que $(\sum_{k=0}^n (-1)^k)$ est bornée. Mais cette suite ne fait que prendre les valeurs 1 puis 0, puis 1, puis 0... On en conclut que *le critère des séries alternées est un corollaire du critère d'Abel.*

- Un exemple typique qui n'est pas une série alternée mais qui peut se traiter avec la transformation d'Abel est la série $(\sum \frac{\cos n}{n})$. Ce n'est pas une série alternée car $(\cos n)$ n'alterne pas toujours de signe. On peut rentrer dans le cadre du corollaire avec $a_n = \cos n$ et $b_n = 1/n$ si on sait montrer que les sommes partielles $(\sum_{k=0}^n \cos k)$ sont bornées. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} \cos k\right| &= \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| \leq \frac{|1|+|e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} \\ &\leq \frac{2}{|1-e^{i}|}\ .\end{aligned}$$

  On obtient bien que ces sommes de cosinus sont uniformément bornées en n. Notons au passage qu'il est carrément possible de trouver la *valeur* de ces sommes, avec juste un peu plus d'efforts.

- On montre aussi, avec le même calcul (sans se limiter à la partie réelle), que la série $(\sum \frac{e^{in}}{n})$ converge.

4 Sommation par paquets

On pourrait vouloir ne pas sommer les termes d'une série un par un, mais en faisant des paquets. Le calcul suivant nous montre qu'il faut être prudent :

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$$

mais

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1.$$

On pourrait penser que c'est parce que le terme général de notre série ne tend pas vers 0, mais alors que penser de

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ =\ 0$$

et

$$1+\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots\ =\ 1\ ?$$

La série dont on a groupé les termes par paquets de ces deux façons est-elle convergente ?

Formalisons un peu les choses. Soit $(\sum u_n)$ une série et soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante avec $\varphi(0)=0$ qui va marquer le début des paquets. On appelle *sommation par paquets* associée à φ la série $(\sum v_n)$ avec

$$v_n=\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k\,.$$

Autrement dit, si on note S_N la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$, cela revient à considérer la *suite extraite* $(S_{\varphi(N)-1})$, qui somme directement par paquets faits des sommes sur les intervalles $[\![\varphi(N),\varphi(N+1)-1]\!]$. On a en effet

$$\sum_{n=0}^{N} v_n=\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k\Big)=S_{\varphi(N+1)-1}\,. \tag{3.2}$$

Théorème 3.6. *Soit $(\sum u_n)$ une série et soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une fonction strictement croissante avec $\varphi(0)=0$. Soit $(\sum v_n)$ avec $v_n=\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ la série consistant à sommer par paquets.*

i) Si $(\sum u_n)$ converge, alors la série par paquets $(\sum v_n)$ converge, et elles ont même somme.

ii) Supposons que : 1) $(|\varphi(n+1)-\varphi(n)|)$ soit uniformément bornée, cad. que la taille des paquets est bornée,
et 2) $u_n\to_{n\to\infty}0$. Alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ ont même nature.

Démonstration :

i) Si $(\sum u_n)$ converge, alors $(\sum v_n)$ aussi puisque par (3.2) ses sommes partielles forment une suite extraite de celle des sommes partielles de $(\sum u_n)$. En particulier ces deux séries ont même somme.

ii) Supposons maintenant que $(\sum v_n)$ converge et soit $N\in\mathbb{N}$. Il existe un unique entier N' tel que $\varphi(N')\le N<\varphi(N'+1)$. Soit M entier tel que pour tout n $|\varphi(n+1)-\varphi(n)|\le M$. On a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n-\sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n\right|=\left|\sum_{n=\varphi(N')}^{N} u_n\right|\le M\cdot\max_{\varphi(N')\le n\le N}|u_n|\,.$$

Or on a $\varphi(N') \geq N - M$ qui tend vers l'infini avec N, donc comme u_n tend vers 0, on en déduit que

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n\right| \to_{N\to+\infty} 0\,. \tag{3.3}$$

Finalement, puisque $\sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n = \sum_{n=0}^{N'-1} v_n$ et que les sommes partielles de la série des v_n convergent, (3.3) entraîne la convergence des sommes partielles de la série des u_n, cad. de $(\sum u_n)$.

