Université Joseph Fourier
Licence LST, L3 mathématiques

Mat366 - Algèbre II

Examen du 29 juin 2007

Durée: 3 heures. Documents et calculatrices interdits.
Les quatre exercices sont indépendants. On peut à tout moment admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

I Corps à 8 éléments

1) Donner une construction du corps $\mathbb{F}_8$. Donner une base B de ce corps sur $\mathbb{F}_2$.

2) Choisir α dans $\mathbb{F}_8 \setminus \mathbb{F}_2$ et écrire les puissances de α dans la base B.

3) Quelles puissances de α ont même polynôme minimal sur $\mathbb{F}_2$ que α?

4) Quel est le sous–corps $\{x \in \mathbb{F}_8 \mid x^4 = x\}$?

II Extension algébrique de $\mathbb{R}$

Soit K un corps qui contient strictement $\mathbb{R}$. On suppose que l'extension $K \supset \mathbb{R}$ est algébrique.

1) Soit $x \in K \setminus \mathbb{R}$, et P son polynôme minimal sur $\mathbb{R}$. Montrer que le corps $\mathbb{C}$ est un corps de rupture de P sur $\mathbb{R}$.

2a) Quelles sont les extensions algébriques de $\mathbb{C}$?

2b) Montrer que le corps K est isomorphe à $\mathbb{C}$.

III Une extension finie non monogène

Soit L le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_2(X, Y)$.

1) Le corps L est–il fini? Quelle est sa caractéristique?

2) On note K l'image de L par le morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_2\colon x \mapsto x^2$. Montrer que $K = \mathbb{F}_2(X^2, Y^2)$.

3a) Trouver le degré de X sur K.

3b) Montrer que l'extension $L \supset K$ est finie et déterminer son degré.

4) En déduire que l'extension $L \supset K$ n'est pas monogène, c'est–à–dire que pour tout $f \in L$, $L \neq K(f)$.

T.S.V.P.

IV Une extension cyclotomique

On note $P = X^{11} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, et ζ une racine $\neq 1$ de P dans $\mathbb{C}$.

1) Donner le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$. Quel sous–corps E de $\mathbb{C}$ est le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$? Donner une base de E sur $\mathbb{Q}$.

2) Déterminer le groupe de Galois G de P sur $\mathbb{Q}$ et en donner un générateur g.

3) On pose $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$. L'extension $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ est–elle galoisienne? Déterminer le sous–groupe H de G qui laisse fixe $\mathbb{Q}(\alpha)$. Donner le degré de α sur $\mathbb{Q}$.

4) *(cette question ne sert pas dans la suite)*
Calculer le polynôme minimal U de α sur $\mathbb{Q}$. *Indication:* pour $j \in \{2, \cdots, 5\}$, on pourra exprimer $\zeta^j + \zeta^{11-j}$ comme polynôme en α, et utiliser 1).

5) Déduire de 3) le groupe $\mathrm{Gal}(U, \mathbb{Q})$ à isomorphisme près.

6) Donner toutes les extensions intermédiaires $E \supset F \supset \mathbb{Q}$, sous la forme $F = \mathbb{Q}(\gamma)$, et indiquer les groupes de Galois associés, à isomorphisme près.

- $\diamondsuit$ -