Master1, mathématiques
Algèbre 1

Devoir à la maison n° 1

à rendre le 5 novembre 2004

I

Soient n, m entiers tels que $n > m \geq 2$. On note $S_{m,n}$ le rationnel $\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i}$. Pour tout entier $i \geq 1$, $v_2(i)$ désigne la plus grande puissance de 2 qui divise i.

1. Montrer que $\mu = \sup\{v_2(i) \mid m \leq i \leq n\}$ est atteint en un unique $i_0 \in [\![m, n]\!]$.

2. Démontrer que $S_{m,n}$ est de la forme $\frac{2k+1}{2l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$, donc n'est pas un entier.

II

Soient a, b deux entiers ≥ 2 et premiers entre eux, et m un entier relatif.

1. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ unique tel que

$$ax_0 + by_0 = m \quad \text{et} \quad 0 \leq x_0 < b;$$

on dira que (x_0, y_0) est la “solution canonique” de l'équation $ax + by = m$. Partant de cette solution, comment obtient–on la “solution canonique” de l'équation $ax + by = ab - a - b - m$?

2. On note S l'ensemble des $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquels il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $ax + by = m$. Montrer que m appartient à S si et seulement si on a $y_0 \geq 0$ pour la “solution canonique” définie ci–dessus. En déduire que m est dans S si et seulement si $ab - a - b - m$ n'y est pas.

3. a) Observer que S admet un plus petit élément évident, puis montrer que son complémentaire $\mathbb{Z} \backslash S$ possède un plus grand élément; quel est cet élément?
b) Soit E l'ensemble des entiers de l'intervalle $[\,0\,,\, ab - a - b\,]$. Démontrer que $E \cap S$ et son complémentaire $E \backslash (E \cap S)$ ont le même cardinal $(a-1)(b-1)/2$. Qu'en déduisez–vous pour l'ensemble $L = \mathbb{N} \backslash S$, dit “des lacunes”?
c) Expliciter l'ensemble L dans les cas $a = 3$, $b = 7$, puis $a = 5$, $b = 7$.

III

1. Soient G un groupe abélien et H un sous–groupe de G. Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'ordre de G/H pour que le sous–groupe H soit maximal.

2. Soient X une partie de $\mathbb{Q}$ et $k \geq 1$ un entier tels que pour tout x dans $\mathbb{Q}$, on ait $kx \in X$. Montrer que $X = \mathbb{Q}$.

3. Démontrer que le groupe additif $\mathbb{Q}$ ne possède pas de sous–groupe maximal.

*****