Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 2, indications de correction,
examen du 19 mai 2016, de 9h à 12h

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies. On peut traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes, excepté dans III B) les résultats de III, 3. et 4.

Dans tout le sujet, on rappelle que l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$ du groupe fini G est munie du produit scalaire hermitien

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f_1(x)} f_2(x) \, .$$

I (4 points)

Soit G un groupe abélien fini. On considère f non nulle dans l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. On note $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$ sa transformée de Fourier, et $\mathrm{Supp}\,(f)$ son support, c.a.d. l'ensemble des $x \in G$ tels que $f(x) \neq 0$. On définit de même $\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})$. On souhaite montrer que

$$|\mathrm{Supp}\,(f)| \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})| \geqslant |G| \quad (*)$$

On note

$$M = \sup\{|f(x)|;\, x \in G\}, \quad ||f||^2 = \langle f, f \rangle \, .$$

1. Établir les inégalités $||f||^2 \leqslant \frac{M^2}{|G|} |\mathrm{Supp}\,(f)|$ et $M \leqslant \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|$.

La seconde inégalité résulte de la formule d'inversion $f(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\overline{\chi}(x)$ ($x \in G$), et du fait que $|\chi(x)| = 1$, puisque χ morphisme est à valeurs dans les racines $|G|$–ièmes de l'unité.

2. En déduire grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $M^2 \leqslant \frac{|\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|}{|G|} ||\widehat{f}||^2$ (*on pourra considérer la fonction indicatrice de* $\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})$).

Notons i_S cette fonction indicatrice. On a $||i_S||^2 = \frac{|\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|}{|G|}$. On applique Cauchy-Schwarz aux deux fonctions $|\widehat{f}|$ et i_S sur $\widehat{G}$; le carré du terme de droite de la seconde inégalité de 1., soit $\langle |\widehat{f}|, i_S \rangle^2$, est donc majoré par $||\widehat{f}||^2 \cdot ||i_S||^2 = \frac{|\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|}{|G|} ||\widehat{f}||^2$.

3. Déduire de 2. que $M^2 \leqslant ||f||^2 \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|$.
Cela résulte de la formule de Plancherel $||\widehat{f}||^2 = |G| \cdot ||f||^2$.

4. Conclure que $||f||^2 \leqslant \frac{||f||^2}{|G|} |\mathrm{Supp}\,(f)| \cdot |\mathrm{Supp}\,(\widehat{f})|$, ce qui établit $(*)$.

T.S.V.P.

II (5 points)

Soit G un groupe dont la table de caractères est la suivante:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
V_1	1	1	1	1	1	1
V_2	1	-1	1	-1	i	$-i$
V_3	1	1	1	1	-1	-1
V_4	1	-1	1	-1	$-i$	i
V_5	2	-2	-1	1	0	0
V_6	2	2	-1	-1	0	0

1. Déterminer le cardinal de G.

La 1ère colonne est la seule à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc $C_1 = \{1_G\}$. La formule de Burnside donne alors $\langle C_1, C_1 \rangle = 12 = |G|$.

2. Décrire le sous–groupe dérivé et le centre de G en terme de classes de conjugaison C_j, et donner le cardinal de ces sous–groupes.

On sait que le sous–groupe dérivé de G est la réunion des classes de conjugaison C_j sur lesquelles tous les caractères de degré 1 de G valent 1; au vu des 4 premières lignes de la table, on obtient $D(G) = C_1 \cup C_3 = \{1_G\} \cup C_3$. De plus le cardinal de C_3 vaut $\frac{|G|}{\langle C_3, C_3 \rangle} = 2$, ainsi $|D(G)| = 3$.

Une classe de conjugaison C_j est dans le centre de G (sous–groupe distingué) ssi son cardinal est 1, ssi le centralisateur de chacun de ses éléments est G, autrement dit ssi on a $\langle C_j, C_j \rangle = |G|$; on trouve ainsi que $Z(G) = C_1 \cup C_2$, de cardinal $1 + 1 = 2$. (NB: une caractérisation alternative des classes du centre est le fait que leurs éléments agissent par homothétie sur chaque représentation irréductible, ce qui se traduit dans la table par la propriété $|\chi_i(C_j)| = \chi_i(1)$, pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$.)