□

Exemple : On considère la série $(\sum_{n\geq 2} u_n)$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.
A priori, c'est un bon candidat pour le critère des séries alternées… sauf que … la suite $(1/(n+(-1)^n))_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante :
en effet son inverse (u'_n) vérifie $u'_{2k} = 2k+1 > u'_{2k+1} = 2k > 0$.

Comme u_n tend vers 0, nous pouvons regarder la nature de la série en sommant par paquets de taille bornée, ici *par paquets de deux*. On a

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)}{2n+1+(-1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}\,.$$

Donc $(v_n = u_{2n} + u_{2n+1})$ est une suite négative et $v_n \sim \frac{-1}{4n^2}$. Quitte à changer v_n en $-v_n$, on peut donc utiliser l'équivalence avec une série de Riemann convergente pour conclure que $(\sum v_n)$ converge, et ainsi $(\sum u_n)$ converge aussi.

Au passage, notons que l'on peut également traiter cet exemple par un *développement limité*. Comme les termes de la série ne sont pas de signe constant, on ne peut s'arrêter à un équivalent. Il faut aller jusqu'à ce que le reste soit contrôlé par le terme d'une série absolument convergente. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\,.$$

Le terme général u_n est donc la somme du terme général d'une série alternée convergente et d'un reste dont la valeur absolue est contrôlée par le terme d'une série de Riemann convergente. Donc la série $(\sum u_n)$ est convergente.

5 Un dernier exemple

Concluons ce chapitre en traitant un même exemple avec les diverses méthodes. Considérons la somme

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\dots$$

c'est-à-dire la série $(\sum u_n)$ avec

$$u_n=\begin{cases} +1/n & \text{si} \quad n=4p+1 \\ +1/n & \text{si} \quad n=4p+2 \\ -1/n & \text{si} \quad n=4p+3 \\ -1/n & \text{si} \quad n=4p \quad (p\geq 1). \end{cases}$$

- **avec les séries alternées :** on regarde une somme partielle $S_N=\sum_{n=1}^{N}u_n$. Si $N=4p$, on peut la réorganiser (il s'agit d'une somme finie !) pour écrire

  $$\sum_{n=1}^{N}u_n=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{N}\right).$$

  On fait ainsi apparaître deux sommes partielles de séries alternées qui ont une limite quand N tend vers $+\infty$, par le critère des séries alternées. Donc $(\sum_{n=1}^{4p}u_n)$ a bien une limite quand p tend vers $+\infty$. Comme pour les sommations par paquets, si $N\neq 4p$, N est à distance au plus 2 d'un multiple $4p$ de 4 et comme u_n tend vers 0, on peut remplacer S_N par la somme partielle S_{4p} en ne faisant qu'une erreur qui tend vers 0. On obtient ainsi que (S_N) converge, et donc la série $(\sum u_n)$ converge.

- **par le critère d'Abel :** on pose $u_n=a_nb_n$ avec $b_n=1/n$ et (a_n) la suite $1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1\dots$ Évidemment, (b_n) est réelle décroissante vers 0 et les sommes $\sum_{k=0}^{n}a_k$ oscillent entre 0 et 2 et sont donc bornées. On peut donc appliquer le corollaire du critère d'Abel et on conclut que la série converge.

- **en sommant par paquets :** on va faire des sommes par paquets de 4. Comme leur taille est bornée et que le terme général u_n tend bien vers 0, on est ramené à étudier la nature de la série par paquets. On a

  $$v_p:=u_{4p+1}+u_{4p+2}+u_{4p+3}+u_{4p+4}=\frac{1}{4p+1}+\frac{1}{4p+2}-\frac{1}{4p+3}-\frac{1}{4p+4}.$$

  Puisque $\dfrac{1}{m+1}-\dfrac{1}{m+3}=\dfrac{2}{(m+1)(m+3)}\sim\dfrac{2}{m^2}$, les deux sommes

$u_{4p+1} + u_{4p+3}$ et $u_{4p+2} + u_{4p+4}$ sont chacune positives et équivalentes à $\dfrac{2}{16p^2} = \dfrac{1}{8p^2}$. Par suite v_p, leur somme, est positive et équivalente à $\dfrac{1}{4p^2}$.

