Université Joseph Fourier
Licence LST, L3 mathématiques

Mat365 - Algèbre 3

Examen du 27 juin 2008

Durée: 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Les quatre exercices sont indépendants. On peut à tout moment admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes. *Chaque réponse doit être justifiée; la qualité de la rédaction sera un élément important de l'appréciation.*

I Questions isolées

1) On pose $L = \mathbb{Q}[X]/(X^2+2X+4)$. Construire, s'il en existe, un isomorphisme de corps entre L et $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ (resp. entre L et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$).

2) On note K le corps $\mathbb{Q}(i)$.
Donner une clôture algébrique $\overline{K}$ du corps K. L'extension $\overline{K} \supset K$ est–elle finie?

II Cardinal du groupe de Galois d'un polynôme

1. Soient K un corps de caractéristique 0, et $P \in K[X]$ un polynôme *irréductible*. On note n le degré de P, E un corps de décomposition de P sur K, et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les racines de P dans E. Enfin on pose $G = \mathrm{Gal}(P, K) = \mathrm{Gal}(E \mid K)$.

a) Montrer que l'extension $K(\gamma_1) \supset K$ est galoisienne si et seulement si $E = K(\gamma_1)$.

b) On suppose G abélien. Montrer que $\operatorname{card} G = n$.

2. Dans cette partie on montre avec un exemple que la réciproque de 1b) n'est pas vraie.

On pose $\gamma = \sqrt[4]{2} + i$.

a) Prouver que $i \in \mathbb{Q}(\gamma)$ (on pourra considérer un polynôme rationnel annulateur de $\gamma - i$).

b) En déduire que $\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. Que vaut $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$?

c) L'extension $\mathbb{Q}(\gamma) \supset \mathbb{Q}$ est–elle galoisienne?

d) On note $P = \mathrm{Irr}(\gamma, \mathbb{Q})$, $G = \mathrm{Gal}(P, \mathbb{Q})$. Quel est le cardinal du groupe G?

e) Existe–t–il F sous–corps de $\mathbb{Q}(\gamma)$ tel que $F \supset \mathbb{Q}$ ne soit pas galoisienne?

f) Montrer que G n'est pas abélien.

T.S.V.P.

III Corps finis

On considère le polynôme $P = X^4 + X + 2$ de $\mathbb{F}_3[X]$, et on note α une racine de P dans une extension de $\mathbb{F}_3$.

1) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_9$.

2) Quel est le degré de α sur $\mathbb{F}_3$? Donner une base de $\mathbb{F}_3(\alpha)$ sur $\mathbb{F}_3$.

3) Quel est le degré de α sur $\mathbb{F}_9$? Le polynôme P est–il irréductible dans $\mathbb{F}_9[X]$?

4) Donner le degré sur $\mathbb{F}_3$ de α^9 et celui de α^{10}.

5) Donner la liste des sous–corps de $\mathbb{F}_3(\alpha)$.

6) Trouver le nombre des polynômes irréductibles unitaires de degré 4 sur $\mathbb{F}_3$ (on pourra considérer les degrés sur $\mathbb{F}_3$ des différents éléments d'une extension convenable de $\mathbb{F}_3$).

IV Une extension réelle

Soit c le réel $\cos(2\pi/17)$. On pose aussi $\zeta = e^{2\pi i/17}$ et $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta) \,|\, \mathbb{Q})$. Dans cet exercice on étudie l'extension réelle $\mathbb{Q}(c) \supset \mathbb{Q}$; pour cela il sera souvent utile de raisonner à partir de l'extension $\mathbb{Q}(\zeta) \supset \mathbb{Q}$.

1) Quel est le degré de ζ sur $\mathbb{Q}$? Déterminer le degré de c sur $\mathbb{Q}$.

2) L'extension $\mathbb{Q}(c) \supset \mathbb{Q}$ est–elle galoisienne?

3) Déterminer son groupe de Galois Γ à isomorphisme près. Expliciter un automorphisme d'ordre maximal de $\mathbb{Q}(c)$ (on pourra commencer par expliciter un élément de G d'ordre maximal).

4) Donner les différentes images de c sous l'action de Γ. Montrer qu'elles forment une $\mathbb{Q}$–base de $\mathbb{Q}(c)$.

5) Faire une liste des sous–corps de $\mathbb{Q}(c)$.

- $\diamondsuit$ -