3. Déterminer l'ordre et la structure de l'abélianisé de G.

Par 2., on a $|G_{ab}| = 12/3 = 4$; ou encore c'est le nombre de caractères de degré 1 dans la table de G. La table de caractères de ce groupe d'ordre 4 s'obtient en supprimant les 2 dernières lignes de la table de G, ainsi que les 3^e et 4^e colonnes, devenues redondantes; la 2^e ligne est alors un caractère d'ordre 4 (d'image le groupe $\mathbb{U}_4$). Le groupe $\widehat{G_{ab}}$, que l'on sait par le cours être isomorphe au groupe abélien fini G_{ab}, donc d'ordre 4, est par suite cyclique, et on conclut que G_{ab} l'est aussi, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. (autre raisonnement: le fait que par exemple i apparaisse dans la colonne de C_5, ligne 2, montre que $\chi_2(C_5)$ est d'ordre 4, et donc puisque χ_2, caractère de degré 1, est un morphisme, l'ordre des éléments g de C_5 est multiple de 4, ET, surtout!, en raisonnant avec G_{ab} et le caractère induit par factorisation $\overline{\chi_2}$, il en est de même pour l'ordre de leur image canonique $\bar{g}$ dans G_{ab}; sachant par ailleurs que $|G_{ab}| = 4$, cela montre aussi que $G_{ab} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.)

4. Donner une somme de représentations irréductibles isomorphe à la représentation $\mathrm{Hom}(V_5, V_5)$.

La représentation $\mathrm{Hom}(V_5, V_5)$ *a pour caractère* $\chi = \overline{\chi_5}\chi_5$*: 4/4/1/1/0/0 où* χ_5 *est le caractère de* V_5*. Cette représentation est isomorphe à* $\oplus_{i=1}^{6} V_i^{m_i}$*, où l'entier* m_i *vaut* $\langle \chi, \chi_i \rangle$ *(NB: le lemme de Schur assure que* $m_1 = 1$*). On calcule ces produits hermitiens en utilisant les cardinaux des* C_j *(obtenus comme en 2. lors de la détermination du centre,* $|C_j| = \frac{|G|}{\langle C_j, C_j \rangle}$*), soit 1/1/2/2/3/3. Par exemple* $\langle \chi, \chi_3 \rangle = \frac{1}{12}(4 + 4 + 1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 + 0) = 1$*. On conclut ainsi que* $\mathrm{Hom}(V_5, V_5)$ *est isomorphe à* $V_1 \oplus V_3 \oplus V_6$ *(cela se vérifie aussi par simple addition de lignes sur la table).*

III

Soient G un groupe fini et H un sous–groupe de G "ne rencontrant pas ses conjugués", c'est-à-dire tel que :

$$H \cap gHg^{-1} = \{1\}$$

pour tout $g \in G \setminus H$. On note N la réunion de $\{1\}$ et du complémentaire dans G de $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$. On souhaite montrer que N est un *sous–groupe distingué* de G, et que G est le produit semi–direct de N et H. Dans la partie A) on admettra pour 3. et 4. le fait suivant, dont la preuve fera indépendamment l'objet de la partie B): *tout caractère de* H *se prolonge de manière unique en un caractère de* G *constant sur* N*.*

A (4 points)

1. Montrer que si $H \neq \{1\}$ le nombre de sous–groupes gHg^{-1} distincts ($g \in G$) est $[G : H]$. Déterminer le cardinal de N.