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi par le théorème de comparaison la série $(\sum v_p)$ est convergente. Il en est donc de même pour $(\sum u_n)$.

Chapitre 4 : Compléments sur les séries

1 L'écriture décimale

Il nous est naturel d'écrire $0,33333\ldots = \frac{1}{3}$, pourtant cette écriture cache une somme infinie. En effet, la signification de $0,33333\ldots$ est

$$0,33333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

et il s'agit donc d'une somme infinie. Notons que *l'écriture décimale infinie* $0, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ (les a_i sont des entiers entre 0 et 9) *définit bien un nombre*, puisque la série $(\sum_n \frac{a_n}{10^n})$ est convergente. En effet, elle est composée de termes positifs, et on a la majoration $\frac{a_n}{10^n} \leq 9\frac{1}{10^n}$. Comme $(\sum \frac{1}{10^n})$ est une série géométrique convergente, on obtient que la série $(\sum_n \frac{a_n}{10^n})$ converge. Le nombre $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est donc bien défini.
Par exemple, on a

$$0,33333\ldots = \sum_{n\geq 1} \frac{3}{10^n} = 3\,\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 3\,\frac{1}{9} = \frac{1}{3}\,,$$

et aussi

$$0,99999\ldots = \sum_{n\geq 1} \frac{9}{10^n} = 9\,\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9\,\frac{1}{9} = 1\,!$$

On a la caractérisation suivante des nombres rationnels.

Proposition 4.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel qui a pour écriture décimale $\lfloor x \rfloor, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.*
Alors x est rationnel *si et seulement si son écriture décimale est* périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration : La démonstration générale est fastidieuse à cause des notations qui ne feraient que cacher les idées. Nous allons donc ne regarder que deux cas particuliers, mais leur étude permettra de se convaincre de la généralité du raisonnement.

Soit $x = 0,17073\,17073\,\underline{17073}\ldots$ On a

$$\begin{aligned} x &= \frac{17073}{10^5} + \frac{17073}{10^{10}} + \frac{17073}{10^{15}} + \ldots = 17073 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{5n}} \\ &= 17073 \, \frac{\frac{1}{10^5}}{1 - \frac{1}{10^5}} = 17073 \, \frac{1}{99999} \\ &= \frac{7}{41} \, . \end{aligned}$$

Maintenant, regardons le rationnel $x = \frac{13}{7}$. On calcule son développement décimal comme à l'école en posant la division euclidienne. On s'aperçoit qu'à chaque étape, le reste doit être un entier entre 0 et 6. Donc soit on tombe sur 0 et la division s'arrête (nombre fini de chiffres), soit au bout d'un nombre fini d'étapes (au plus 6 ici) on tombe sur un reste déjà vu puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles. À partir de là, le processus tourne en boucle et le développement est périodique. On a ainsi

$$\begin{aligned} x = 1 + \frac{\mathbf{6}}{7} &= 1 + \frac{1}{10}\frac{60}{7} = 1,8 + \frac{1}{100}\frac{\mathbf{4}0}{7} = 1,85 + \frac{1}{1000}\frac{\mathbf{5}0}{7} \\ &= 1,857 + \frac{1}{10^4}\frac{\mathbf{1}0}{7} = 1,8571 + \frac{1}{10^5}\frac{\mathbf{3}0}{7} = 1,85714 + \frac{1}{10^6}\frac{\mathbf{2}0}{7} \\ &= 1,857142 + \frac{1}{10^7}\frac{\mathbf{6}0}{7} = 1,857142\,857142\,\underline{857142}\ldots \end{aligned}$$

