Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 1, examen

le 8 janvier 2018, de 13h30 à 16h30

Aucun document ni téléphone n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée***; la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies. On peut traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes.*

I

On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, sous-anneau de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tout élément de A s'écrit de manière unique sous la forme $x = a + b\sqrt{10}$, où a et $b \in \mathbb{Z}$.

2. Donner tous les automorphismes g du corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10}\,)$, et montrer que pour chacun on a $g(A) = A$. On obtient ainsi des automorphismes de l'anneau A.

3. On note $N\colon A \to \mathbb{Z}$ l'application $a + b\sqrt{10} \mapsto a^2 - 10\,b^2$, où $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Exprimer N en fonction des automorphismes du corps K.

b) Pour quels $x \in A$ a-t-on $N(x) = 0$?

c) Montrer que N est multiplicative, c.a.d. que $N(xx') = N(x)N(x')$, pour tous $x, x' \in A$.

d) Montrer que $x \in A^\times$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

4. a) Montrer que 3 n'est pas de la forme $N(x)$, pour $x \in A$ *(on pourra argumenter par réduction modulo* 5*)*.

b) Montrer que 3 est irréductible dans A.

c) En remarquant que $3^2 = 10 - 1$, montrer que 3 n'est pas premier dans A.

5. a) L'anneau A est-il factoriel?

b) Est-ce que tout élément non nul de A admet une décomposition comme produit d'un inversible et d'éléments irréductibles de A ?

6. On note I l'idéal $(3, 1 + \sqrt{10}\,)$ de A.

a) A-t-on $I = A$? *(on pourra utiliser la projection canonique $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.)*

b) I est-il un A-sous-module libre de A ?

T.S.V.P.

II

1. Montrer que le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est algébriquement clos. Quel est son degré sur $\mathbb{Q}$?

2. Soit $\alpha = (1+i)\sqrt[4]{2}$.

a) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$.

b) Quel est le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},\, i)$?

c) Soit D le sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$. Expliciter D et et déterminer son degré $[D : \mathbb{Q}]$.

III

1. Parmi les anneaux suivants, étudier lesquels sont isomorphes entre eux, et lesquels sont des corps:

$$A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \ ; \ B = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\,; \ C = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X - 1)\,;$$
$$D = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X^2 - 1)\,; \ E = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X)\,.$$

2. On note γ, resp. δ la classe de X dans l'anneau quotient C resp. D.

a) Donner le cardinal de C et une base $\mathcal{B}$ de C sur $\mathbb{F}_3$.

b) Exprimer dans $<\gamma>$ puis dans $\mathcal{B}$ les racines du polynôme minimal de γ sur $\mathbb{F}_3$.

c) À l'aide de b), trouver l'ordre de γ dans $C^\times$, puis celui de $-\gamma$.

d) Expliciter un générateur γ' du groupe $C^\times$ et exprimer -1 et γ comme puissances de γ'.

e) Quel est le polynôme minimal de γ^{-1} sur $\mathbb{F}_3$? Exprimer γ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

f) Expliciter un isomorphisme de D sur C.

3. Déterminer le sous-corps de C formé des x tels que $x^9 = x$.

4. Quel est le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré 3 sur $\mathbb{F}_3$?

IV

Dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^3$ on considère le sous-module N formé des (x, y, z) tels que $7x + 3y - 4z = 0$.

1. Expliciter une famille libre (f_1, f_2) dans N, *choisie de sorte* qu'en notant $f_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$, on ait $y_1 = x_2 = 0$.

Dans la suite on note N' le sous-module $< f_1, f_2 >$ de $\mathbb{Z}^3$.

2. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{Z}^3$ adaptée au sous-module N' de $\mathbb{Z}^3$.

3. Montrer que $N =< e_1, e_2 >$. Quels sont les facteurs invariants de N dans $\mathbb{Z}^3$?

4. Plus généralement, soient $m \geq 2$ un entier et $f\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ une application linéaire non nulle. On pose $N = \operatorname{Ker} f$.

a) Montrer que f s'écrit $(x_i)_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i x_i$, où $(a_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$.

b) Quels sont les facteurs invariants de N dans $\mathbb{Z}^m$?

$\diamond \diamond \diamond$