Soient $g, g' \in G$*. Alors* $gHg^{-1} \cap g'Hg'^{-1} = g\left(H \cap g^{-1}g'H(g^{-1}g')^{-1}\right)g^{-1}$ *est égal à* $\{1\}$ *ssi* $g^{-1}g' \notin H$ *(par l'hypothèse sur* H*), c'est-à-dire ssi* $gH \neq g'H$*. De plus comme* $H \neq \{1\}$*, cette intersection est triviale ssi les conjugués* gHg^{-1} *et* $g'Hg'^{-1}$ *sont distincts. On en déduit que les deux conjugués sont égaux ssi* g *et* g' *ont même classe à gauche modulo* H*, et qu'il y a donc* $[G : H]$ *conjugués de* H *distincts.*

Comme deux conjugués distincts de H *ne s'intersectent qu'en* $\{1\}$*, on calcule alors, si* $H \neq \{1\}$*:* $|N| = 1 + (|G| - 1 - [G : H](|H| - 1)) = [G : H]$*. Et si* $H = \{1\}$*, alors* $N = G$ *et la formule est encore vraie.*

2. Montrer que tout groupe fini admet une représentation fidèle.

La représentation régulière du groupe est fidèle.

Dans la suite de cette partie on note χ le caractère d'une certaine représentation fidèle de H, et $\widetilde{\chi}$ le caractère de G constant sur N qui prolonge χ (l'existence de $\widetilde{\chi}$ sera établie en B).

3. a) Montrer que l'ensemble des $x \in G$ tels que $\widetilde{\chi}(x) = \widetilde{\chi}(1)$ est égal à N.

Par définition de $\widetilde{\chi}$, N est inclus dans cet ensemble. De plus si $x \notin N$, x est conjugué à un $h \in H$, $h \neq 1$, donc $\widetilde{\chi}(x)$ vaut $\chi(h)$, et puisque χ est le caractère d'une représentation fidèle et $h \neq 1$, $\chi(h) \neq \chi(1) = \widetilde{\chi}(1)$, par suite $\widetilde{\chi}(x) \neq \widetilde{\chi}(1)$.

b) Qu'en déduit–on pour la partie N de G ?

Par le cours, l'ensemble des x de 3.a) est précisément le noyau de toute représentation ρ de G dont le caractère χ_ρ est le caractère $\widetilde{\chi}$. Ainsi $N = \ker \rho$, c'est donc un sous–groupe distingué de G.

4. Montrer avec 1. que $NH = G$.

Par définition de N, on a $N \cap H = \{1\}$, donc comme N et H sont des sous–groupes, l'application $(n,h) \mapsto nh$ de $N \times H$ dans G est injective (aisé), ainsi le cardinal de la partie image NH vaut $|N| \times |H| = |G|$ (par 1.). Cela conclut. Notons que comme de plus N est distingué dans G, le groupe $G = NH$ est en fait produit semi–direct (interne) de N et H.

B (9 points)

On s'interdit ici d'utiliser les résultats des questions 3. et 4.

5. a) Justifier que N est stable par conjugaison par tout élément de G.

En effet on vérifie immédiatement que le complémentaire de N dans G est stable par conjugaison.

b) Soient $h, h' \in H$ et $g, g' \in G$ tels que $ghg^{-1} = g'h'g'^{-1} \neq 1$. Montrer que $g^{-1}g' \in H$.

L'hypothèse entraîne que $H \neq \{1\}$ et que les conjugués gHg^{-1} et $g'Hg'^{-1}$ sont égaux (cf. 1.). On a montré en 1. que cela équivaut à ce que $gH = g'H$, cad. que $g^{-1}g' \in H$.

c) Soit f une fonction centrale sur H. Démontrer avec a) et b) qu'il *existe* une unique fonction centrale $\widetilde{f}$ sur G qui satisfait aux deux propriétés:

(i) $\widetilde{f}$ prolonge f (i.e. $\widetilde{f}(h) = f(h)$ si $h \in H$),

(ii) $\widetilde{f}(x) = f(1)$ si $x \in N$ (i.e. $\widetilde{f}$ est constante sur N).