□

Il se peut que la période du rationnel commence *strictement après* la virgule :

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{10}\frac{50}{6} = 0,8 + \frac{1}{100}\frac{20}{6} = 0,83 + \frac{1}{1000}\frac{20}{6} = 0,83\underline{3}\ldots$$

2 À propos des restes des séries

Pour le moment, nous avons surtout regardé si des séries convergeaient ou non. Nous avons aussi vu - ou admis - la valeur de quelques sommes de séries, comme par exemple

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

ou

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

ou encore

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Ces sommes permettent de calculer e, π ou $\ln 2$ si on peut faire des sommes infinies, sauf que cela est bien sûr impossible. On devra donc faire une somme d'un nombre *fini* (mais grand) de termes et s'arrêter. Mais cela ne donnera pas d'encadrement de la valeur de ces nombres si on n'a pas d'estimation sur l'erreur commise. Cette erreur est

$$R_N = S - S_N = \sum_{n \geq N+1} u_n \, ,$$

soit le *reste d'ordre* N de la série (noter que la suite R_N *tend vers* 0 quand N tend vers l'infini).

Le but de cette partie est de majorer ce reste, ou déterminer son signe, pour quelques types de séries.

2.1 Série dominée par une série géométrique convergente

Proposition 4.2. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série telle qu'il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$, M *et* $\alpha \in [0, 1[$ *tels que*

$$\forall n > N_0 \ , \quad |u_n| \leq M\alpha^n \, .$$

Alors la série $(\sum u_n)$ *converge absolument et pour tout* $N \geq N_0$, *le reste vérifie*

$$|R_N| \leq \ \frac{M}{1-\alpha}\, \alpha^{N+1} \ \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \, .$$

Démonstration : Comme $(\sum \alpha^n)$ est une série géométrique convergente, la convergence absolue de $(\sum u_n)$ se déduit des théorèmes de comparaison. Pour obtenir une estimation du reste, on écrit que si $N \geq N_0$ et $K > N$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{K} u_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{K} |u_n| \leq M \sum_{n=N+1}^{K} \alpha^n = M \frac{\alpha^{N+1} - \alpha^{K+1}}{1-\alpha} \, .$$

Quand K tend vers l'infini, chaque expression a une limite, et on obtient

$$\left|\sum_{n\geq N+1} u_n\right| \leq M\frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha}\ .$$

□

Exemple : *Le reste de la série* $(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!})$ *vérifie* $0 \leq R_N \leq \frac{1}{N.N!}$ $(N \in \mathbb{N}^*)$.
En effet, pour tout $n > N$, on a

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{n-(N+1)} = \frac{(N+1)^{N+1}}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{n},$$

terme général d'une série géométrique convergente. Donc le reste de notre série vérifie

$$R_N = \sum_{n\geq N+1}\frac{1}{n!} \leq \frac{(N+1)^{N+1}}{(N+1)!}\left(\frac{1}{N+1}\right)^{N+1}\frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} = \frac{1}{(N+1)!}\,\frac{N+1}{N} = \frac{1}{N.N!}\ .$$

En prenant en compte les K premiers termes de la série $(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!})$ (cela correspond à prendre $N = K-1 \geq 1$), on obtient e avec la précision assurée suivante :

K termes	5	10	15
erreur au plus	$0,0105$	$3,1\times 10^{-7}$	$8,2\times 10^{-13}$
S_{K-1} (valeur approchée)	$\mathbf{2,7}083$	$2,\mathbf{7182\,81}52$	$2,7182\,81\mathbf{82\,8458}\,2$

N.B. On a $e \approx 2,7182\,8182\,8459\,04$.

2.2 Restes des séries de type Riemann

On reprend le théorème de comparaison avec une intégrale, dont ces séries relèvent, en le détaillant. On va ainsi obtenir une information aussi quand la série diverge.