Puisque G est la réunion disjointe de N et des conjugués de $H \setminus \{1\}$, (ii) impose la valeur de $\widetilde{f}$ sur N, et puisque $\widetilde{f}$ doit être centrale, sa valeur sur chaque conjugué de $H \setminus \{1\}$ est imposée par (i), de plus un tel prolongement existe bien: en effet les différents conjugués de $H \setminus \{1\}$ sont par hypothèse disjoints, et si on y a deux écritures d'un même élément, on voit grâce à b) et au fait que f est centrale sur H que le prolongement en cet élément est bien défini (précisément, avec les notations de b), h est conjugué de h' par l'élément $g^{-1}g' \in H$, donc on a $f(h) = f(h') =: \widetilde{f}(ghg^{-1})$. On vérifie enfin facilement grâce à a) que la fonction sur G (unique) ainsi définie est effectivement centrale.

6. Soient f et $\widetilde{f}$ comme en 5., et soit α une fonction centrale sur G. On souhaite montrer que

$$\langle \alpha, \widetilde{f} \rangle_G = \langle \alpha_H, f \rangle_H + f(1)\langle \alpha, 1 \rangle_G - f(1)\langle \alpha_H, 1 \rangle_H \quad (**).$$

a) Montrer que les termes de $(**)$ dépendent linéairement de f. Établir $(**)$ pour $f = 1$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et f_1, f_2 sont des fonctions centrales sur H, alors la fonction sur G $\lambda\widetilde{f_1} + \widetilde{f_2}$ est centrale, prolonge la fonction sur H $\lambda f_1 + f_2$, et vaut $(\lambda f_1 + f_2)(1)$ sur N; par 5.c) elle est donc égale à $\widetilde{\lambda f_1 + f_2}$. En combinant avec la linéarité à droite du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, on obtient que le terme de gauche de $(**)$ dépend linéairement de f. Pour ce qui est du terme de droite, on utilise la linéarité de $f \mapsto f(1)$ et la linéarité à droite du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.
Si $f = 1$, la fonction 1 sur G vérifie les 3 conditions qui définissent $\widetilde{1}$ en 5.c). Donc $\widetilde{1} = 1$ et $(**)$ pour $f = 1$ en découle.

b) On suppose que $f(1) = 0$. On note $\mathcal{R}$ un système de représentants des classes à gauche modulo H: les différents conjugués de H sont donc les rHr^{-1} pour r décrivant $\mathcal{R}$, et tout conjugué d'un élément de $H \setminus \{1\}$ s'écrit de manière unique rhr^{-1}, avec $(r, h) \in \mathcal{R} \times H$. Établir $(**)$ dans ce cas.

Comme $f(1) = 0$, $\widetilde{f}$ est nulle en dehors des conjugués de $H \setminus \{1\}$, on trouve donc $|G| \langle \alpha, \widetilde{f} \rangle_G = \sum_{(r,h) \in \mathcal{R} \times H} \overline{\alpha(rhr^{-1})} \widetilde{f}(rhr^{-1}) = \sum_{(r,h) \in \mathcal{R} \times H} \overline{\alpha(h)} f(h)$, ce qui vaut $[G : H] \cdot |H| \langle \alpha_H, f \rangle_H$ et donc établit $(**)$.

c) Conclure que $(**)$ est vérifiée pour toute f fonction centrale sur H.

Toute telle f s'écrit $f(1) \cdot 1 + (f - f(1))$, combinaison linéaire de la constante 1 et d'une fonction centrale nulle en $1 = 1_H$.On conclut à $(**)$, linéaire en f, avec a) et b).

7. (notations f et $\widetilde{f}$ comme en 5.). En déduire que $\langle 1, \widetilde{f} \rangle_G = \langle 1, f \rangle_H$, puis que l'application $t\colon f \mapsto \widetilde{f}$ de $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[H]$ dans $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[G]$ est une isométrie, c'est-à-dire que pour toute f dans $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[H]$ on a

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{f} \rangle_G = \langle f, f \rangle_H \,.$$

Puisque $||1||_G^2 = ||1||_H^2 = 1$, on a avec $(**)$: $\langle 1, \widetilde{f} \rangle_G = \langle 1, f \rangle_H + f(1)\langle 1, 1 \rangle_G - f(1)\langle 1, 1 \rangle_H = \langle 1, f \rangle_H$. En conjuguant cette identité, on obtient $\langle \widetilde{f}, 1 \rangle_G = \langle f, 1 \rangle_H$. Ceci fournit grâce à 5.c(i) la deuxième égalité demandée, en écrivant $(**)$ avec $\alpha = \widetilde{f}$.

8. Soit χ un caractère de H; on note $\widetilde{\chi} = t(\chi)$.

a) Pour tout caractère α de G, montrer avec $(**)$ que $\langle \alpha, \widetilde{\chi} \rangle_G \in \mathbb{Z}$.

On applique $(**)$ et les faits suivants: $\chi(1) \in \mathbb{N}$ (degré de la représentation), et de même pour le produit hermitien de 2 caractères: de fait $\langle \alpha_H, \chi \rangle$ est la dimension de $\mathrm{Hom}_H(X, V)$, où X (resp. V) est une représentation de G (resp. H) de caractère α (resp. χ) (ou encore, on décompose les 2 caractères en irréductibles avec Maschke, et on obtient par sesquilinéarité et Schur que leur produit hermitien est un entier).

b) Montrer que $\widetilde{\chi}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{s} c_i \chi_i$, avec $c_i \in \mathbb{Z}$, où $\chi_1, \ldots, \chi_s$ sont les caractères irréductibles de G.

On sait que les $(\chi_i)_i$ forment une base de $\mathrm{Cent.}\,\mathbb{C}[G]$, donc on obtient une telle écriture de $\widetilde{\chi}$, avec des c_i dans $\mathbb{C}$. L'orthonormalité de la base des $(\chi_i)_i$ entraîne alors: pour tout i, $\langle \chi_i, \widetilde{\chi} \rangle_G = c_i$, et on conclut avec 8.a).

c) Montrer avec b) et 7. que si χ est irréductible, $\widetilde{\chi}$ est un caractère irréductible de G.

On sait qu'un caractère est irréductible ssi son carré hermitien vaut 1. *En combinant avec 7., on obtient que* $\langle \widetilde{\chi}, \widetilde{\chi} \rangle_G = 1$. *Avec 8.b), cela s'écrit donc* $\sum_{i=1}^{s} |c_i|^2 = 1$, *où chaque* $c_i \in \mathbb{Z}$. *Par suite tous les* c_i *sauf un sont nuls, et on trouve que* $\epsilon\widetilde{\chi}$ *est un caractère irréductible, pour un* ϵ *dans* ± 1. *Or on a* $\widetilde{\chi}(1) = \chi(1) \in \mathbb{N}$, *et de même pour* $(\epsilon\widetilde{\chi})(1)$. *Par suite* $\epsilon = 1$ *et on conclut.*

d) Conclure que l'image par t de tout caractère de H est un caractère de G.

On a montré en 6.a) que t *est linéaire; par Maschke, tout caractère* χ *de* H *est somme de caractères irréductibles. On conclut donc en appliquant* t, *du fait de 8.c), que* $t(\chi)$ *est somme de caractères irréductibles de* G, *donc un caractère de* G.

Terminons par deux commentaires sur ce théorème, dû à Frobenius:

- bien sûr, du fait que G est finalement produit semi-direct de N et H, on a aussi que toute *représentation* de H se prolonge en une représentation de G, triviale sur N.

- citons deux familles d'exemples de tels couples (G, H) vérifiant l'hypothèse de III (couples *de Frobenius*): si $\mathbb{F}_q$ est un corps fini, et G désigne le groupe des applications affines $x \mapsto ax + b$ sur $\mathbb{F}_q$ (où $a \in \mathbb{F}_q^*$ et $b \in \mathbb{F}_q$, le sous–groupe H des homothéties $x \mapsto ax$ ne rencontre pas ses conjugués. Il en est de même dans le groupe diédral d'ordre $2(2k+1)$ pour le sous–groupe H engendré par une réflexion.

$\diamond \diamond \diamond$