Proposition 4.3. *Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge si et seulement si $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ a une limite finie quand $X \to +\infty$. On a de plus :*

- *si la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge, son reste d'ordre N vérifie*

$$0 \leq R_N \leq \lim_{X\to+\infty}\int_N^X f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

- *si la série* $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ *diverge, ses sommes partielles vérifient*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \sim \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration : Comme déjà expliqué, nous avons le contrôle

$$\sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_p^q f(x)dx \leq \sum_{n=p}^{q-1} f(n) \qquad (1 \leq p < q)\,.$$

Si la série converge, on prend $p = N$ et on utilise l'inégalité de gauche en faisant tendre q vers $+\infty$.
Si la série diverge, on prend $p = 1$, $q = N$ et on divise par $\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x (> 0)$ pour obtenir

$$1 + \frac{f(N)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\sum_{n=1}^N f(n)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x} \leq 1 + \frac{f(1)}{\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x}\ .$$

Quand N tend vers $+\infty$, l'intégrale tend vers $+\infty$, donc les deux bornes tendent vers 1. On a bien l'équivalence. □

Exemples :

- Pour la série convergente $(\sum \frac{1}{n^2})$, on obtient que

$$\sum_{n\geq N+1} \frac{1}{n^2} \leq \lim_{X\to+\infty} \int_N^X \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{X}\right) = \frac{1}{N}\,.$$

  On a donc $0 \leq R_N \leq \dfrac{1}{N}$ (convergence lente).

- Pour la série harmonique, on trouve que $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N$.

2.3 Restes des séries relevant du critère des séries alternées

Proposition 4.4. *Soit* (v_n) *une suite de nombres positifs décroissante et tendant vers* 0. *On pose* $u_n = (-1)^n v_n$. *Alors* $(\sum_n u_n)$ *est une série convergente et son reste vérifie*

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \right| \leq v_{N+1} \,.$$

De plus ce reste a même signe que le premier terme négligé u_{N+1}.

Démonstration : On a déjà vu que les sommes partielles paires et impaires S_{2p} et S_{2p+1} forment deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite. En outre, cette limite S est coincée entre les deux suites. Si on s'arrête au rang N, alors l'écart entre S_N et S_{N+1} vaut v_{N+1} et comme S est entre ces deux sommes, alors $|S - S_N| = |R_N| \leq v_{N+1}$. De plus $S - S_N = R_N$ est positif si N est impair et négatif si N est pair, cad. que R_N est du signe de u_{N+1}, le premier terme négligé. □

Exemple : Pour calculer $\ln 2$ à 10^{-8} près, on peut donc calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à un rang N tel que $1/(N+1) \leq 10^{-8}$.
Le rang (élevé !) $N = 10^8 - 1 = 99\,999\,999$ convient,
on trouve $\ln 2 \approx 0,69314718$.

3 †Quelques remarques sur les séries sur ordinateur

†Remarquons d'abord que la somme dans un ordinateur n'est pas une opération commutative ! Cela est dû à la troncation : des nombres peuvent être négligés s'ils ne changent pas une somme au-delà de l'erreur machine, même si la somme de tous ces nombres n'était pas négligeable. Regardons un exemple en *Xcas*.

†. Ce paragraphe a un statut de complément, il ne sera pas exposé en cours

```
1  Digits:=4;
```

$$4$$

```
2  0.0005+0.0005
```

$$0.001$$

```
3  0.001+1
```

$$1.001$$

```
4  1+0.0005
```

$$1.0$$

```
5  1.0+0.0005
```

$$1.0$$

Nous comprenons donc qu'il ne faut pas sommer de petits nombres avec les grands mais d'abord les petits nombres entre eux puis les grands. Les expériences suivantes montrent que le résultat du calcul d'une somme partielle peut être *différent suivant l'ordre de sommation.*

On a ainsi pour la série alternée $\left(\sum(-1)^{(n+1)}/n\right)$:

```
4  a:=0; pour j de 1 jusque 100000 faire
a:=evalf(a+(-1)^(j+1)/j,5); ffaire;
```

$$[0.0, \quad 0.69313]$$

```
5  a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+(-1)^(j+1)/j,5); ffaire;
```

$$[0, \quad 0.69318]$$

où la *somme de la série* est $\ln 2$, soit environ $0,693147$.

On peut aussi noter que la série $(\sum 1/n)$ converge *sur un ordinateur*, comme toute série dont le terme général tend vers 0, car les termes ajoutés finissent par devenir plus petits que la précision machine et l'ordinateur ne va faire qu'une somme finie de nombres. Ceci paraît contradictoire avec la divergence de la série, que nous avons montrée. Cette divergence signifie que le nombre obtenu par l'ordinateur *n'a pas de sens véritable*. De fait, le résultat du calcul va dépendre de la précision de la machine et de l'ordre de sommation, c'est une valeur approchée de la somme partielle d'un certain rang (pas trop élevé).

Faisons l'expérience avec la série ($\sum 1/n$) dont on calcule la somme partielle de rang 10^5 avec une précision de 5 chiffres ou de 13 chiffres. Le résultat est modifié :

```
1 Digits:=6;  2 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j,5); ffaire;
```

$$[0, \quad 12.0536]$$

```
3 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j,13); ffaire;
```

$$[0, \quad 12.0901]$$

Alors que, pour la série convergente ($\sum 1/n^2$), augmenter la précision de 5 chiffres à 10 chiffres pour la même somme partielle améliore l'approximation de la somme (rappelons qu'ici on a $R_N \leq 1/N = 10^{-5}$) :

```
1 Digits:=9;  2 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j^2,5);ffaire;
```

$$[0, \quad 1.64305]$$

```
3 a:=0; pour j de 100000 jusque 1 pas -1 faire
a:=evalf(a+1/j^2,10);ffaire;
```

$$[0, \quad 1.64492388]$$

où la somme de la série vaut $\pi^2/6$, soit environ $1,64493407$.

4 Convergence de la série de l'exponentielle

On sait que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $e^x = 1 + x + \ldots + x^N/N! + o(x^N)$ quand $x \to 0$, mais peut-on écrire carrément que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\ ? \tag{4.1}$$

Pour établir (4.1), il y a deux problèmes à considérer :

1. Pour x fixé, la somme de (4.1) a-t-elle un sens, cad. la série est-elle convergente ?
2. La somme obtenue est-elle bien égale à l'exponentielle ?

Notons que la réponse à la deuxième question n'est pas automatique : il existe des séries de Taylor qui convergent mais pas vers la fonction associée. Ce point sera vu plus en détail au second semestre. Nous allons nous limiter ici au cas de l'exponentielle.

Considérons donc la série $(\sum \frac{x^n}{n!})$ avec $x \in \mathbb{R}$ fixé.

1. Appliquons le critère de d'Alembert
$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 \ \text{ quand } n \to +\infty\ .$$
Comme $0 < 1$, la série converge bien pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour montrer (4.1), il s'agit de prouver que la série converge bien vers l'exponentielle. Pour cela, on utilise la formule *de Taylor avec reste intégral* :

Proposition 4.5. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$), alors pour tous x_0 et x dans I, on a*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt\,. \end{aligned}$$

Démonstration : On fait une récurrence sur k en utilisant que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}dt = & \left[-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right]_{x_0}^{x} \\ & - \int_{x_0}^{x} -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt\,. \end{aligned}$$

□

On l'applique pour f l'exponentielle, en $x_0 = 0$. Il s'agit donc de montrer que le reste intégral tend vers 0 dans la formule

$$e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\,.$$

Or, on a

$$\left|\int_0^x \frac{e^t}{N!}(x-t)^N dt\right| \leq |x|\frac{e^{|x|}}{N!}|x|^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0\,.$$

Donc l'identité (4.1) est bien vérifiée. □

5 Ordre de sommation

En général on ne peut pas changer l'ordre de sommation d'une série. Par exemple

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

mais

$$\sum_{n \text{ impairs}} \frac{1}{n} - \sum_{n \text{ pairs}} \frac{1}{n}$$

n'a pas de sens car les deux sommes sont positives infinies.

Explicitement, étant donnée une bijection $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on s'intéresse à la série modifiée $(\sum u_{\sigma(n)})$. Il s'agit donc d'étudier la suite des sommes partielles

$$S'_N = \sum_{n=0}^{N} u_{\sigma(n)},$$

qui est tout à fait *différente* de la suite (S_N).

Nous allons voir que cette modification peut avoir des effets frappants : on peut obtenir *n'importe quelle* valeur comme somme de la nouvelle série, ou même une série divergente.

Proposition 4.6. *Soit $(\sum_n u_n)$ une série réelle convergente mais non absolument convergente. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(\sum_n u_{\sigma(n)})$ ait pour somme ℓ.*

Démonstration : Écrire une preuve avec les notations rigoureuses et les indices serait trop complexe, nous expliquons plutôt la méthode.

Pour tout n, on définit v_n^+ comme étant u_n si $u_n \geq 0$ et 0 sinon, et v_n^- comme étant u_n si $u_n \leq 0$ et 0 sinon. On a alors

$$u_n = v_n^+ + v_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = v_n^+ - v_n^- .$$

On note respectivement S_N, T_N^+ et T_N^- la somme partielle de rang N de la série des u_n, resp. v_n^+ et v_n^-.

Pour tout N, on a ainsi $\sum_{n=0}^{N} |u_n| = T_N^+ - T_N^-$. Si les deux séries $(\sum v_n^+)$ et $(\sum v_n^-)$ convergeaient, la série $(\sum |u_n|)$ serait donc aussi convergente, ce qui n'est pas le cas. Et comme $S_N = T_N^+ + T_N^-$, si une seule des deux séries $(\sum v_n^+)$ et $(\sum v_n^-)$ convergeait, la série $(\sum u_n)$ serait divergente. Les hypothèses entraînent donc que ces deux séries divergent. En particulier, la suite (u_n) comporte une infinité de termes > 0 et une infinité de termes < 0.

Notons aussi que, comme $(\sum u_n)$ converge et $|v_n^\pm| \leq |u_n|$, on a $v_n^\pm \to 0$.

Fixons-nous un réel $\ell \in \mathbb{R}$ (le cas $\ell = \pm\infty$ est laissé en exercice). Nous ajoutons d'abord (dans l'ordre) des termes positifs v_0^+, $\ldots$, en oubliant les v_n^+ tels que $u_n < 0$ (cad. $v_n^+ \neq u_n$), jusqu'à dépasser strictement ℓ. Notons que cela est possible puisque la suite des sommes partielles des v_n^+ tend vers $+\infty$. Une fois dépassé ℓ, nous ajoutons, dans l'ordre, des termes *strictement* négatifs v_n^-, $\ldots$, correspondant aux indices n tels que $u_n < 0$ depuis le premier ; cela jusqu'à retomber strictement en-dessous de ℓ, ce qui arrive forcément pour la même raison. Puis on rajoute des termes v_n^+ suivants (en imposant que $u_n \geq 0$), etc.

On note qu'à chaque passage de l'autre côté de ℓ, on utilise au moins un terme non nul et donc qu'on épuise petit à petit nos suites (v_n^+) et (v_n^-) (privées de certains zéros). De plus chaque u_n apparaît comme exactement l'un des termes énumérés : v_n^+ si $u_n \geq 0$ ou v_n^- si $u_n < 0$, il s'agit bien d'un changement d'ordre de sommation.

Il ne reste plus qu'à voir que la limite de ce procédé est ℓ. Pour cela, on remarque qu'à chaque fois qu'on dépasse ℓ, en montant ou en descendant, on ne s'en éloigne pas de plus que du dernier terme $v_n^\pm$ utilisé. Comme $v_n^\pm$ tend vers 0, ces écarts deviennent de plus en plus petits et les sommes partielles oscillent autour de ℓ en tendant vers ℓ. $\square$

Exemples :

- Voici un exemple assez frappant. On a déjà admis que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2 \; .$$

En fait peu importe la valeur de cette somme pour cet exemple, mais ce sera plus simple de l'écrire comme cela. Nous allons maintenant réordonner la sommation en prenant successivement un indice impair et deux indices pairs tout en gardant leur ordre global :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

On montre alors que la nouvelle série est $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ définie par

$$u_{3k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad u_{3k+2} = \frac{-1}{4k+2} \quad \text{et} \quad u_{3k+3} = \frac{-1}{4k+4} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Mais

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} = \frac{1}{4k+2}$$

donc une sommation par paquets de 1 ou 2 termes donne la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} + \dots$$

qui est convergente et qui est la moitié de la série d'origine. Et on peut bien appliquer la proposition du cours sur les sommations par paquets, car on montre que la suite (u_n) tend vers 0 :

tout $n \geq 1$ s'écrit $n = 3k + i$, avec $1 \leq i \leq 3$ et $k \in \mathbb{N}$, i et k uniques. On a alors pour tout $n \geq 4$:

$$|u_n| \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{2k} = \frac{3}{2(n-i)} \leq \frac{3}{2(n-3)}.$$

Et donc le terme général u_n de notre nouvelle série tend bien vers 0.

On obtient alors que $\left(\sum u_n\right)$ est convergente de somme

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} + \dots = \frac{\ln 2}{2},$$

et donc le changement d'ordre de sommation a diminué la somme de la série de moitié !

- Considérons la série semi–convergente $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})$ dont on réarrange l'ordre des termes ainsi
$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$
On montre de la même manière que la succession des termes est
$$\dots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots \quad (n \geq 1).$$
Ici encore, le terme général de la nouvelle série tend vers 0. On peut donc sommer par paquets de 3. Un équivalent de $\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}$ est $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$. Par comparaison à une série de Riemann divergente, on en déduit que la série réarrangée diverge.

Toutefois, si jamais on sait que la convergence est *absolue*, on peut changer l'ordre de sommation.

Proposition 4.7. *Soit $(\sum_n u_n)$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(\sum_n u_{\sigma(n)})$ est aussi absolument convergente et a même somme que $(\sum_n u_n)$.*

Démonstration : Posons $v_n = |u_n|$. On veut montrer que la convergence de $(\sum v_n)$ entraîne celle de $(\sum v_{\sigma(n)})$. Il s'agit de séries de termes positifs. La suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} v_{\sigma(n)})$ est donc croissante et il suffit qu'elle soit majorée pour avoir la convergence. On a en effet
$$\sum_{n=0}^{N} v_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\max_{k=0,..,N} \sigma(k)} v_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n \,.$$
Ainsi la série $(\sum |u_{\sigma(n)}|)$ converge.

Montrons que les sommes des deux séries sont égales. Pour N donné, il existe $N' \geq N$ minimal tel que $\{0, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N')\}$ c'est-à-dire qu'il faut $N'+1$ termes réarrangés $u_{\sigma(n)}$ pour qu'on ait bien inclus les $N+1$ premiers termes u_n. Il y a sûrement d'autres valeurs de $\sigma(n)$ que $0, .., N$ dans les $N'+1$ premiers $\sigma(n)$. Appelons I cet ensemble de valeurs supplémentaires, qui sont forcément plus grandes que N. On a alors
$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)} \right| = \left| \sum_{n \in I} u_n \right| \leq \sum_{n \geq N+1} |u_n|$$

où on a bien utilisé le fait que $(\sum |u_n|)$ converge. De plus, comme le reste R_N de cette série tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, il en est de même pour

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N'} u_{\sigma(n)} \right| .$$

Chacune des deux sommes partielles tend vers la somme de la série associée (rappelons-nous que $N' \geq N$ et donc N' tend aussi vers $+\infty$), et donc les sommes des deux séries sont égales. $\square$

Ces résultats montrent que pour une série de termes de signe quelconque, faire la différence entre semi–convergence et convergence absolue est primordial.

* * *